

Applications of coarse geometry to a properness criterion for solvable group actions on homogeneous spaces

広島大学大学院先進理工系科学研究科

長屋 拓暁

Hiroaki Nagaya

Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University

Supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2132

1 背景と主結果

1.1 背景

有界閉集合であることとコンパクトであることが同値な距離空間において、その等長変換群 $\text{Isom}(X)$ の部分群の「離散性」と「固有不連続性」は一致する。しかし、一般のケースでは離散群であっても不連続群になるとは限らない。そこで重要になる作用の性質が「固有性」である。群作用の固有性を課すと、等長作用の時と同様に部分群の「離散性」と「固有不連続性」は一致する。よって不連続群の研究において、与えられた群作用が固有であるかどうか判定することは基本的な問題である。

この問題を考えるにあたって、いくつかの研究では以下の設定で考えられてきた:

G を局所コンパクトハウスドルフ群, H, L を G の閉部分群とし, 等質空間 G/H 上の自然な L -作用を ρ とする。

この枠組みで考えることの1つの良い点は、固有性の同値な条件を G の情報だけを使って表せる点にある(命題 2.4 を見よ)。

また、どのような仮定のもとで作用の固有性とCI条件、すなわち各点の固定部分群のコンパクト性が同値になるかという問いは、この分野における基本的な問題である。

この形の問いは、Kobayashi [2] が

$$G := \text{GL}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2, \quad H := \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

の場合に、任意の連結閉部分群 $L < G$ に対してCI条件と固有性が同値であることを示したことに端を発する。その後、Lipsman [3] は

$$G := \text{N}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \quad H := \text{N}(3)$$

の場合にこの同値性を証明し、連結単連結冪零Lie群 G とその連結閉部分群 L, H に対しても同様の同値性が成り立つのではないかというLipsman予想を提示した。

この予想をめぐって, Nasrinによる単連結2-step nilpotent Lie群の場合の結果 [6], Yoshinoによる $N(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ の場合の結果 [7], $N(5) \ltimes \mathbb{R}^5$ における Lipsman 予想の反例の構成 [8], Baklouti–Khlif および Yoshino による 3-step nilpotent Lie群の場合の結果 [1, 9] などが得られている. また Lipsman 予想の範囲を超えて, Baklouti–Khlif により G が連結単連結な指数型可解 Lie群であり, H または L が G の極大連結部分群であるケースでも同値性が成り立つことが示されている [1]. このように上記の設定下で G を可解群とした時の等質空間上の自然な作用についての固有性判定は発展してきた.

本稿でも, G を可解群とした時の等質空間上の自然な作用に関する固有性を主題とする. ただし本稿では, CI条件による特徴づけではなく, 粗幾何学的な観点から固有性を判定する方法に注目する. 特に, 広義上三角行列群 $G = B(n)$ 上に明示的な粗写像を構成し, その像の無限遠での離れ方から, $B(n)/H$ 上の自然な L -作用が固有であるための十分条件を与える.

1.2 主結果

以下, 本稿を通じての記号使いを定める. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$B(n) := \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid x_{ij} = 0 \text{ for all } 1 \leq j < i \leq n\}$$

とし, 各 $X = (x_{ij}) \in B(n)$ に対して

$$\|X\|_{\ell_1} := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |x_{ij}|$$

とおく. また, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し, 各 $1 \leq i \leq j \leq n$ に対し, 写像 $\Phi_{ij}: B(n) \rightarrow B(j-i+1)$ を, 行列 $X = (x_{kl})$ から i 行 (i, j) -成分を右上とする上三角ブロックを取り出す写像として定める. すなわち

$$\Phi_{ij}: X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{ii} & \cdots & \cdots & x_{ij} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{jj} \end{pmatrix}$$

と定める.

本稿の主結果は, 以下の通りである:

主定理 1. 次の写像

$$\mu: B(n) \rightarrow \mathbb{R}^{\dim B(n)}, \quad X \mapsto (\log(\|\Phi_{ij}(X)\|_{\ell_1}))_{1 \leq i \leq j \leq n}$$

は, LR粗構造 (例 2.9 を見よ) を備えた $B(n)$ から有界粗構造 (例 2.8 を見よ) を備えた $\mathbb{R}^{\dim B(n)}$ のへの粗写像である. 特に, $L, H < B(n)$ を閉部分群とし, 任意の $R \geq 0$ に対して

$$\mu(L) \cap \bar{B}_R(\mu(H))$$

が有界であれば, L の $B(n)/H$ 上の自然な作用は固有である. ただし, $\bar{B}_R(\mu(H))$ は $\mu(H)$ の閉近傍である.

2 準備

2.1 不連続群に関する基礎事項

この節では, 不連続群と固有作用に関する基礎事項をまとめる. G を局所コンパクトハウスドルフ群, $H < G$ を閉部分群, $\Gamma < G$ を離散部分群とし, 等質空間 G/H 上の自然な Γ -作用を θ とおく. すなわち

$$\theta : \Gamma \times G/H \longrightarrow G/H, \quad (\gamma, gH) \longmapsto \gamma gH$$

である.

定義 2.1. 離散群 Γ の等質空間 G/H 上の自然な作用 θ が**固有不連続**であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset G/H$ に対して, $\Gamma_K := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ が有限集合となることをいう. このとき, Γ を G/H の**不連続群**という.

固有不連続性は, 商空間を幾何的対象として扱うための基本条件である. とくに作用が自由な場合には, 次のように主束が得られる.

命題 2.2. Γ の G/H 上の自然な作用が固有不連続かつ自由であるとする. このとき, 商写像

$$G/H \longrightarrow \Gamma \backslash G/H$$

は主 Γ -束である.

我々は一般に等長作用とは限らないケースに焦点を当てる. この場合, Γ が離散群だからといって不連続群とは限らない.

この問題を解消する一つの方法として, 固有な作用から不連続群を構成することができる. 今までの設定に加えて, 以降 L を G の閉部分群とする. 次に, 離散部分群に限らない閉部分群の作用を考える. $L < G$ を閉部分群とし, ρ を L の G/H 上の自然な作用

$$\rho : L \times G/H \longrightarrow G/H, \quad (\ell, gH) \longmapsto \ell gH$$

とする.

定義 2.3. L の G/H 上の自然な作用が**固有**であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset G/H$ に対して, $L_K := \{\ell \in L \mid \ell K \cap K \neq \emptyset\}$ がコンパクトであることをいう.

特に, 今回のように等質空間上の自然な作用を考える場合, 以下のように言い換えられる.

命題 2.4. 作用 ρ が固有であることと, 任意のコンパクト集合 $C \subset G$ に対して $L \cap CHC^{-1}$ がコンパクトとなることは同値である.

これにより, G の部分集合の情報のみによって ρ の固有性を議論することができる. また, 以下の命題が成り立つ.

命題 2.5. G, L, H をこれまでの設定を引き継ぐものとする。このとき、以下は同値である：

1. 等質空間 G/H 上の自然な L -作用は固有である。
2. 等質空間 G/L 上の自然な H -作用は固有である。
3. 直積 $G/H \times G/L$ 上の自然な対角 G -作用は固有である。

また閉部分群の固有作用から、離散部分群をとることにより固有不連続な作用が構成できる。

命題 2.6. L の G/H 上の自然な作用が固有であるとする。このとき、任意の離散部分群 $\Gamma < L$ に対して、 Γ の G/H 上の自然な作用は固有不連続である。

2.2 粗幾何学に関する基礎事項

まず粗空間の基本事項を確認する。

定義 2.7. M を空でない集合とする。 $M \times M$ の部分集合族 $\mathcal{E}$ が M 上の**粗構造**であるとは、次の5条件を満たすことをいう：

1. $\text{diag}(M) \in \mathcal{E}$.
2. $E \in \mathcal{E}$ ならば、 $E^\dagger \in \mathcal{E}$. ただし $E^\dagger := \{(y, x) \mid (x, y) \in E\}$.
3. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば、 $E_1 \circ E_2 \in \mathcal{E}$. ただし

$$E_1 \circ E_2 := \{(x, z) \mid \exists y \in M \text{ s.t. } (x, y) \in E_1, (y, z) \in E_2\}.$$

4. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば、 $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$.
5. $E \in \mathcal{E}$ かつ $E' \subset E$ ならば、 $E' \in \mathcal{E}$.

このとき、 $(M, \mathcal{E})$ を**粗空間**と呼び、 $\mathcal{E}$ の元を**制御集合**という。 $E \in \mathcal{E}$ と $S \subset M$ に対して

$$E[S] := \{p \in M \mid \exists q \in S \text{ s.t. } (p, q) \in E\}$$

と書き、 S の E -近傍という。また、部分集合 $B \subset M$ が**有界**であるとは、ある $p \in M$ と $E \in \mathcal{E}$ が存在して $B \subset E[p]$ となることをいう。

例 2.8. (M, d) を距離空間とする。各 $R \geq 0$ に対して

$$E_R := \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) \leq R\}$$

とおく。このとき

$$\mathcal{E}_d := \{E \subset M \times M \mid \exists R \geq 0 \text{ s.t. } E \subset E_R\}$$

は M 上の粗構造であり、**有界粗構造**と呼ばれる。この粗構造における有界集合は、距離空間の意味での有界集合である。

例 2.9. G を局所コンパクトハウスドルフ群とする。コンパクト集合 $C \subset G$ に対して

$$E_C := \{(x, y) \in G \times G \mid x \in CyC^{-1}\}$$

とおく. このとき

$$\mathcal{E}^{\text{LR}} := \{E \subset G \times G \mid \exists C \subset G : \text{compact s.t. } E \subset E_C\}$$

は G 上の粗構造であり, **LR粗構造**と呼ばれる. この粗構造における有界集合は, G の相対コンパクト集合である.

粗空間の間の写像について, 以下の用語を定める:

定義 2.10. $(M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)$ を粗空間とし, f を M から N への写像とする.

1. f が**制御的**であるとは, 任意の $E \in \mathcal{E}_M$ に対して $(f \times f)(E) \in \mathcal{E}_N$ となることをいう.
2. f が**固有**であるとは, 任意の N 上の有界集合 D に対し, 逆像 $f^{-1}(D)$ もまた M の有界集合であることをいう.
3. f が**粗写像**であるとは, 制御的かつ固有であることをいう.
4. f が**粗埋め込み**であるとは, 粗写像かつ任意の $F \in \mathcal{E}_N$ に対して $(f \times f)^{-1}(F) \in \mathcal{E}_M$ が成り立つことをいう.

注意 2.11. 上記の粗埋め込みの定義の「粗写像かつ」の部分は「制御的かつ」に変えても良い.

また, 群作用の固有性を粗幾何学的に捉えるために以下の概念は重要である:

定義 2.12. $(M, \mathcal{E})$ を粗空間, A, D を M の部分集合とする. A と D が**漸近的に交わらない**とは, 次の同値な3条件のどれか(すなわち全て)を満たすことをいう:

1. 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E[A] \cap D$ が M 上の有界集合である.
2. 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $A \cap E[D]$ が M 上の有界集合である.
3. 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E[A] \cap E[D]$ が M 上の有界集合である.

主結果には次の基本的な2つの性質と, 我々の過去の結果を用いる.

命題 2.13. $(M, \mathcal{E}_M), (P, \mathcal{E}_P), (Q, \mathcal{E}_Q)$ を粗空間とし, $f: M \rightarrow P$ を粗写像, $g: M \rightarrow Q$ を制御的な写像とする. このとき, $(f, g): M \rightarrow P \times Q, x \mapsto (f(x), g(x))$ は粗写像である. ただし, $P \times Q$ には直積粗構造 $\{E \subset (P \times Q) \times (P \times Q) \mid (\pi_1 \times \pi_3)(E) \in \mathcal{E}_P, (\pi_2 \times \pi_4)(E) \in \mathcal{E}_Q\}$ が備わっているものとする (π_i は i -成分への射影).

命題 2.14. G_1, G_2 をLR粗構造を備えた局所コンパクトハウスドルフ群とし, $f: G_1 \rightarrow G_2$ を写像とする.

1. f が連続群準同型であれば, f は制御的である.
2. f が位相的閉埋め込みである群準同型ならば, f は粗写像である.

下記の定理は, 論文 [4, 5] の命題の中で今回の主定理に必要な主張を抜粋したものである.

定理 2.15 (cf. Miyaji–N–Ogawa–Okuda [4, 5]). G をLR粗構造を備えた局所コンパクトハウ

ハウスドルフ群, $H, L < G$ を閉部分群, $(M, \mathcal{E})$ を粗空間, $\mu: G \rightarrow M$ を粗写像とする. $\mu(L)$ と $\mu(H)$ が漸近的に交わらないならば, L の G/H 上の自然な作用は固有である. さらに μ が粗埋め込みであれば, その逆も成り立つ.

3 主結果

3.1 $B(n)$ に対する粗写像

本研究の主結果は以下のとおりである (記号使いは 1.2 節で定めたものである):

定理 3.1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, 以下のことが成り立つ.

1. 写像 $\mu_0: B(n) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \log(\|X\|_{\ell_1})$ は制御的である.
2. 写像

$$\begin{aligned} \mu_1: (B(n), \mathcal{E}^{\text{LR}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{E}_d) \\ X := (x_{ij}) &\longmapsto (\log |x_{11}|, \dots, \log |x_{nn}|, \log \|X\|_{\ell_1}) \end{aligned}$$

は粗写像である.

特に $B(n)$ の閉部分群 L, H に対して, $\mu_1(L)$ と $\mu_1(H)$ が漸近的に交わらないならば, $B(n)/H$ 上の L -作用は固有である (定理 2.15 を見よ).

上記の定理の証明については, 次の命題 3.2 を用いる:

命題 3.2. G を LR 粗構造を備えた局所コンパクトハウスドルフ群とする. 連続関数 $f: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ が劣乗法的 (i.e. $\forall g, h \in G, f(gh) \leq f(g)f(h)$) ならば, $\log \circ f$ は $(G, \mathcal{E}^{\text{LR}})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_d)$ への制御的な写像である.

ただ定理 3.1 で紹介した写像 μ_1 は固有性の判定法としては弱く, 以下のような固有な例に対して判定できない.

例 3.3. $B(3)$ の部分群 L, H を

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{13} \in \mathbb{R} \right\}, \quad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{12} \in \mathbb{R} \right\}$$

と定める. このとき, 以下の作用

$$\begin{aligned} B(3) \times ((\mathbb{R}^\times)^3 \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow (\mathbb{R}^\times)^3 \times \mathbb{R}^2, \\ (X, (a_1, a_2, a_3), v) &\mapsto \left((x_{11}a_1, x_{22}a_2, x_{33}a_3), \frac{1}{x_{33}} \left(\Phi_{12}(X)v + \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

は推移的であり, $((1, 1, 1), 0) \in (\mathbb{R}^\times)^3 \times \mathbb{R}^2$ の固定部分群が H となるので, 等質空間 $B(3)/H$ は $(\mathbb{R}^\times)^3 \times \mathbb{R}^2$ とみなせる. ただし, $\Phi_{12}: B(3) \rightarrow B(2)$ はこの例の後に紹介する写像である. また,

L -作用は $\mathbb{R}^2$ の第一成分の平行移動となるので、明らかに固有である。しかし、 $\mu_1(L) = \mu_1(H)$ かつこの集合は有界でないため、定理 3.1 では判定できない。

以下の定理では、上記の例も判定できる (記号使いは 1.2 節で定めたものである):

定理 3.4. 次の写像

$$\mu: (B(n), \mathcal{E}^{\text{LR}}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\dim B(n)}, \mathcal{E}_d) \quad X \mapsto (\log(\|\Phi_{ij}(X)\|_{\ell_1}))_{1 \leq i \leq j \leq n}.$$

は粗写像である。特に $B(n)$ の閉部分群 L, H に対して、 $\mu(L)$ と $\mu(H)$ が漸近的に交わらないならば、 $B(n)/H$ 上の L -作用は固有である (定理 2.15 を見よ)。

上記の定理の証明には、定理 3.1 と命題 2.13, 2.14 を用いる。より詳細には、それぞれの成分関数が制御的であることは定理 3.1 と命題 2.14 から従い、 μ が粗写像であることは μ_1 が粗写像であることと命題 2.13 を用いた。

以後表記の簡略化のため、各 $1 \leq i \leq j \leq n$ に対して、

$$\mu_{ij}: B(n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \log(\|\Phi_{ij}(X)\|_{\ell_1})$$

と定める。

定理 3.4 の判定法では、例 3.3 で紹介した $B(3)/H$ 上の自然な L -作用が固有であることを確かめることができる。以下ではそのことを説明する。 L, H は以下のように定めていた:

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{13} \in \mathbb{R} \right\}, \quad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{12} \in \mathbb{R} \right\}.$$

このとき $\mu(L), \mu(H)$ は以下のようなになる (成分の順番は $(\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{13})$):

$$\begin{aligned} \mu(L) &:= \{(0, 0, 0, \log 2, \log 2, \log(|x_{13}| + 3)) \mid x_{13} \in \mathbb{R}\}, \\ \mu(H) &:= \{(0, 0, 0, \log(|x_{12}| + 2), \log 2, \log(|x_{12}| + 3)) \mid x_{12} \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

よって、各 $R \geq 0$ に対して、第 4 成分の比較により $\bar{B}_R(\mu(L)) \cap \mu(H)$ は、有界部分集合

$$\{(0, 0, 0, \log(|x_{12}| + 2), \log 2, \log(|x_{12}| + 3)) \mid 2e^{-R} - 2 \leq |x_{12}| \leq 2e^R\}$$

に包含されるので有界である。従って、 $B(3)/H$ 上の L -作用は固有である。

注意 3.5. 実は上で紹介した話は第 5 成分は無視しても良い例になっている。実際、定理 3.4 で紹介した写像 μ が粗写像であることは、命題 2.13 と定理 3.1 で紹介した μ_1 が粗写像であることを用いた。そのため、固有性の十分性を調べる際には、 μ 自体を調べるのではなく、 (L, H) の組に応じて μ_1 と判別に必要な成分のところを取り出して議論することが可能である。具体的に今回の例では、 μ_1 と $\mu_{12}: X \mapsto \log(\|\Phi_{12}(X)\|_{\ell_1})$ の組 $(\mu_1, \mu_{12}): B(3) \rightarrow \mathbb{R}^5$ が粗写像であることを用いて調べることもできる。

もう一つ今回の判定法で固有性が確かめられる作用の例を紹介する。

例 3.6. $B(5)$ の二つの閉部分群 L, H を以下のように定める:

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & a + \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad H := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| A \in B(4), \lambda \in \mathbb{R}^\times \right\}.$$

このとき、等質空間 $B(5)/H \cong \mathbb{R}^4$ 上の L -作用は固有となる。このことは定理 3.4 を用いて確認でき、以下にそのスケッチを書く。任意に $R \geq 1$ をとり、 $\bar{B}_R(\mu(H)) \cap \mu(L)$ が有界であることを示す。 $(\mu_{44}, \mu_{55}, \mu_{45})$ -成分の3次元の比較から、集合 $\bar{B}_R(\mu(H)) \cap \mu(L)$ の $\mu|_L$ による逆像上で、パラメータ a は有界となる。このことと (μ_{24}, μ_{25}) -成分の2次元の比較から、集合 $\bar{B}_R(\mu(H)) \cap \mu(L)$ の $\mu|_L$ による逆像上で、 b も有界となる。さらにそのことから (μ_{14}, μ_{15}) -成分の2次元の比較から、集合 $\bar{B}_R(\mu(H)) \cap \mu(L)$ の $\mu|_L$ による逆像上で、 c も有界となる。よって、集合 $\bar{B}_R(\mu(H)) \cap \mu(L)$ もまた有界となる。したがって、定理 3.4 より、 $B(5)/H \cong \mathbb{R}^4$ 上の L -作用は固有となる。

3.2 $B(n)$ の閉部分群における粗写像

命題 2.14 と定理 3.4 により、次のような系を得る。

系 3.7. n を固定し、 G を $B(n)$ の閉部分群とする。このとき、包含写像 $\iota: G \rightarrow B(n)$ と定理 3.4 で紹介した μ の合成 $\mu \circ \iota: G \rightarrow \mathbb{R}^{\dim B(n)}$ は粗写像である。ただし、 G には LR-粗構造が備わっているものとし、 $\mathbb{R}^{\dim B(n)}$ には有界粗構造が備わっているものとする。特に、 G の閉部分群 $L, H < G$ に対して、 $\mu(L)$ と $\mu(H)$ が漸近的に交わらないならば、 G/H 上の自然な L -作用は固有である。

注意 3.8. 上の判定法は一般には固有性の必要条件とは限らない。実際、 $B(3)$ の部分群

$$N(3) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

について、閉部分群 L, H は

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{4} & \frac{s^2}{4} \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

とする。このとき、 $N(3)/H$ 上の L -作用は固有となるが、 $B(3)/H$ 上の L -作用は固有ではないため、系 3.7 の判定法は適用できない。ただ、この特別な状況については、以下の粗写像を用いると判定できる。

定理 3.9. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する. ユニポテントな上三角行列の群

$$N(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x_{ij} \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i < j \leq n) \right\}$$

について, 写像

$$\begin{aligned} \theta : N(n) &\rightarrow \mathbb{R}^{\dim N(n)} \\ X &\mapsto (x_{12}, x_{23}, \dots, x_{n-1n}) \oplus (\log \|\Phi_{ij}(X)\|_{\ell_1})_{1 \leq i < j-1 \leq n-1} \end{aligned}$$

は粗写像である. ただし, $N(n)$ にはLR粗構造が備わっているものとし, $\mathbb{R}^{\dim N(n)}$ には有界粗構造が備わっているものとする. 特に, $N(n)$ の閉部分群 L, H に対して, $\theta(L)$ と $\theta(H)$ が漸近的に交わらないならば, $N(n)/H$ 上の L -作用は固有である.

注意 3.8 で紹介した $N(3)/H$ の固有な L -作用について, 上記の定理を使って固有性を再確認してみる.

$$\theta(L) := \left\{ \left(t, t, \log \left(2|t| + \frac{t^2}{2} + 3 \right) \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \theta(H) := \left\{ \left(\frac{s}{4}, 2s, \log \left(\frac{9}{4}|s| + \frac{s^2}{4} + 3 \right) \right) \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. 任意の $R \geq 1$ に対して,

$$\theta(L) \cap \bar{B}_R(\theta(H)) \subset \left\{ \left(t, t, \log \left(2|t| + \frac{t^2}{2} + 3 \right) \right) \middle| t \in \left[-\frac{9}{7}R, \frac{9}{7}R \right] \right\}$$

となるので, 有界である. よって, $N(3)/H$ 上の L -作用は固有となる.

今後の課題

本稿では, $B(n)$ 上に構成した粗写像 μ による固有性判定法を紹介した. 今後の課題は μ_0 に制御的な写像を追加していくことによって, 固有性の必要十分条件を構成することである. また, この判定法と既存の固有作用判定法, とくにLipsman予想をめぐる結果との関係を粗幾何学的に整理することも重要である. 加えて, L と H がLie代数 $\mathfrak{l}, \mathfrak{h}$ に対応する解析的閉部分群である場合に, 本稿の判定条件をLie代数の言葉で言い換えられるかを調べたい.

謝辞

本研究は, 国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所でのRIMS 共同研究(公開型)「表現論とその周辺分野の交流」(2026年6月1–4日)において発表したものです. 講演のご機会をいただきました世話人の小林雅人先生には深く感謝申し上げます. 本研究はJST SPRING, Grant Number JPMJSP2132の支援を受けたものです.

参考文献

- [1] A. Baklouti and F. Khlif, *Proper actions on some exponential solvable homogeneous spaces*, Internat. J. Math. **16** (2005), no. 9, 941–955.
- [2] T. Kobayashi, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990), World Scientific, River Edge, NJ, 1992, pp. 59–75.
- [3] R. L. Lipsman, *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory **5** (1995), no. 1, 25–39.
- [4] M. Miyaji, H. Nagaya, K. Ogawa and T. Okuda, *Some categorical remarks on coarse subspaces of coarse spaces*, arXiv:2607.19846 [math.CT], (2026)
- [5] H. Nagaya, K. Ogawa and T. Okuda, *A characterization of proper actions on homogeneous spaces with non-compact isotropy groups from a viewpoint of coarse geometry*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **101** (2025), no. 6, 31–36.
- [6] S. Nasrin, *Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups*, Tokyo J. Math. **24** (2001), no. 2, 535–543.
- [7] T. Yoshino, *A solution to Lipsman’s conjecture for $\mathbb{R}^4$* , Internat. Math. Res. Notices (2004), no. 80, 4293–4306.
- [8] T. Yoshino, *A counterexample to Lipsman’s conjecture*, Internat. J. Math. **16** (2005), no. 5, 561–566.
- [9] T. Yoshino, *Criterion of proper actions for 3-step nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 7, 783–795.