

幾何学的ラングランズ同値とは何か？

鈴木 健太 (Kenta Suzuki)

2026 年 7 月 2 日

概要

現在、日本語で書かれた幾何学的ラングランズ予想の文献が少ないので、本講義録は幾何学的ラングランズの概要の解説を主な目的とする。ここでは、古典的な保形形式の理論を関数体上で発展させると幾何学的ラングランズが自然に出てくることを説明する。保形形式の理論で現れる商 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ の幾何学的な類似は代数曲線 X と簡約群 G に対して定義される X 上の主 G 束のモジュライ空間 $\mathrm{Bun}_G(X)$ であって、幾何学的ラングランズの基本的目標はこの空間上の層を理解することである。幾何学的ラングランズでは関数から層、層から圏と二段階の抽象化を経て得られるものだが、このより抽象的な定式化が様々な分野への応用を生み出している。

1 はじめに

ラングランズ予想は数論における予想で、古典的には保形形式とガロア表現の対応を予想する。谷山・志村予想、またワイルズによるフェルマーの最終定理の証明への応用が特に有名であろう。数論では代数体 ($\mathbb{Q}$ の有限次拡大) と関数体 (有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の有限生成で超越次元 1 の拡大体) の類似がよく知られており、ラングランズ対応の関数体類似として幾何学的ラングランズが提唱された。この関数体類似は層の言葉で書き換えられ、現在では圏論的に定式化されている。

幾何学的ラングランズ予想は各層の理論 (ℓ -進層、D-加群、位相的) を決めるごとに決まるが、標数 0 の体に関しては全ての層の理論において D. Arinkin, D. Beraldo, J. Campbell, L. Chen, J. Faergeman, D. Gaitsgory, K. Lin, S. Raskin, N. Rozenblyum の 9 人によって最近証明された [GR25b, ABC⁺24a, CCF⁺24, ABC⁺24b, GR25c]。また、標数 p 上の ℓ -進層に関しては、D-加群での証明を介して [GR25a] で予想の一方 (保形側からガロア側) が証明されている。

また、現在では幾何学的ラングランズの発展から着想を得て、数論的ラングランズも同様に圏論的な主張に拡張する研究が進んでいる。この方向では Fargues と Scholze [FS24] や Xinwen Zhu [Zhu23, Zhu25] の論文を見ていただきたい。物理の方面においても、Gaiotto と Witten によって超弦理論などとも関連していることが発見されている [GW24]。(不分岐な) 幾何学的ラングランズが証明された今、(分岐のある) 幾何学的ラングランズ同値への拡張、他の分野への繋がりなどで今は幾何学的ラングランズを研究するのに非常に楽しい時期である。

本稿の構成は以下の通りである。§2 では数論的なラングランズ、つまり保形形式とガロア表現の関係を手短かに説明する。§3 で X 上の主 G 束のモジュライ空間 $\mathrm{Bun}_G(X)$ を導入し、幾何学的ラングランズでの基本的な事項のヘッケ関手や Whittaker 係数が保形形式の理論との類似で自然に出てくることを説明する。また、§4 では幾何学的ラングランズをさらに圏論的に定式化する。最後に §5 ではこの圏論的な定式化から $\mathrm{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q)$ 上の関数の主張を導出する。英語の幾何学的ラングランズへの紹介としては、[Fre05] を見ていただきたい。

1.1 謝辞

本講究録の内容の大部分は、Sam Raskin 先生のご指導のもとで学んだものである。また、本稿の執筆にあたっては、京都大学数理解析研究所 (RIMS) からご支援いただいた。ここに深く感謝申し上げる。

2 数論的なラングランズ予想

ここでは幾何学的ラングランズへのモチベーションとしてのみ数論的なラングランズの話をするので、不正確なことも多いが読者に雰囲気だけ掴んで頂きたい。正確な主張に関しては、[DS74, FM95] などを見ていただきたい。

2.1 保形形式とガロア表現

保形形式とは、上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ 上の正則関数で、非常に対称的なものである。具体的には、離散群 $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathbb{H}$ にメビウス変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.1)$$

を通して作用し、この作用で不変な関数のことを指す。つまり、任意の $g \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $z \in \mathbb{H}$ に対して $f(g \cdot z) = f(z)$ となる関数のことだ。^{*1}言い換えると $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ 上の正則関数のことだ。

このような関数の空間にヘッケ作用素と呼ばれる作用素が定義される。詳しくは [Kob93, §III.5] を読んでいただきたい。任意の素数 p に対して、ヘッケ作用素 T_p を以下の式で定義する。

$$T_p f(z) := f\left(\frac{z}{p}\right) + \sum_{i=0}^{p-1} f(pz + i). \quad (2.2)$$

すると、 $f(z)$ が保形形式なら $T_p f(z)$ も保形形式になる。この定義式は一見謎に見えるが、次のようにより見通しがよく書き直せる。 $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群

$$\begin{aligned} \Gamma_0^+(p) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{p} \right\} \\ \Gamma_0^-(p) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : b \equiv 0 \pmod{p} \right\} \end{aligned}$$

を考える。このとき、ヘッケ対応と呼ばれる次の対応を考える

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_0^+(p) \backslash \mathbb{H} & \xrightarrow{p} \Gamma_0^-(p) \backslash \mathbb{H} \\ & \swarrow c_1 & \searrow c_2 \\ \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} & & \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}. \end{array} \quad (2.3)$$

ここで、左の射は部分群 $\Gamma_0^+(p) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対応、右の射は部分群 $\Gamma_0^-(p) \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対応し、真ん中の射は $z \mapsto pz$ で定義される。この対応を使うと (2.2) は次のように書き換えられる

$$T_p f(z) = \sum_{\substack{y \in \Gamma_0^-(p) \backslash \mathbb{H} \\ c_2(py) = z}} f(c_1 y). \quad (2.4)$$

^{*1} より一般に、重さ k やより高いレベルの保形形式を考える必要があるが、モチベーションの部分なので省略する。

保形形式でヘッケ作用素の固有ベクトルになるものをヘッケ固有形式と呼ぶ。 $f(z)$ がヘッケ固有形式なら任意の素数 p に関してある複素数 λ_p が存在して

$$T_p f(z) = \lambda_p \cdot f(z) \quad (2.5)$$

となる。この保形形式 $f(z)$ がガロア表現 $\rho_f: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ に対応するとはフロベニウス元 $\text{Frob}_p \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ のトレースとヘッケ固有値の間に以下の関係があることを指す。

$$\lambda_p = \text{tr}(\rho_f(\text{Frob}_p)). \quad (2.6)$$

数論的ラングランズ予想は任意の保形形式 $f(z)$ に対して対応するガロア表現 ρ_f が存在することを予想する。

ここで、あるヘッケ固有値を持つ保形形式はスカラー倍を除いて一意に決まる。このスカラー倍を決めるために以下のように正規化する。 $f(z)$ は $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変なので特に $f(z+1) = f(z)$ となる。つまり、 $q = e^{2\pi iz}$ とするとフーリエ級数

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n$$

を持つ。カスプ形式と呼ばれる $a_0(f) = 0$ を満たす保形形式 f に焦点を絞る。このとき

$$a_1(f) = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi iz} dz \quad (2.7)$$

が 1 になることで正規化する。そして、正規化されたヘッケ固有形式はガロア表現と対応することが予想される。

2.2 アデルを使った定式化

幾何学的ラングランズに移る前に、保形形式をアデルの言葉で書き換える。Ostrowski の定理により有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備化は実数体 $\mathbb{R}$ と各素数 p に対して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ がある。アデル環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{R} \times \prod'_p (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ は全ての完備化の情報を持つものである。ここで制限積 $\prod'_p (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p) = (\prod_p \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は元 $(a_p) \in \prod_p \mathbb{Q}_p$ はほとんど^{*2}の素数 p に対して $a_p \in \mathbb{Z}_p$ となるものの集合である。

上半平面には (2.1) を通して $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ が $\mathbb{H}$ に推移的に作用し、 $i \in \mathbb{H}$ の固定群は $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ である。よって、上で現れた商 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ は

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (2.8)$$

と書き換えられる。また (2.8) はアデル代数群の商

$$\text{SL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / (\text{SO}_2(\mathbb{R}) \times \prod_p \text{SL}_2(\mathbb{Z}_p))$$

と一致する。より一般の $\mathbb{Q}$ 上の (分裂) 簡約群 G に関しては、 $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 K を固定し

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / (K \times \prod_p G(\mathbb{Z}_p)) \quad (2.9)$$

上の関数を考える。ラングランズ予想は、このような関数がガロア表現 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \check{G}(\mathbb{C})$ と関係することを予想する。ここで、 $\check{G}$ は G のラングランズ双対群である。

*2 つまり、有限個の素数を除いて。

注意 2.1. ラングランズ双対群 $\check{G}$ とは簡約群 G に対して定義される明示的な組み合わせ論によって定義される新しい簡約群である。例えば、

$$\mathrm{GL}_n^\vee = \mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n^\vee = \mathrm{PGL}_n, \mathrm{SO}_{2n}^\vee = \mathrm{SO}_{2n}, \mathrm{SO}_{2n+1}^\vee = \mathrm{Sp}_{2n}, G_2^\vee = G_2, \dots$$

3 幾何学的ラングランズとは

数論的ラングランズの関数体類似を考える上で、まず (2.9) の類似を考えよう。 X を $k = \mathbb{F}_q$ 上の (幾何学的に) 連結で滑らかな射影曲線、 G を k 上の分裂簡約群とする。また、 $\mathrm{Bun}_G(X)$ を X 上の主 G 束のモジュライ空間 (スタック) とする。例えば $G = \mathrm{GL}_n$ のときは $\mathrm{Bun}_G(X)$ は X 上のランク n ベクトル束のモジュライ空間である。

例えば $X = \mathbb{P}^1$ のとき Beauville と Laszlo による $\mathrm{Bun}_G(X)$ の表示がある [BL95]。 X 上の主 G 束は $\mathbb{A}^1$ 上の主 G 束 $\mathcal{P}$ と $\infty \in \mathbb{P}^1$ の形式的近傍 $D_\infty = \mathrm{Spec}(k[[t^{-1}]])$ 上の主 G 束 $\mathcal{P}'$ と $D_\infty^\times = \mathrm{Spec}(k((t^{-1})))$ 上の同型 $\mathcal{P}|_{D_\infty^\times} \simeq \mathcal{P}'|_{D_\infty^\times}$ 。また $\mathbb{A}^1$ 上の主 G 束と D_∞ 上の主 G 束は必ず自明なので、 $D_\infty^\times$ 上の同型により決まる。このような同型は $G(k((t^{-1})))$ の元で与えられ、 $\mathcal{P}$ の自明化を変えると $G(k[t])$ 、 $\mathcal{P}'$ の自明化を変えると $G(k[[t^{-1}]])$ で変わるの

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{P}^1)(k) \simeq G(k[t]) \backslash G(k((t^{-1}))) / G(k[[t^{-1}]])$$

となる。これは (2.8) の類似である。

一般の曲線 X に関しても似た表示が得られるが、いつかの点 $x_1, \dots, x_n \in X$ の近傍で主 G 束を自明化する必要がある。このような点の選び方によらない表示として、 X の全ての幾何学的な点で自明化する状況を考える。すると、

$$\mathrm{Bun}_G(X)(k) \simeq G(k(X)) \backslash G(\mathbb{A}_{k(X)}) / G(\mathbb{O}_{k(X)})$$

となる。これは (2.9) の類似である。ここで、 $k(X)$ は X の関数体で、

$$\mathbb{O}_{k(X)} = \prod_{x \in X(\bar{k})} \mathcal{O}_x \subset \mathbb{A}_{k(X)} = \prod_{x \in X(\bar{k})}' (\mathcal{K}_x, \mathcal{O}_x).$$

ここで、 $\mathcal{O}_x$ は X の x での完備化で $\mathcal{K}_x$ を $\mathcal{O}_x$ の分数体とする。

数論的ラングランズでは $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / (K \times \prod_p G(\mathbb{Z}_p))$ 上の関数を考えていたので、関数体類似では $\mathrm{Bun}_G(X)(k)$ 上の関数を考えるのが自然であろう。

ここで、ヴェイユ予想の証明にも使われたグロタンディークによる関数と層の対応を思い出そう。グロタンディークは、 k 上の滑らかな代数多様体 Z をとった時に、 $Z(k)$ 上の「自然な」関数は Z 上の ℓ -進層^{*3} $\mathcal{F}$ から

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\dim(Z)} (-1)^i \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_k, H_c^i(Z_{\bar{k}}, \mathcal{F}_x)), \quad x \in Z(k)$$

として得られると提唱する。ここで、 $H_c^i(Z, \mathcal{F}_x)$ はコンパクト台を持つエタール・コホモロジーである。つまり、グロタンディークの思想では $\mathrm{Bun}_G(X)(k)$ 上のヘッケ固有関数を考える代わりに $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上のヘッケ固有層を考えるべきである。このため、ヘッケ作用素を幾何化するヘッケ関手を考えよう。

^{*3} ℓ は k の標数 p と異なる素数。

注意 3.1. ここでは k を正標数として $\text{Bun}_G(X)$ 上の ℓ -進層のことにについて考えたが、他の層の理論を使っても良い。例えば、

1. k を標数 0 として ℓ -進層を考える。
2. k を標数 0 として D-加群を考える。
3. $k = \mathbb{C}$ として $\text{Bun}_G(X)(\mathbb{C})$ の位相空間の意味での層を考える [BZN18]。

(1)、(2)、(3) は Riemann-Hilbert 対応を通して関係付けられる [AGK⁺22, GR25b]。また、(1) と正標数の ℓ -進層とは nearby cycle を使って関係付けられる [GR25a]。

3.1 ガロア表現の類似

ガロア表現 $\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \check{G}(\mathbb{C})$ の幾何学的な類似を考えよう。ここで、ガロア群と基本群の類似を思い出そう。ガロア対応によって体 $\mathbb{Q}$ の拡大体が絶対ガロア群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の (閉) 部分群と対応するように、「良い」連結位相空間 $\mathfrak{X}$ の連結被覆空間は基本群 $\pi_1(\mathfrak{X})$ の部分群と対応する。この類似はエタール基本群の理論で定式化される。

また、 $\pi_1(\mathfrak{X})$ の表現は、モノドロミー表現を通して次の幾何学的な解釈が与えられる。

命題 3.2. $\mathfrak{X}$ を「良い」連結位相空間とする。このとき、 $\pi_1(\mathfrak{X})$ の n 次元表現は $\mathfrak{X}$ 上のランク n の局所系^aと対応する。また、任意の位相群 $\mathcal{G}$ に対しても、 $\pi_1(\mathfrak{X})$ の $\mathcal{G}$ への準同型は $\mathfrak{X}$ 上の $\mathcal{G}$ -局所系^bと対応する。

^a $\mathfrak{X}$ 上の $\mathbb{C}$ -ベクトル空間の層 $\mathcal{F}$ であってある任意の $x \in \mathfrak{X}$ に対してある開近傍 $U \ni x$ が存在して $\mathcal{F}|_U$ が定数層 $\mathbb{C}^n$ と同型になるもの

^b 位相空間 $p: \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ であって $\mathcal{G}$ が $\mathcal{Y}$ に作用し、任意の $\mathfrak{X}$ の点 x に対してある開近傍 $U \ni x$ が存在して、 $p^{-1}(U) \simeq \mathcal{G} \times U$ となるもの。

$\check{G}$ -局所系は様々な層の理論において別の意味を持つ。 ℓ -進層の理論においてはエタール局所系、D-加群の理論においては平坦接続を持つ主 $\check{G}$ -束、位相的層の理論においては位相群 $\check{G}(\mathbb{C})$ に関する位相的な局所系を意味する。

3.2 ヘッケ関手

注意 3.3. ヘッケ関手などを考える上で、層の圏を考えることは不十分である。よって、以下では**全ての圏は導来圏、全ての関手は導来関手**とする。つまり、層ではなく、層の鎖複体を考える。

$\text{Shv}(\text{Bun}_G(X))$ を $\text{Bun}_G(X)$ 上の (ℓ -進、D-加群、または位相的な) 層の (導来) 圏とする。また簡略化のため k を代数閉であると仮定する。

まず、(2.3) の類似のヘッケ対応を作る。まず $x \in X(k)$ を固定して、 $\text{Hecke}_{G,x}$ を X 上の主 G 束 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ と同型 $\varphi: \mathcal{P}|_{X \setminus x} \simeq \mathcal{P}'|_{X \setminus x}$ の組 $(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi)$ のモジュライ空間とする。このモジュライ空間は $\text{Bun}_G(X)$ への二つの射 $h^\leftarrow(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi) = \mathcal{P}$ と $h^\rightarrow(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi) = \mathcal{P}'$ とする。これは対応

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}_{G,x} & \\ h^\leftarrow \swarrow & & \searrow h^\rightarrow \\ \text{Bun}_G(X) & & \text{Bun}_G(X). \end{array} \quad (3.1)$$

を与える。Mirković-Vilonen、Ginzburg、Lusztig による幾何学的佐武同値 [MV07] は関手 $\mathcal{S}: \text{Rep}(\check{G}) \rightarrow$

$\mathrm{Shv}(\mathrm{Hecke}_{G,x})$ を定義する。^{*4}

定義 3.4. $\check{G}$ の表現 V と点 $x \in X(k)$ に対してヘッケ関手 $T_{V,x}: \mathrm{Shv}(\mathrm{Bun}_G(X)) \rightarrow \mathrm{Shv}(\mathrm{Bun}_G(X))$ を

$$T_{V,x}(\mathcal{F}) := h_*^\rightarrow((h^\leftarrow)^\dagger \mathcal{F} \otimes S_V) \quad (3.2)$$

で定義する。

一般の $\check{G}$ の表現 V に対しては S_V (そしてヘッケ関手 $T_{V,x}$) を明示的に書くのは難しい。しかし、以下の状況ではヘッケ関手を明示的に書き下せる。

例 3.5. $G = \mathrm{GL}_n$ の場合 $\check{G} = \mathrm{GL}_n$ の標準的な n 次元表現 std を取り任意の $0 < r < n$ に対して $V = \wedge^r \mathrm{std}$ とする。このとき、 $\mathrm{Hecke}_{\mathrm{GL}_n,x}^r$ をランク n ベクトル束 $\mathcal{E}$ と部分束 $\mathcal{E}(-x) \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ であって、 $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ の長さが r の対 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ を分類するモジュライ空間とする。これは特に $\mathrm{Hecke}_{\mathrm{GL}_n,x}$ の部分空間になっていて、佐武層 S_V はこの部分空間上の定数層になる。つまり、 $h^\leftarrow(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \mathcal{E}$ と $h^\rightarrow(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \mathcal{E}'$ で対応

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hecke}_{\mathrm{GL}_n,x}^r & \\ h^\leftarrow \swarrow & & \searrow h^\rightarrow \\ \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}(X) & & \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}(X) \end{array}$$

が作られ、

$$T_{V,x}(\mathcal{F}) = h_*^\rightarrow(h^\leftarrow)^\dagger \mathcal{F}[-r(n-r)].$$

ここで、 $[-r(n-r)]$ はコホモロジーの次数を $-r(n-r)$ だけずらす。一般の群 G に関しては V が minuscule 表現のとき似た公式が存在する。

ヘッケ固有ベクトルの条件 (2.5) はどう幾何学に翻訳されるべきであろうか？ここで、有限次元ベクトル空間 V と W があって、 V の自己準同型 A と W の自己準同型 B があれば、

$$\mathrm{tr}(A \otimes B; V \otimes W) = \mathrm{tr}(A; V) \cdot \mathrm{tr}(B; W)$$

であることを思い出そう。つまり、グロタンディークの思想では、掛け算はテンソル積に置き換えられるべきであろう。なので、あるベクトル空間 (?) を使って

$$T_{V,x}(\mathcal{F}) \simeq (?) \otimes \mathcal{F}$$

となるもののことであろう。このベクトル空間 (?) は (2.6) のように $\check{G}$ -局所系の言葉で書けるはずである。つまり、以下の定義を考える。

定義 3.6. σ を $\check{G}$ -局所系とする。このとき、 $\mathcal{F} \in \mathrm{Shv}(\mathrm{Bun}_G(X))$ が固有値 σ を持つ ヘッケ固有層 であるとは、任意の $x \in X(k)$ と $\check{G}$ の表現 V に関して「整合的」な同型

$$T_{V,x}(\mathcal{F}) \simeq (V_\sigma)_x \otimes \mathcal{F} \quad (3.3)$$

があることである。ここで、 $\check{G}$ -局所系 σ と $\check{G}$ の表現 V があれば V_σ は $\check{G}$ 上のベクトル空間の局所系にな

^{*4} 通常の幾何学的佐武同値は局所的なヘッケスタック $\mathrm{Hecke}_{G,x}$ を使う。これは、 x の形式的近傍 D_x 上の主 G 束 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ と同型 $\varphi: \mathcal{P}|_{D_x^\times} \simeq \mathcal{P}'|_{D_x^\times}$ の組 $(\mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi)$ のモジュライ空間である。このとき、 $\mathrm{Rep}(\check{G})$ は $\mathrm{Hecke}_{G,x}$ 上の偏屈層の圏と同値になる。

り、一点 $x \in X$ での茎 $(V_\sigma)_x$ はベクトル空間になる。

3.3 「整合的」とは？

ここでは定義 3.6 で同型 $\iota_{V,x}: T_{V,x}(\mathcal{F}) \simeq (V_\sigma)_x \otimes \mathcal{F}$ が「整合的」であるとはどういう意味か説明しよう。例えば、 $\check{G}$ の表現 V と W があるとき、幾何学的佐武同値がモノイダルであることから $T_{V \otimes W, x} \simeq T_{V,x} \circ T_{W,x}$ がわかる。このとき、次の図式が可換であるべきであろう。

$$\begin{array}{ccc} T_{V \otimes W, x}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\iota_{V \otimes W, x}} & ((V \otimes W)_\sigma)_x \otimes \mathcal{F} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ T_{V,x}(T_{W,x}(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\iota_{W,x}} (W_\sigma)_x \otimes T_{V,x}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_{V,x}} (V_\sigma)_x \otimes (W_\sigma)_x \otimes \mathcal{F} \end{array}$$

が一致して欲しい。また異なる 2 点 $x, y \in X(k)$ が与えられるとき、 $T_{V,x}$ は「 x でだけ」層を変えていて、 $T_{W,y}$ は「 y でだけ」層を変えているので、作用は可換で、自然な同型 $T_{V,x} \circ T_{W,y} \simeq T_{W,y} \circ T_{V,x}$ が存在する。そして、次の図式が可換であるべきであろう。

$$\begin{array}{ccc} T_{V,x} \circ T_{W,y}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\iota_{W,y}} (W_\sigma)_y \otimes T_{V,x}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_{V,x}} (W_\sigma)_y \otimes (V_\sigma)_x \otimes \mathcal{F} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ T_{W,y} \circ T_{V,x}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\iota_{V,x}} (V_\sigma)_x \otimes T_{W,y}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota_{W,y}} (V_\sigma)_x \otimes (W_\sigma)_y \otimes \mathcal{F} \end{array}$$

また、幾何学的な設定においては、 $X(k)$ の点 x を「動かす」ことができる。これは、素数 p を動かすことができない数論的ラングランズと比べて幾何学ラングランズが持つアドバンテージである。(3.1) を対応

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hecke}_G & \\ h^{\leftarrow} \swarrow & & \searrow h^{\rightarrow} \\ \text{Bun}_G(X) & & X \times \text{Bun}_G(X) \end{array} \quad (3.4)$$

に置き換える。ここで、 Hecke_G は X の点 x 、 X 上の主 G 束 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ と同型 $\varphi: \mathcal{P}|_{X \setminus x} \simeq \mathcal{P}'|_{X \setminus x}$ の組 $(x, \mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi)$ のモジュライ空間である。そして、 $h^{\leftarrow}(x, \mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi) := \mathcal{P}$ と $h^{\rightarrow}(x, \mathcal{P}, \mathcal{P}', \varphi) := (x, \mathcal{P}')$ とする。すると、幾何学的佐武同値は各 $\check{G}$ の表現 V に対して Hecke_G 上の層 $\mathcal{S}_V$ を定義する。そして、(3.2) は次のヘッケ関手 $T_V: \text{Shv}(\text{Bun}_G(X)) \rightarrow \text{Shv}(X \times \text{Bun}_G(X))$ にアップグレードしよう

$$T_V(\mathcal{F}) := h_*^{\rightarrow}((h^{\leftarrow})^! \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}_V).$$

この層 $T_V(\mathcal{F})$ の $x \in X$ での茎が前のヘッケ関手 $T_{V,x}(\mathcal{F})$ になる。そして、(3.3) を次の公式に置き換えよう

$$T_V(\mathcal{F}) \simeq V_\sigma \boxtimes \mathcal{F}.$$

この同型は、(3.3) で $x \in X(k)$ を動かすと同型も連続的に動く、ということを言っている。

注意 3.7. これら全ての同型を明示的に書き下すこともできるが、圏論の言葉で書き直すと見通しが良くなる。Ran 空間 $\text{Ran}(X)$ を X の (空でない) 有限部分集合を分類するモジュライ空間とする。つまり、有限集合 I をわたる余極限 $\text{colim}_I X^I$ のことである。また、 $\text{Rep}(\check{G})_{\text{Ran}(X)}$ を圏の余極限 $\text{colim}_I \text{Shv}(X^I) \otimes \text{Rep}(\check{G}^I)$ とする。これは直感的には、 $\text{Ran}(X)$ 上の圏で、 $\text{Ran}(X)$ の点 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ の各点 x_i の上に $\check{G}$ の表現 V_i が乗っている。すると、ヘッケ作用は $\text{Rep}(\check{G})_{\text{Ran}(X)}$ の $\text{Shv}(\text{Bun}_G(X))$ への作用になる。また、 $\check{G}$ -局所系 σ は関手 $\text{ev}_\sigma: \text{Rep}(\check{G})_{\text{Ran}(X)} \rightarrow \text{Vect}$ を定義し、 $\mathcal{F}$ が固有値 σ のヘッケ固有層であるとは $\text{Rep}(\check{G})_{\text{Ran}(X)}$

の $\mathcal{F} \in \text{Shv}(\text{Bun}_G(X))$ への作用が ev_σ で得られることである。

3.4 Whittaker 係数

次に、保形形式の正規化に使われたフーリエ係数 (2.7) の類似を考えよう。 G のボレル部分群 B とそのべき単根基 N を取る。また、 2ρ を全ての正のルートの和とする。また、 X 上の微分形式の線束 ω_X の平方根 $\omega_X^{1/2}$ を一つ固定しよう (X のスピンの構造と呼ばれる)。すると、 $\rho(\omega_X) := 2\rho(\omega_X^{1/2})$ は主 T -束となる。また、

$$\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)} := \text{Bun}_B \times_{\text{Bun}_T} \{\rho(\omega_X)\}$$

と置く。

例 3.8. 例えば $G = \text{SL}_2$ の場合、 $\text{Bun}_{\mathbb{G}_a,\omega_X}$ はランク 2 ベクトル束 $\mathcal{E}$ で短完全系列

$$0 \rightarrow \omega_X^{1/2} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \omega_X^{-1/2} \rightarrow 0$$

に入るものを分類するモジュライ空間である。このような短完全系列はコホモロジー群 $H^1(X, \omega_X) \simeq k$ によって分類される。よって、ナイーブには $\text{Bun}_{\mathbb{G}_a,\omega_X} \simeq \mathbb{A}_k^1$ となるはずである。しかし、スタックとしてはもう少し構造があり、

$$\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)} \simeq R\Gamma(X, \omega_X)[1] \simeq H^1(X, \omega_X) \times \mathbb{B}H^0(X, \omega_X) \quad (3.5)$$

となる。つまり、任意の $\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)}$ の点は $H^0(X, \omega_X)$ の自己同型群を持つ。

例 3.9. より一般的に、 $G = \text{SL}_n$ の場合、 $\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)}$ はランク n ベクトル束 $\mathcal{E}$ で旗

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{n-1} \subsetneq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$$

と同型 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1} \simeq \omega_X^{(n+1)/2-i}$ を持つもののモジュライ空間である。

$G = \text{SL}_2$ の場合、対応

$$\text{Bun}_G \xleftarrow{p_N} \text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)} \xrightarrow{\psi} H^1(X, \omega_X) = \mathbb{A}_k^1$$

を考える。ここで ψ は (3.5) の第一因子への射影である。 $\mathbb{A}_k^1$ には Artin-Schreier のエタール被覆 $x^q - x: \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ を使って定義される Artin-Schreier 層 AS がある (D-加群の場合には微分方程式 $\frac{df}{dx} = f$ に対応する $\mathbb{A}_k^1$ 上の D-加群 $\exp$ を考える)。すると、 $\mathcal{F} \in \text{Shv}(\text{Bun}_G)$ の Whittaker 係数を

$$\text{coeff}_!(\mathcal{F}) := R\Gamma_c(\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X)}, p_N^! \mathcal{F} \otimes \psi^* \text{AS}) \quad (3.6)$$

で定義する。ここで、 $R\Gamma_c$ はコンパクト台のド・ラーム・コホモロジーである。これは、コホモロジーを積分の類似、AS を $e^{2\pi iz}$ の類似と思うと (2.7) の類似になっている。

これは一般の簡約群 G へ次のように一般化される。まず、 N のアーベル化 $N/[N, N]$ は単純ルートを使得 $\prod_{i \in I} \mathbb{G}_a$ と同型になる (I は単純ルートの集合)。これを足し合わせることによって準同型

$$N \rightarrow N/[N, N] \simeq \prod_{i \in I} \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sum_{i \in I}} \mathbb{G}_a$$

を誘導する。これは射 $\text{Bun}_{N,\rho(\omega_X^{1/2})} \rightarrow \text{Bun}_{\mathbb{G}_a,\omega_X}$ を誘導し、さらに上と同様に射

$$\psi: \text{Bun}_{N,\rho(\omega_X^{1/2})} \rightarrow \text{Bun}_{\mathbb{G}_a,\omega_X} \rightarrow \mathbb{G}_a$$

を誘導する。ここでまた (3.6) と同じ公式で関手 $\text{coeff}_! : \text{Shv}(\text{Bun}_G) \rightarrow \text{Vect}$ を誘導する。^{*5}

定義 3.10. ヘッケ固有層 $\mathcal{F} \in \text{Shv}(\text{Bun}_G)$ の Whittaker 正規化 とは同型

$$\text{coeff}_!(\mathcal{F}) \simeq k$$

のことである。

3.5 幾何学的ラングランズ予想

ついに、幾何学的ラングランズ予想を定式化できる。

予想 3.11. 任意の既約な $\check{G}$ -局所系 σ に対して、固有値 σ のヘッケ固有層 $\mathcal{F}_\sigma \in \text{Shv}(\text{Bun}_G(X))$ で、 $\text{coeff}_!(\mathcal{F}_\sigma) \simeq k$ となるものが唯一存在する。しかも、 $\mathcal{F}_\sigma$ は偏屈層である。

この予想は [GR25b, ABC⁺24a, CCF⁺24, ABC⁺24b, GR25c] によって D-加群と位相的な層の場合に証明されている。 ℓ -進層に関しては [GR25a] により唯一であることは示されているが存在は ($G = \text{GL}_n$ 以外では) まだ未解決である。

4 圏同値としての幾何学的ラングランズ予想

現在では予想 3.11 をさらに抽象化し、幾何学的ラングランズは層に関する主張ではなく圏同値としての主張に置き換えられている。ここでは、簡単のため k を標数 0 として、D-加群を考える。すると、 X 上の $\check{G}$ -局所系 (つまり、主 $\check{G}$ 束で平坦接続を持つもの) のモジュライ空間 $\text{LS}_{\check{G}}(X)$ がある。以前には、特定の $\text{LS}_{\check{G}}(X)$ の点に付随する $\text{Bun}_G(X)$ 上の層を考えた。圏論的な幾何学的ラングランズ予想では、 $\text{Bun}_G(X)$ 上の D-加群の圏 $\text{D-mod}(\text{Bun}_G(X))$ 全体を $\text{LS}_{\check{G}}(X)$ を用いて表すことを目標とする。つまり、圏同値

$$\text{D-mod}(\text{Bun}_G(X)) \simeq \text{QCoh}(\text{LS}_{\check{G}}(X)) \quad (4.1)$$

の存在を予想する。この圏同値は左側へのヘッケ作用は右側への次の作用に対応することが期待される。各 $x \in X(k)$ は「 x へ制限する」という射 $\text{ev}_x : \text{LS}_{\check{G}}(X) \rightarrow \mathbb{B}\check{G}$ を誘導する。任意の $\check{G}$ の表現 V に対して、 V を $\mathbb{B}\check{G}$ 上の準連接層と同一視しよう。すると、 $\text{ev}_x^* V$ は $\text{LS}_{\check{G}}(X)$ 上の準連接層になり、 $\text{QCoh}(\text{LS}_{\check{G}}(X))$ の自己関手 $\text{ev}_x^* V \otimes -$ が定義される。つまり、以下の図式が可換であるはずである。

$$\begin{array}{ccc} \text{D-mod}(\text{Bun}_G(X)) & \xrightarrow{\sim} & \text{QCoh}(\text{LS}_{\check{G}}(X)) \\ \downarrow T_{V,x} & & \downarrow \text{ev}_x^* V \otimes - \\ \text{D-mod}(\text{Bun}_G(X)) & \xrightarrow{\sim} & \text{QCoh}(\text{LS}_{\check{G}}(X)). \end{array} \quad (4.2)$$

この可換図式において点 x を動かすこともできる。これを定式化することは、読者へ任せよう。

例 4.1. 例えば、 $\check{G}$ -局所系 $\sigma \in \text{LS}_{\check{G}}(X)(k)$ に対して、右側に σ を台に持つ摩天楼層 $\delta_\sigma \in \text{QCoh}(\text{LS}_{\check{G}}(X))$ は左側でヘッケ固有層 $\mathcal{F}_\sigma$ に対応するはずである。

^{*5} ここで、注意 3.3 に倣い Vect はベクトル空間の導来圏を表す。

圏同値 (4.1) にヘッケ作用素との整合性を要求したが、Whittaker 係数との関係はまだ述べていない。単純に以下のような可換図式を期待する。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G(X)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X)) \\
 \searrow \mathrm{coeff}_! & & \swarrow \Gamma(\mathrm{LS}_{\check{G}}, -) \\
 & \mathrm{Vect}. &
 \end{array} \tag{4.3}$$

ここで $\Gamma(\mathrm{LS}_{\check{G}}, -)$ は大域切断関手である。

例 4.2. 例 4.1 において、Whittaker 係数との整合性からさらに $\mathrm{coeff}_!(\mathcal{F}_\sigma) = k$ が期待される。つまり、 σ が既約のとき (3.11) で唯一存在されるとされた層と一致するはずである。

次の予想が Beilinson と Drinfeld による “best hope”(=最大の希望) である。

予想 4.3. 性質 (4.2) と (4.3) を満たす同値 (4.1) が唯一存在する。

実際、性質 (4.2) と (4.3) を満たす関手

$$\mathbb{L}_G^{\mathrm{coarse}}: \mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G(X)) \rightarrow \mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X)) \tag{4.4}$$

が [GR25b] において構成されている。構成の主なアイデアは以下の通りである。まず、注意 3.7 のようにヘッケ関手は圏 $\mathrm{Rep}(\check{G})_{\mathrm{Ran}(X)}$ の $\mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G(X))$ への作用を定義する。この圏 $\mathrm{Rep}(\check{G})_{\mathrm{Ran}(X)}$ は $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X))$ を商として持つ。[GR25b, Gai15] は $\mathrm{Rep}(\check{G})_{\mathrm{Ran}(X)}$ の $\mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G(X))$ への作用が実は $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X))$ を経由していることを示している。これが、スペクトル作用^{*6}と呼ばれる。関手 $\mathrm{coeff}_!: \mathrm{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G(X)) \rightarrow \mathrm{Vect}$ は一意的に $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X))$ の作用で同変な関手 (4.4) に拡張される。

注意 4.4. 実はこの関手 $\mathbb{L}_G^{\mathrm{coarse}}$ は同値ではない、つまり、予想 4.3 は偽である。実際、例えば Bun_G 上の定数層 $\underline{k}_{\mathrm{Bun}_G}$ をとる。すると、(3.6) により

$$\mathrm{coeff}_!(\underline{k}_{\mathrm{Bun}_G}) = R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_{N,\rho(\omega_X)}, \psi^* \exp)$$

だが、 $\exp$ はド・ラーム・コホモロジーを持たない^aので、右辺は 0 になる。この計算は一般化され、

$$\mathbb{L}_G^{\mathrm{coarse}}(\underline{k}_{\mathrm{Bun}_G}) = 0 \tag{4.5}$$

となる。この計算は、(4.1) の右辺が小さすぎることを示唆している。

^a これは微分方程式 $df/dx = f$ が代数的な解を持たないことと関係する

この問題の解決案として [AG15] によって $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}})$ のある拡大 $\mathrm{IndCoh}_{\mathrm{Nilp}}(\mathrm{LS}_{\check{G}})$ が提唱された。定義の詳細はここでは述べないが、この圏はコホモロジー次元 $> -\infty$ では $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}})$ と一致する。つまり、二つの圏の違いはコホモロジー次元 $-\infty$ (つまり、コホモロジーが全て消えるのに 0 ではない対象) でのみ違う。

最後に、[GR25b, ABC⁺24a, CCF⁺24, ABC⁺24b, GR25c] で証明された幾何学的ラングランズ予想は以下のものである。

^{*6} 「スペクトル」は固有値と同義語で $\mathrm{QCoh}(\mathrm{LS}_{\check{G}}(X))$ の作用がヘッケ固有値の情報を持っていることを意味する。

定理 4.5. (4.4) の関手 $\mathbb{L}_G^{\text{coarse}}$ は圏同値

$$\mathbb{L}_G: \text{D-mod}(\text{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\sim} \text{IndCohNilp}(\text{LS}_G(X)) \quad (4.6)$$

に拡張される。

注意 4.6. D-加群の幾何学的ラングランズは [ABC⁺24a] で定式化される Kac-Moody 局所化 と呼ばれる手法により $\text{Bun}_G(X)$ 上の D-加群をたくさん構成できる。これが D-加群の予想の方が ℓ -進層や位相的な層の予想より証明しやすい理由である。それらの層の理論に関する幾何学的ラングランズの証明は D-加群の予想に帰着することによって証明される [GR25b]。Kac-Moody 局所化を使わない定理 4.5 の証明を見つける、また ℓ -進層や位相的な層の予想を D-加群の予想を介さず証明することは非常に興味深い未解決問題である。

注意 4.7. §2 では簡単のため $\mathbb{H}$ 上の $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -不変な保形形式だけ考えた。しかし、より一般的に正整数 N に対して

$$\Gamma_0^+(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

などの $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群を考えることができる。これは、幾何学的には $\text{Bun}_G(X)$ に レベル構造 をつけることに対応する。例えば、商 $\Gamma_0^+(p) \backslash \mathbb{H}$ の幾何学的類似は点 $x \in X(k)$ を固定してランク 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ と 2 次元ベクトル空間 $\mathcal{E}_x$ の一次元部分空間 L を分類するモジュライ空間 $\text{Bun}_{\text{GL}_2}^{L,x}$ である。レベル構造付きの幾何学的ラングランズもまた面白い未解決問題である。

4.1 定数層

$\text{Bun}_G(X)$ 上の定数層が $\mathbb{L}_G^{\text{coarse}}$ の下で 0 に行くというのが IndCohNilp を考えることの出発点であった。ならば、圏同値 (5.1) の下で定数層が何に対応するか、は自然な疑問であろう。これは上記の通り $\text{IndCohNilp}(\text{LS}_G(X))$ のコホモロジー次元 $-\infty$ の対象になっているので直接計算するのは難しい。詳しい構成は書かないが、V. Lafforgue によるこの対象の明示的な公式の予想があり、筆者がそれを証明した [Suz26]。

5 圏論的な幾何学的ラングランズ予想から関数へ

この講究録は、保形形式、つまり $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ 上の正則関数を考えるところから始まった。この商 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ の関数体類似が $\text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q)$ であった。幾何学的ラングランズではグロタンディークを做って $\text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q)$ 上の関数を考える代わりに、 $\text{Bun}_G(X)$ 上の層を考えた。それがさらに圏同値へ拡張されたが、逆に幾何学的ラングランズ同値が $\text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q)$ 上の関数に関して何を言っているのか考えるのが自然であろう。例えば、(3.1) を使って $\text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q)$ 上の (コンパクト台を持つ) 関数の空間 $\text{Funct}_c(\text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ にヘッケ作用が定義される。すると、次の予想がある。

予想 5.1. X と G を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義されるものとする。次の二つの集合の間に全単射がある：

1. ヘッケ固有関数 $f: \text{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ で Whittaker 正規化されていてカスプ^aなもの。
2. 既約なガロア表現 $\rho: W_X \rightarrow \check{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 。ここで W_X はヴェイユ群と呼ばれる $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ の稠密な部分群。

ここで、ヘッケ固有関数 f に対応するガロア表現を ρ_f と書くと、任意の $\check{G}$ の表現 V と点 $x \in X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ に対して

$$T_{V,x}f = \mathrm{tr}_V(\rho(\mathrm{Fr}_x)) \cdot f$$

となる。ここで Fr_x は x でのフロベニウス。

^a 保形形式 f の最初のフーリエ係数 $a_0(f)$ が消えることと対応している。

幾何学的ラングランズと $\mathrm{Funct}_c(\mathrm{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の関係を理解するにはまず、 X と G が正標数の体 k 上で定義される場合の定理 4.5 の主張を書く。

定理 5.2 ([GR25a, Theorem 0.1.4]). $\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}$ を [AGK⁺22] で定義される X 上の $\check{G}$ -局所系のモジュライ空間とする。このときある $\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}$ の連結成分の和 $'\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}$ が存在して圏同値^a

$$\mathbb{L}_G^{\mathrm{restr}}: \mathrm{Shv}_{\mathrm{Nilp}}(\mathrm{Bun}_G(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{IndCoh}_{\mathrm{Nilp}}(' \mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}(X)) \quad (5.1)$$

がある。また、 $G = \mathrm{GL}_n$ の場合は $'\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}} = \mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}$ である。

^a ここで、 $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nilp}}(\mathrm{Bun}_G(X))$ は $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の ℓ 進層で singular support が $\mathrm{Nilp} \subset T^*\mathrm{Bun}_G(X)$ に含まれるものである。 ℓ 進層の singular support は Beilinson[Bei16] と斎藤[Sai17] により定義されている。また、左辺の Nilp と右辺の Nilp の意味は異なる！

注意 5.3. 任意の簡約群 G に関して $'\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}} = \mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}$ となることが期待される。これは任意の $\check{G}$ -局所系に関してそれをヘッケ固有値にもつ $\mathrm{Bun}_G(X)$ 上の層が存在することと同値である。

定理 5.2 から以下の同型が得られる。

系 5.4. ある $'\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}(X)$ 上の (*ind-*) 接続層 ω が存在して同型

$$\mathrm{Funct}_c(\mathrm{Bun}_G(X)(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \Gamma(' \mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}(X), \omega) \quad (5.2)$$

がある。

また (5.2) の両辺への $\Gamma(\mathrm{LS}_G^{\mathrm{restr}}(X), \mathcal{O})$ の作用を考えることによって予想 5.1 の (1) から (2) への単射 ($G = \mathrm{GL}_n$ の場合は全単射) が得られる。

参考文献

- [ABC⁺24a] D. Arinkin, D. Beraldo, J. Campbell, L. Chen, J. Faergeman, D. Gaitsgory, K. Lin, S. Raskin, and N. Rozenblyum, *Proof of the geometric Langlands conjecture II: Kac-Moody localization and the FLE*, 2024.
- [ABC⁺24b] D. Arinkin, D. Beraldo, L. Chen, J. Faergeman, D. Gaitsgory, K. Lin, S. Raskin, and N. Rozenblyum, *Proof of the geometric Langlands conjecture IV: ambidexterity*, 2024.
- [AG15] D. Arinkin and D. Gaitsgory, *Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture*, Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 1, 1–199. MR 3300415
- [AGK⁺22] D. Arinkin, D. Gaitsgory, D. Kazhdan, S. Raskin, N. Rozenblyum, and Y. Varshavsky, *The stack of local systems with restricted variation and geometric Langlands theory with nilpotent*

singular support, 2022.

- [Bei16] A. Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, *Selecta Math. (N.S.)* **22** (2016), no. 4, 1797–1819. MR 3573946
- [BL95] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Un lemme de descente*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), no. 3, 335–340. MR 1320381
- [BZN18] David Ben-Zvi and David Nadler, *Betti geometric Langlands*, *Algebraic geometry: Salt Lake City 2015*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 97.2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 3–41. MR 3821166
- [CCF⁺24] Justin Campbell, Lin Chen, Joakim Faergeman, Dennis Gaitsgory, Kevin Lin, Sam Raskin, and Nick Rozenblyum, *Proof of the geometric Langlands conjecture III: compatibility with parabolic induction*, 2024.
- [DS74] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre, *Formes modulaires de poids 1*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 507–530. MR 379379
- [FM95] Jean-Marc Fontaine and Barry Mazur, *Geometric Galois representations*, *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993)*, *Ser. Number Theory*, vol. I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 41–78. MR 1363495
- [Fre05] Edward Frenkel, *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, 2005.
- [FS24] Laurent Fargues and Peter Scholze, *Geometrization of the local Langlands correspondence*, 2024.
- [Gai15] Dennis Gaitsgory, *Outline of the proof of the geometric Langlands conjecture for GL_2* , *Astérisque* (2015), no. 370, 1–112. MR 3364744
- [GR25a] Dennis Gaitsgory and Sam Raskin, *Geometric Langlands in positive characteristic from characteristic zero*, 2025.
- [GR25b] ———, *Proof of the geometric Langlands conjecture I: construction of the functor*, 2025.
- [GR25c] ———, *Proof of the geometric Langlands conjecture V: the multiplicity one theorem*, 2025.
- [GW24] Davide Gaiotto and Edward Witten, *Gauge theory and the analytic form of the geometric Langlands program*, *Ann. Henri Poincaré* **25** (2024), no. 1, 557–671. MR 4699908
- [Kob93] Neal Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, second ed., *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 97, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1216136
- [MV07] I. Mirković and K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, *Ann. of Math. (2)* **166** (2007), no. 1, 95–143. MR 2342692
- [Sai17] Takeshi Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, *Invent. Math.* **207** (2017), no. 2, 597–695. MR 3595935
- [Suz26] Kenta Suzuki, *The image of the constant sheaf under the geometric Langlands equivalence (to appear)*, 2026.
- [Zhu23] Xinwen Zhu, *Arithmetic and geometric Langlands program*, *ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. 3. Sections 1–4*, EMS Press, Berlin, [2023] ©2023, pp. 2012–2045. MR 4680309
- [Zhu25] Xinwen Zhu, *Tame categorical local Langlands correspondence*, 2025.