

(k, a) 一般化 Fourier 変換に対する Schwartz 空間について

東京大学大学院数理科学研究科 樋川達郎

Tatsuro Hikawa

Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

概要

本稿では, (k, a) 一般化 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{k,a}$ の枠組みにおける古典的な Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の類似について論じる. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ が Segal–Shale–Weil 表現に対する滑らかなベクトルのなす空間に一致するという観察に基づき, (k, a) 一般化 Schwartz 空間 $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ を, $\mathcal{F}_{k,a}$ に伴うユニタリ表現に対する滑らかなベクトルのなす空間として定義する. 主定理として, 関数空間 $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ の明示的決定に関する結果を紹介する.

目次

1	(k, a) 一般化 Fourier 変換の理論について	1
2	滑らかなベクトル	2
3	(k, a) 一般化 Schwartz 空間の定義	3
4	(k, a) 一般化 Schwartz 空間の決定	4
4.1	$N = 1$ の場合	4
4.2	N が一般で $k = 0$ かつ a が有理数である場合	4
4.3	共形変換群の極小表現に対する Schwartz 空間	6
5	証明の概略	6

1 (k, a) 一般化 Fourier 変換の理論について

本稿の目的は, (k, a) 一般化 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{k,a}$ の枠組みにおける古典的な Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の類似である (k, a) 一般化 Schwartz 空間 $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ の定義と, その明示的決定に関する結果 [Hik26] を紹介することである. 本節では, その前提となる (k, a) 一般化 Fourier 変換の理論を簡潔に紹介する.

(k, a) 一般化 Fourier 変換 ((k, a) -generalized Fourier transform) $\mathcal{F}_{k,a}$ は, Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BSK009, BSK012] により導入された, 古典的な Fourier 変換 $\mathcal{F}$ の変形理論である. Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted は, $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の微分差分作用素の $\mathfrak{sl}_2$ 三対

$$\mathbb{H}_{k,a} = \frac{2}{a}E_x + \frac{2\langle k \rangle + a + N - 2}{a}, \quad \mathbb{E}_{k,a}^+ = \frac{i}{a}|x|^a, \quad \mathbb{E}_{k,a}^- = \frac{i}{a}|x|^{2-a}\Delta_k$$

を導入した（ここで、 $E_x = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ は Euler 作用素である．また、 Δ_k は Dunkl ラプラシアンであり、 $k = 0$ のとき古典的なラプラシアン Δ に一致する）．ここで、 k は Dunkl 理論に由来する重複度パラメータであり、 $a > 0$ は補間パラメータである（「補間」の意味は、以下で説明する）．この $\mathfrak{sl}_2$ 三対は、 $SL(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆群 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ のユニタリ表現

$$\Omega_{k,a}: \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x) dx))$$

に持ち上がる（ここで、 $w_{k,a}$ は適当な重み関数であり、 $k = 0$ のときは $w_{0,a}(x) = |x|^{a-2}$ である）． (k, a) 一般化 Fourier 変換は、 $\Omega_{k,a}$ に現れるユニタリ反転作用素として

$$\mathcal{F}_{k,a} = c_{k,a} \Omega_{k,a} \left(\exp_{\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})} \left(\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \quad (c_{k,a} = e^{\frac{i\pi}{2} \frac{2(k)+a+N-2}{a}})$$

と定義される．

(k, a) 一般化 Fourier 変換は、次の変換を特殊な場合として含む．

- $(k, a) = (0, 2)$ の場合、 $\mathcal{F}_{0,2}$ は古典的な Fourier 変換である．
- $(k, a) = (0, 1)$ の場合、 $\mathcal{F}_{0,1}$ は「光錐上の Fourier 変換」である（次段落を参照のこと）．
- k が一般で $a = 2$ の場合、 $\mathcal{F}_{k,2}$ は Dunkl 変換 [Dun92] である．

補間パラメータ a について説明しよう．Euclid 空間上の古典的な Fourier 変換は、Weil 表現の L^2 モデル（これは、メタプレクティック群 $Mp(N, \mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ表現であり、二つの既約成分に分解され、その各々が極小表現である）に現れるユニタリ反転作用素だと解釈できる．この解釈を推し進めると、Euclid 空間以外の多様体上の調和解析として、Fourier 変換に相当する作用素を自然に定義できる場合がある．このアイデアに基づき、Kobayashi–Mano [KM05, KM07a, KM07b, KM11] は、共形変換群の極小表現の L^2 モデルに現れるユニタリ反転作用素として「光錐上の Fourier 変換」を導入した．

表現 $\Omega_{k,a}$ は、 $(k, a) = (0, 2)$ のとき Segal–Shale–Weil 表現の部分群への制限に一致し、 $(k, a) = (0, 1)$ のとき共形変換群の二重被覆群 $\widetilde{SO}_0(N+1, 2)$ の極小表現の部分群への制限に一致する（これが、 $\mathcal{F}_{0,2}$ が古典的な Fourier 変換であり、 $\mathcal{F}_{0,1}$ が光錐上の Fourier 変換であることの理由である）．この意味で、パラメータ a は、二つの単純 Lie 群 $Mp(N, \mathbb{R})$ と $\widetilde{SO}_0(N+1, 2)$ の極小表現の間の補間を与えている．

2 滑らかなベクトル

(k, a) 一般化 Schwartz 空間の定義を述べるための準備として、本節では、ユニタリ表現に対する滑らかなベクトルについて復習する．

定義 2.1 (滑らかなベクトル) G を Lie 群とし、 $(\pi, \mathcal{H})$ をそのユニタリ表現とする．ベクトル $v \in \mathcal{H}$ が π に対して**滑らか** (smooth) であるとは、 G から $\mathcal{H}$ への写像 $g \mapsto \pi(g)v$ が滑らかであることをいう． π に対する滑らかなベクトルのなす空間を、 $\mathcal{H}^\infty$ あるいは表現を明示して $\mathcal{H}_\pi^\infty$ と書く．

$\mathcal{H}^\infty$ には適当な位相が与えられ（詳細は省略する）、これによって $\mathcal{H}^\infty$ は Fréchet 空間をなす．

関連して、ユニタリ表現の無限小表現の定義も述べておく．以下では、Hilbert 空間上の（全域で定義されているとは限らない）線型作用素 T の定義域を $\text{Dom}(T)$ と書く．

定義 2.2 (無限小表現) G を Lie 群、 $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし、 $(\pi, \mathcal{H})$ を G のユニタリ表現とする． $X \in \mathfrak{g}$ に

対して, $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 $d\pi(X)$ を,

$$\text{Dom}(d\pi(X)) = \left\{ v \in \mathcal{H} \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(e^{tX})v - v}{t} \in \mathcal{H} \text{ が存在する} \right. \right\},$$

$$d\pi(X)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(e^{tX})v - v}{t}$$

と定める (これは, $\mathcal{H}$ 上の歪自己随伴作用素である). $d\pi$ を, π の**無限小表現** (infinitesimal representation) という.

命題 2.3 G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし, $(\pi, \mathcal{H})$ を G のユニタリ表現とする.

- (1) $\mathcal{H}^\infty$ は $\mathcal{H}$ の稠密部分ベクトル空間である.
- (2) $\mathcal{H}^\infty$ は $\pi(G)$ 安定である. さらに, π は Lie 群 G の $\mathcal{H}^\infty$ 上の滑らかな表現を定める.
- (3) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $\mathcal{H}^\infty$ は $\text{Dom}(d\pi(X))$ に含まれ $d\pi(X)$ 安定である. さらに, $d\pi$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}^\infty$ 上の表現を定める.
- (4) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $\mathcal{H}^\infty$ は歪自己随伴作用素 $d\pi(X)$ の芯である (すなわち, $d\pi(X) = \overline{d\pi(X)|_{\mathcal{H}^\infty}}$ である).

命題 2.4 G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし, $(\pi, \mathcal{H})$ を G のユニタリ表現とする. ベクトル $v \in \mathcal{H}$ に対して, 次の条件は同値である.

- (a) v は π に対して滑らかである.
- (b) 任意の $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ に対して, $v \in \text{Dom}(d\pi(X_1) \cdots d\pi(X_n))$ である.
- (c) $\mathfrak{g}$ を (ベクトル空間として) 張る部分集合 S が存在して, 任意の $X_1, \dots, X_n \in S$ に対して, $v \in \text{Dom}(d\pi(X_1) \cdots d\pi(X_n))$ である.
- (d) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数として生成する部分集合 S が存在して, 任意の $X_1, \dots, X_n \in S$ に対して, $v \in \text{Dom}(d\pi(X_1) \cdots d\pi(X_n))$ である.

3 (k, a) 一般化 Schwartz 空間の定義

Euclid 空間上の古典的な調和解析において Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ が基本的な役割を果たす理由の一つは, この空間が Fourier 変換で安定であることである. 表現論の立場から見ると, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ は Segal–Shale–Weil 表現 (あるいは, その部分群への制限である $\Omega_{0,2}$) に対する滑らかなベクトルの空間 $L^2(\mathbb{R}^N)^\infty$ に一致する. Fourier 変換は Segal–Shale–Weil 表現に現れるユニタリ反転作用素にほかならないから, この視点は, Fourier 変換が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を安定にすることの表現論的な説明を与える.

以上の観察に基づき, 次のように定義する.

定義 3.1 ([Hik26, Definition 4.2]) k を非負の重複度関数, $a > 0$ とし, これらは $(2\langle k \rangle + N - 2)/a > -1$ (これは, 表現 $\Omega_{k,a}$ が定義されるための条件である [BSKØ12, Theorem 3.30]) を満たすとする. (k, a) **一般化 Schwartz 空間** ((k, a) -generalized Schwartz space) を, $\Omega_{k,a}$ に対する滑らかなベクトルのなす空間

$$\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x) dx)_{\Omega_{k,a}}^\infty$$

として定める.

滑らかなベクトルに関する一般論より、次が成り立つ。

命題 3.2 k を非負の重複度関数, $a > 0$ とし, これらは $(2\langle k \rangle + N - 2)/a > -1$ を満たすとする。

- (1) $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x) dx)$ の稠密部分ベクトル空間である。
- (2) $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は $\Omega_{k,a}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$ 安定である。さらに, $\Omega_{k,a}$ は Lie 群 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ 上の滑らかな表現を定める。
- (3) 任意の $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は $\text{Dom}(d\Omega_{k,a}(X))$ に含まれ $d\Omega_{k,a}(X)$ 安定である。さらに, $d\Omega_{k,a}$ は Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ 上の表現を与える。
- (4) 任意の $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は歪自己随伴作用素 $d\Omega_{k,a}(X)$ の芯である (すなわち, $d\Omega_{k,a}(X) = \overline{d\Omega_{k,a}(X)|_{\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)}}$ である)。

証明 命題 2.3 の特別な場合である。 □

系 3.3 k を非負の重複度関数, $a > 0$ とし, これらは $(2\langle k \rangle + N - 2)/a > -1$ を満たすとする。このとき, (k, a) 一般化 Schwartz 空間 $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は, (k, a) 一般化 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{k,a}$ で安定である。

証明 $\mathcal{F}_{k,a}$ は表現 $\Omega_{k,a}$ に現れるユニタリ反転作用素として定義されるから, 主張は, 命題 3.2 (2) の特別な場合である。 □

4 (k, a) 一般化 Schwartz 空間の決定

前節で述べたとおり, (k, a) 一般化 Schwartz 空間 $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ は, 古典的な Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}_{0,2}(\mathbb{R}^N)$ を一般化する自然な (表現 $\Omega_{k,a}$ に内在的な) $\mathcal{F}_{k,a}$ 安定部分空間として定義される。しかし, $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ が具体的にどのような関数空間であるかは, 定義からは明らかではない。本節では, この空間の明示的決定についての結果を紹介する。

4.1 $N = 1$ の場合

$N = 1$ の場合には, すべてのパラメータ (k, a) に対して $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R})$ を決定した。

定理 4.1 ([Hik26, Theorem 4.8]) k を非負の重複度関数, $a > 0$ とし, これらは $(2\langle k \rangle - 1)/a > -1$ を満たすとする。このとき,

$$\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto u(|x|^a) + xv(|x|^a) \mid u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})\}$$

が成り立つ。ここで,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{u|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mid u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}$$

である。

4.2 N が一般で $k = 0$ かつ a が有理数である場合

N が一般の場合の結果を述べるため, 記号を準備する。

$\mathbb{R}^N$ 上の m 次斉次多項式のなす空間を $\mathcal{P}^m(\mathbb{R}^N)$ と書き, m 次斉次調和多項式のなす空間を $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ と書

く、よく知られているように、直和分解

$$\mathcal{P}^m(\mathbb{R}^N) = \bigoplus_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} |x|^{2n} \mathcal{H}^{m-2n}(\mathbb{R}^N)$$

が成立する。したがって、形式的冪級数のなす空間 $\mathbb{C}[[x]] = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_N]]$ は

$$\mathbb{C}[[x]] = \prod_{m,n \in \mathbb{N}} |x|^{2n} \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$$

と分解される。

以下では、

$$S_{2p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \left| \tau(F) \in \prod_{m,n=0}^{\infty} |x|^{2np} \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N) \right. \right\}$$

と書く。ここで、 $\tau(F) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} \frac{\partial^\alpha F(0)}{\alpha!} x^\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ は F の原点における形式的 Taylor 級数を表す。上記の分解からわかるように、 $S_2(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ である。

定理 4.2 ([Hik26, Theorem 4.10]) $a = 2p/q \in \mathbb{Q}_{>0}$ ($p, q \in \mathbb{N}_{>0}$) とし、 $N = 1$ のときはさらに $a > 1$ であるとする。このとき、

$$\mathcal{S}_{0,a}(\mathbb{R}^N) = \sum_{j=0}^{q-1} |x|^{ja} S_{2p}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ。

例 4.3 定理 4.2 の特別な場合をいくつか挙げる。

- $p = q = 1$ (したがって、 $a = 2$) の場合、

$$\mathcal{S}_{0,2}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

であり、古典的な結果に対応する。

- $q = 1$ (したがって、 $a = 2p$) の場合、

$$\mathcal{S}_{0,2p}(\mathbb{R}^N) = S_{2p}(\mathbb{R}^N)$$

である。

- $p = 1$ (したがって、 $a = 2/q$) の場合、

$$\mathcal{S}_{0,2/q}(\mathbb{R}^N) = \sum_{j=0}^{q-1} |x|^{2j/q} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

である。

注意 4.4 a が有理数であるという条件は、 $\Omega_{k,a}$ のウェイト集合が集積点をもたないことや、 $\mathcal{F}_{k,a}$ が有限位数をもつことと同値であり [BSKØ12, Corollary 3.22 3), Corollary 5.2], 表現論的・調和解析的に興味深い場合だと考えられる。一方で、 a が無理数のとき $\mathcal{F}_{k,a}$ が「非常に滑らかな関数さえドラスティックに変形する」ことが、Gorbachev–Ivanov–Tikhonov [GIT23, Proposition 5.8] により指摘されている。

4.3 共形変換群の極小表現に対する Schwartz 空間

本小節では、 $N \geq 2$ とする。共形変換群の二重被覆群 $\widetilde{SO}_0(N+1, 2)$ の極小表現の L^2 モデルを、

$$\Pi_1: \widetilde{SO}_0(N+1, 2) \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{-1} dx))$$

と書く（正確な定義については、Kobayashi–Mano [KM07b] を参照のこと）。

定義 4.5 ([Hik26, Definition 5.4]) $N \geq 2$ とする。共形変換群の極小表現に対する **Schwartz 空間** (Schwartz space for the minimal representation of the conformal group) を、 Π_1 に対する滑らかなベクトルのなす空間

$$\mathcal{S}_{\text{conf}}(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N, |x|^{-1} dx)_{\Pi_1}^\infty$$

として定める。

(k, a) 一般化 Schwartz 空間の場合と同様に、 $\mathcal{S}_{\text{conf}}(\mathbb{R}^N)$ は $\mathcal{F}_{0,1}$ 安定である。

$\Omega_{0,1}$ は Π_1 の部分群への制限に一致するから、明らかに $\mathcal{S}_{\text{conf}}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}_{0,1}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) + |x|\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (定理 4.2) である。実は、これらの $\mathcal{F}_{0,1}$ 安定部分空間は一致する。

定理 4.6 ([Hik26, Theorem 5.5]) $N \geq 2$ とする。次の空間は一致する。

- (a) $\mathcal{S}_{\text{conf}}(\mathbb{R}^N)$ (すなわち、極小表現 Π_1 に対する滑らかなベクトルのなす空間)
- (b) $\mathcal{S}_{0,1}(\mathbb{R}^N)$ (すなわち、 $\Omega_{0,1}$ に対する滑らかなベクトルのなす空間)
- (c) $\Omega_{0,1}|_{\widetilde{SO}(2)}$ に対する滑らかなベクトルのなす空間
- (d) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) + |x|\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

5 証明の概略

本節では、主結果の証明の概略を述べる。証明の方針は共通しているから、定理 4.2 に絞って説明する。

以下では、Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BSKØ12, (3.11), (3.12)] に倣い、

$$\lambda_{k,a,m} = \frac{2m + 2\langle k \rangle + N - 2}{a}$$

と書き、 $\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数

$$f_{k,a,m;l}(r) = \left(\frac{2^{\lambda_{k,a,m}+1} \Gamma(l+1)}{a^{\lambda_{k,a,m}} \Gamma(\lambda_{k,a,m} + l + 1)} \right)^{1/2} r^m L_l^{\lambda_{k,a,m}} \left(\frac{2}{a} r^a \right) \exp\left(-\frac{1}{a} r^a\right)$$

を考える ($m, l \in \mathbb{N}$)。ここで、 L_l^λ は Laguerre 多項式を表す。また、 m 次 k 球面調和関数のなす空間を、 $\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})$ と書く ($k=0$ のとき、これは m 次球面調和関数のなす空間 $\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^{N-1})$ である)。

事実 5.1 ([BSKØ12, Theorem 3.31, 3.21]) k を非負の重複度関数、 $a > 0$ とし、これらは $(2\langle k \rangle + N - 2)/a > -1$ を満たすとする。

(1) ユニタリ表現 $\Omega_{k,a}$ は、

$$L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x) dx) = \sum_{m \in \mathbb{N}}^\oplus \mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k \rangle + a + N - 3} dr)$$

と直交直和分解される．ここで、各 $m \in \mathbb{N}$ に対応する上式の右辺の項について、 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の $\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})$ への作用は自明であり、 $L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k \rangle + a + N - 3} dr)$ への作用は最低ウェイト $\lambda_{k,a,m} + 1$ の既約ユニタリ表現である．

- (2) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $(f_{k,a,m;l})_{l \in \mathbb{N}}$ は $L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k \rangle + a + N - 3} dr)$ の正規直交基底である．さらに、微分差分作用素 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}_{k,a}^+$, $\mathbb{E}_{k,a}^-$ の $p \otimes f_{k,a,m;l}$ ($p \in \mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})$) への作用は、明示的に書ける（詳細は省略する）．

この事実と関数解析的な議論を組み合わせることで、次の命題を示せる．

命題 5.2 k を非負の重複度関数、 $a > 0$ とし、これらは $(2\langle k \rangle + N - 2)/a > -1$ を満たすとする．このとき、次の空間は一致する．

- (a) $\mathcal{S}_{k,a}(\mathbb{R}^N)$ (すなわち、 $\Omega_{k,a}$ に対する滑らかなベクトルのなす空間)
- (b) $\Omega_{k,a}|_{\widetilde{SO}(2)}$ に対する滑らかなベクトルのなす空間
- (c) 空間

$$\left\{ \sum_{m,l \in \mathbb{N}} p_{m,l} \otimes f_{k,a,m;l} \left| \begin{array}{l} p_{m,l} \in \mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1}), \\ (\|p_{m,l}\|_{L^2(\mathbb{S}^{N-1}, w_k(\omega) d\omega)})_{m,l \in \mathbb{N}} \text{ は急減少} \end{array} \right. \right\}.$$

ここで、無限和は $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x) dx)$ における収束の意味のものである．

以上を踏まえて、主結果の証明の概略を述べる．

定理 4.2 の証明の概略 $\sum_{j=0}^{q-1} |x|^{ja} S_{2p}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}_{0,a}(\mathbb{R}^N)$ を示すためには、命題 2.4 より、左辺が歪自己随伴作用素 $d\Omega_{0,a}(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ と $d\Omega_{0,a}(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$ の定義域に含まれこれらの作用素で安定であることを示せばよい．左辺が $(C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$ を定義域とする）微分差分作用素 $\mathbb{E}_{0,a}^+$ と $\mathbb{E}_{0,a}^-$ で安定であることは、計算によって確かめられる．このことと歪自己随伴作用素の定義域に関する議論を組み合わせることで、主張が示される．

$\mathcal{S}_{0,a}(\mathbb{R}^N) \subseteq \sum_{j=0}^{q-1} |x|^{ja} S_{2p}(\mathbb{R}^N)$ を示すために、命題 5.2 (c) の無限和による表示を用いる．この無限和の各階の導関数の一様ノルムを評価し、右辺に属することを示す．次の Laguerre 多項式の評価が、一様ノルムの評価において重要な役割を果たす． $\square$

命題 5.3 $l, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ かつ $\lambda \geq \alpha + \beta$ とする．このとき、

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left| t^{\alpha/2 + \beta} \left(\frac{d}{dt} \right)^\gamma (L_l^\lambda(t) e^{-t/2}) \right| \\ & \leq 2^\beta (\lambda + l)^\beta \binom{\lambda + l + \gamma}{l + \beta} (\alpha!)^{1/2} \binom{\lambda - \beta + \gamma}{\alpha}^{1/2} \binom{\lambda + l}{\alpha}^{-1/2} \end{aligned}$$

である．

注意 5.4 命題 5.3 のタイプの Laguerre 多項式の評価は、筆者が調べた限りでは、既存の文献の中には見つけられなかった．命題 5.3 は、Koornwinder [Koo77, Remark 4.1] による等式

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \frac{\lambda}{\lambda + i + j} \frac{(\lambda + l + 1)^{\bar{i}}}{i! (\lambda + j)^{\bar{i}} (\lambda + i)^{\bar{j}}} \left(t^{i+j} \frac{L_{l-j}^{\lambda+i+j}(t^2)}{L_{l-j}^{\lambda+i+j}(0)} e^{-t^2/2} \right)^2 = 1$$

を用いて証明できる．

謝辞

筆者は、本研究の一部を、RIMS 共同研究（公開型）「表現論とその周辺分野の交流」（2026 年 6 月 1 日～4 日）において発表しました。発表の機会を下さったオーガナイザーの小林雅人先生に感謝いたします。

本研究は、JSPS 科研費 JP25KJ0914 の助成を受けたものです。

参考文献

- [BSK009] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, *Generalized Fourier transforms $\mathcal{F}_{k,a}$* , Comptes Rendus Mathématique **347**.19–20 (2009), pp. 1119–1124.
- [BSK012] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, *Laguerre semigroup and Dunkl operators*, Compositio Mathematica **148**.4 (2012), pp. 1265–1336.
- [Dun92] C. F. Dunkl, *Hankel transforms associated to finite reflection groups*, In: Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications, American Mathematical Society, 1992, pp. 123–138.
- [GIT23] D. Gorbachev, V. Ivanov, S. Tikhonov, *On the kernel of the (κ, a) -generalized Fourier transform*, Forum of Mathematics, Sigma **11** (2023), e72, 25 pages.
- [Hik26] T. Hikawa, *The Schwartz space for the (k, a) -generalized Fourier transform and the minimal representation of the conformal group*, preprint, 2026.
<https://arxiv.org/abs/2603.26453v1>
- [KM05] T. Kobayashi, G. Mano, *Integral formulas for the minimal representation of $O(p, 2)$* , Acta Applicandae Mathematicae **86**.1–2 (2005), pp. 103–113.
- [KM07a] T. Kobayashi, G. Mano, *Integral formula of the unitary inversion operator for the minimal representation of $O(p, q)$* , Proceedings of the Japan Academy, Ser. A Mathematical Sciences **83**.3 (2007), pp. 27–31.
- [KM07b] T. Kobayashi, G. Mano, *The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group*, In: Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory, World Scientific Publishing, 2007, pp. 151–208.
- [KM11] T. Kobayashi, G. Mano, *The Schrödinger Model for the Minimal Representation of the Indefinite Orthogonal Group $O(p, q)$* , American Mathematical Society, 2011.
- [Koo77] T. Koornwinder, *The addition formula for Laguerre polynomials*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **8**.3 (1977), pp. 535–540.