

Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model in the twisted affine cases

早稲田大学・基幹理工学研究科・数学応用数理専攻 安達 晶平

Shohei Adachi

Department of Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Fundamental Science and Engineering,
Waseda University

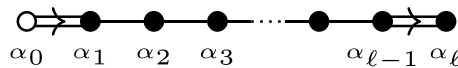
概要

Extremal ウェイト加群は柏原が導入した最高ウェイト加群の一般化であり、結晶基底を持っている。我々は量子群が twisted 型量子アフィン代数の場合に、レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底を実現するモデルとして半無限 LS パスを導入した。これは、untwisted 型での石井、内藤、佐垣 [3] による先行研究の twisted 型における類似である。小池隼人との共同研究 [1] に基づく。

1 量子アフィン代数上のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群

Extremal ウェイト加群の定義を復習する。

$\mathfrak{g}_{\text{af}}$ をアフィン型 Kac–Moody Lie 代数, $\mathfrak{h}_{\text{af}}$ をその Cartan 部分代数とする。双対空間とのペアリングを $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_{\text{af}} \times \mathfrak{h}_{\text{af}}^* \rightarrow \mathbb{C}$ とかく。 $\{\alpha_i\}_{i \in I_{\text{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\text{af}}^*$, $\{\alpha_i^\vee\}_{i \in I_{\text{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\text{af}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の単純ルートと単純コルートとする。単純ルート, 単純コルートの番号のつけ方は, $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ が $A_{2\ell}^{(2)}$ 型の場合以外は Kac の教科書 [4] に従い, $A_{2\ell}^{(2)}$ 型の場合は反対にする。すなわち,



のようにする。この番号と添え字集合 I_{af} と同一視し, $I_{\text{af}} = \{0, 1, \dots, \ell\}$ とかく。 $K := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_{\text{af}}$ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の中心元, $\delta := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i \alpha_i \in \mathfrak{h}_{\text{af}}^*$ を null ルートとする。ここで, $a_i, a_i^\vee$ はそれぞれ Kac ラベル, 双対 Kac ラベルである。 $\Lambda_i \in \mathfrak{h}_{\text{af}}^* (i \in I_{\text{af}})$

を基本ウェイト, $P_{\text{af}} := \bigoplus_{i \in I_{\text{af}}} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$ をウェイト格子とする. $\lambda \in P_{\text{af}}$ に対して, 値 $\langle K, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ を λ のレベルという. $W_{\text{af}} := \langle s_i \mid i \in I_{\text{af}} \rangle \subset \text{GL}(\mathfrak{h}_{\text{af}}^*)$ をアフィン Weyl 群とする. ここで, s_i は α_i に対応する単純鏡映である. $\mathfrak{h}_{\text{af}}^*$ 上の非退化対称双線型形式 $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{h}_{\text{af}}^* \times \mathfrak{h}_{\text{af}}^* \rightarrow \mathbb{C}$ を W_{af} 不変であって, 条件

$$\langle K, \lambda \rangle = (\delta, \lambda) \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{af}}^*)$$

によって一意的に特徴づけられるものとする.

q を $\mathbb{C}$ 上の不定元とする. $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ に関する量子包絡環 (量子アフィン代数) とし, $e_i, f_i \in U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ ($i \in I_{\text{af}}$) を Chevalley 生成元とする.

定義 1.1 (Extremal ウェイトベクトル). M を可積分 $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 加群, $\lambda \in P_{\text{af}}$ とする.

ウェイト λ のウェイトベクトル $v \in M_\lambda$ が *extremal* であるとは, M の元の族 $\{v_x\}_{x \in W_{\text{af}}}$ が存在して次が満たされることである:

1. $v_e = v$,
2. $\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle \geq 0$ ならば $e_i v_x = 0$ かつ $f_i^{\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle} v_x = v_{s_i x}$,
3. $\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle \leq 0$ ならば $f_i v_x = 0$ かつ $e_i^{\langle -\alpha_i^\vee, x\lambda \rangle} v_x = v_{s_i x}$.

ただし,

$$\begin{aligned} q_i &:= q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}}, \\ e_i^{(k)} &:= \frac{e_i^k}{[k]_i!}, \quad f_i^{(k)} := \frac{f_i^k}{[k]_i!}, \\ [k]_i &:= \frac{q_i^k - q_i^{-k}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [k]_i! := [1]_i [2]_i \cdots [k]_i. \end{aligned}$$

である.

定理 1.2 (Extremal ウェイト加群 [5]). $\lambda \in P_{\text{af}}$ とする.

1. ウェイト λ の extremal ウェイトベクトル v_λ から生成される可積分 $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 加群 $V(\lambda)$ であって次の普遍性を持つものが存在する: 任意の可積分 $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 加群 M とウェイト λ の extremal ウェイトベクトル $v \in M$ に対して, $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 加群の準同型 $V(\lambda) \rightarrow M$ であって v_λ を v に写すものが存在する. $V(\lambda)$ を extremal ウェイト λ の extremal ウェイト加群という.
2. $V(\lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ をもつ.

注意 1.3. [5] では extremal ウェイト加群は量子アフィン代数に限らず対称化可能 Kac–Moody 代数の量子包絡環上に定義されている。

事実 1.4. (量子アフィン代数の場合に戻って) extremal ウェイト λ が正 (負) のレベルをもつとき, $V(\lambda)$ は既約最高ウェイト加群 (既約最低ウェイト加群) と同型である。

この事実から, レベル・ゼロの場合が問題になる。

$i \in I := I_{\text{af}} \setminus \{0\}$ に対して, レベル・ゼロ基本ウェイト $\varpi_i \in P_{\text{af}}$ を次で定める:
 $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ が $A_{2\ell}^{(2)}$ 型でない場合は

$$\varpi_i := \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0,$$

$\mathfrak{g}_{\text{af}}$ が $A_{2\ell}^{(2)}$ 型の場合は

$$\begin{aligned} \varpi_i &:= \Lambda_i - \Lambda_0 \quad (i \neq \ell), \\ \varpi_\ell &:= 2\Lambda_\ell - \Lambda_0. \end{aligned}$$

実際に, $\langle K, \varpi_i \rangle = 0$ である。

命題 1.5 ([5]). $\lambda \in P_{\text{af}}$, $x \in W_{\text{af}}$ とする. $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 加群としての同型 $V(x\lambda) \cong V(\lambda)$ がなりたつ。

命題 1.6. $\lambda \in P_{\text{af}}$ がレベル・ゼロであるとする. W_{af} による軌道集合 $W_{\text{af}}\lambda$ には

$$\sum_{i \in I} m_i \varpi_i + k\delta \quad (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

の形をした元が存在する。

これらの事実から, レベル・ゼロ extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ の研究は λ が (1.1) の形になる場合に限って行えば十分である。さらに, ここで $k = 0$ としてもよいので, 次の集合

$$P_+^0 := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$$

の元 λ に対する $V(\lambda), \mathcal{B}(\lambda)$ のみを考える. P_+^0 の元をレベル・ゼロ支配的整ウェイトという。

先行研究を紹介する. 石井, 内藤, 佐垣らは $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ が untwisted 型の場合に, 半無限 LS パスを導入し, 次のことを示した。

定理 1.7 ([3]). $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ を untwisted 型, $\lambda \in P_+^0$ とする. 半無限 LS パスの集合 $\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)$ は $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ とクリスタルとして同型である。

また, twisted 型の中でも $A_{2\ell}^{(2)}$ 型については野本 [6] が同様の結果を証明している. 我々の目的は, $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ が一般の twisted 型である場合に半無限 LS パスを構成し, $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ とクリスタルとして同型であることを示すことである.

2 Twisted 型の半無限 LS パス

Twisted 型の半無限 LS パスを定義し, 主結果を述べる. 以下, $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ は twisted 型であるとする. W_{af} の部分群 $W := \langle s_i \mid i \in I \rangle$ を考え, $Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ をルート格子とする. Twisted 型においては, 次の群同型がなりたつ^{*1}:

$$W_{\text{af}} \cong W \ltimes Q.$$

Δ_{af}^+ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の正実ルートの集合とし, $\Delta^+ = \Delta_{\text{af}}^+ \cap Q$ とおく.

定義 2.1. W_{af} 上の半無限長さ関数 $\ell^{\frac{\infty}{2}} : W_{\text{af}} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $x = wt_{\xi} \in W_{\text{af}}$ ($w \in W, \xi \in Q$) に対して

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2\langle \rho^{\vee}, \xi \rangle$$

とすることで定める. ここで, $\ell(w)$ は $w \in W$ の通常の意味での長さ, $\rho^{\vee} := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha^{\vee}$ である.

$\beta \in \Delta_{\text{af}}^+$ に対し, $s_{\beta} \in W_{\text{af}}$ を β に関する鏡映とする.

定義 2.2 (半無限 Bruhat グラフ). Δ_{af}^+ でラベル付けられた有向グラフ ${}^{\infty}\text{BG}$ を次で定める:

頂点集合: W_{af} ,

有向辺: $x, y \in W_{\text{af}}, \beta \in \Delta_{\text{af}}^+$ に対して, $x \xrightarrow{\beta} y$ in ${}^{\infty}\text{BG}$ であるとは $y = s_{\beta}x$ かつ $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ がなりたつことである.

定義 2.3 (半無限 Bruhat 順序). W_{af} 上の関係 $\leq_{\frac{\infty}{2}}$ を次で定める:

$x, y \in W_{\text{af}}$ に対して, $x \leq_{\frac{\infty}{2}} y$ であるとは ${}^{\infty}\text{BG}$ において x から y への有向道

$$x = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} y_k = y$$

が存在することである (これは半順序である).

^{*1} [6] では $A_{2\ell}^{(2)}$ 型の W_{af} に対して $W_{\text{af}} \cong W \ltimes Q^{\vee}$ としている. これは $0 \in I_{\text{af}}$ を [4] と同じようにとっているからである. 我々は全ての twisted 型について $W_{\text{af}} \cong W \ltimes Q$ を成立させるために, 先述した $0 \in I_{\text{af}}$ のとり方を採用した.

これで、半無限 LS パスの定義を述べる事が出来る。ただし、簡単のためここでは $\lambda \in P_+^0$ が regular, すなわち $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle > 0 (i \in I)$ である場合にのみ述べる。

定義 2.4 (半無限 LS パス). $\lambda \in P_+^0$ を regular とする. W_{af} の元の $<_{\infty/2}$ に関する減少列と有理数の増大列の組 $(x_1 >_{\infty/2} \cdots >_{\infty/2} x_s; 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1)$ が形 λ の半無限 LS パスであるとは次がなりたつことである:

各 $1 \leq m \leq s-1$ に対して, $\infty/2\text{BG}$ における x_{m+1} から x_m への有向道

$$x_{m+1} = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_k} y_k = x_m$$

が存在して各 $1 \leq n \leq k$ に対して

$$a_m \langle \beta_n^\vee, y_{n-1} \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$$

をみtas. 形 λ の半無限 LS パス全体の集合を $\infty/2\text{LS}(\lambda)$ とかく。

注意 2.5. 一般の $\lambda \in P_+^0$, 特に regular でないものに対して半無限 LS パスを定義するには, Peterson's coset representatives を用いて半無限 Bruhat グラフを定義し, それを用いる。

3 Twisted 型における $\infty/2\text{LS}(\lambda)$ の結晶構造と同型定理

次が主結果である。一般の (特に regular でない) $\lambda \in P_+^0$ に対して成立することを注意しておく。

定理 3.1 ([1]). $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ を twisted 型, $\lambda \in P_+^0$ とする。

1. $\infty/2\text{LS}(\lambda)$ は結晶構造をもつ。
2. $\infty/2\text{LS}(\lambda)$ は $V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ とクリスタルとして同型である。

証明の概略をそれぞれ簡単に説明する。いずれも untwisted 型での議論を twisted 型で再現することを方針としている。

まず、結晶構造について簡単に説明する。twisted 型の $\infty/2\text{LS}(\lambda)$ に結晶構造を定める上では、 $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ に対する半無限 Bruhat グラフが、ある untwisted 型に対する半無限 Bruhat グラフと同型であることを示すことが鍵である。これにより diamond lemma などの [3] で示された結果が twisted 型において再現され、ルート作用素が定まり、結晶構造が与えられる。これ以上の詳細は記号が煩雑になるので、論文に譲ることにする。

同型定理の証明について説明する． $u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ を $V(\lambda)$ の生成元に対応する元とし， $\mathcal{B}(\lambda)^\circ$ を u_λ を含む $\mathcal{B}(\lambda)$ の連結成分とする．また $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P_+^0$ に対して集合

$$\text{Par}(\lambda) := \{(\rho^{(i)})_{i \in I} \mid \rho^{(i)} = (\rho_1^{(i)} \geq \cdots \geq \rho_{m_i-1}^{(i)} \geq 0) \text{ は長さ } m_i \text{ 未満の分割 } (i \in I)\}$$

を考える．ただし， $m_i = 0$ のときは $\rho^{(i)} = \emptyset$ とする．これは次で結晶の構造を持っていると考えられる： $(\rho^{(i)})_{i \in I} \in \text{Par}(\lambda)$ に対して，

$$\begin{aligned} \text{wt}((\rho^{(i)})_{i \in I}) &:= - \sum_{i \in I} |\rho^{(i)}| \delta, \\ e_j((\rho^{(i)})_{i \in I}) &= f_j((\rho^{(i)})_{i \in I}) := \mathbf{0} \quad (j \in I_{\text{af}}), \\ \varepsilon_j((\rho^{(i)})_{i \in I}) &= \varphi_j((\rho^{(i)})_{i \in I}) := -\infty \quad (j \in I_{\text{af}}). \end{aligned}$$

Beck–中島の結果から，次のことが知られている．

定理 3.2 ([2]). $\lambda \in P_0^+$ とする．結晶の同型

$$\mathcal{B}(\lambda) \cong \text{Par}(\lambda) \otimes \mathcal{B}(\lambda)^\circ$$

がなりたつ．

この定理の意味は， $\mathcal{B}(\lambda)$ の連結成分は $\mathcal{B}(\lambda)^\circ$ のコピーの族であり，その族は $\text{Par}(\lambda)$ によってパラメトライズされる，ということである．

$\eta_e := (e; 0, 1) \in \frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)$ とおき， $\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)^\circ$ を η_e を含む $\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)$ の連結成分とする．同型定理を証明するためには次の二つが分かればよい．

定理 3.3. $\lambda \in P_+^0$ とする．結晶の同型

$$\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)^\circ \cong \mathcal{B}(\lambda)^\circ$$

がなりたつ．

定理 3.4. $\lambda \in P_+^0$ とする．結晶の同型

$$\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda) \cong \text{Par}(\lambda) \otimes \frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)^\circ$$

がなりたつ．

定理 3.3 は untwisted 型の場合と全く平行に証明できるので, 注意すべきは定理 3.4 である. これもまた, $\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)$ の連結成分に関する問題であり, 分析する上では次の補題が重要である. 簡単のため主張を λ が regular である場合に限って述べる.

補題 3.5. $\lambda \in P_+^0$ を regular とする. $\frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda)$ の各連結成分は次の形の半無限 LS パスを唯一つ含んでいる:

$$\eta = (t_{\xi_1}, \dots, t_{\xi_{s-1}}, e; a_0, a_1, \dots, a_s) \in \frac{\infty}{2}\text{LS}(\lambda).$$

ここで, $\xi_1, \dots, \xi_{s-1} \in Q$ である.

半無限 LS パスの定義から, これを示すには, $\frac{\infty}{2}\text{BG}$ において translation 元から別の translation 元への有理数に関する条件を満たす有向道が存在する条件を調べる必要がある. Twisted 型においては, 正実ルートの形の違いから untwisted 型の議論をそのまま適用することができない. しかし, 型毎に場合分けして証明することによって補題が証明され, 結果的に [3] と同じ議論に帰着されることが分かる.

謝辞

講演の機会および本稿の執筆機会を与えてくださった 2026 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「表現論とその周辺分野の交流」の主催者である小林雅人氏, ならびに京都大学数理解析研究所に心より感謝申し上げます.

参考文献

- [1] S. Adachi and H. Koike. Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri paths and level-zero extremal weight modules over twisted quantum affine algebras, 2026. arXiv:2601.13016.
- [2] J. Beck and H. Nakajima. Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 123(2):335–402, 2004.
- [3] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki. Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras. *Adv. Math.*, 290:967–1009, 2016.
- [4] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

- [5] M. Kashiwara. Crystal bases of modified quantized enveloping algebra. *Duke Math. J.*, 73(2):383–413, 1994.
- [6] F. Nomoto. Quantum Lakshmibai–Seshadri paths and the specialization of Macdonald polynomials at $t = 0$ in type $A_{2n}^{(2)}$, 2016. arXiv:1606.01067.