

On the transformations of Grassmann-valued variables

神奈川学園中学・高等学校 多田和功 *

Yasukatsu Tada

Kanagawa Gakuen Junior and Senior High School

概要

Grassmann 代数の automorphisms や Clifford 代数の automorphisms には $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存なものが存在する. 一方で超多様体における座標変換は parity は保存されるもののみ扱われている. この小稿では変数として Grassmann 代数値から出発する議論を試みる (automorphisms を利用した even-odd 分解を試みる). この考察の特別な場合として, queer Lie superalgebras の理論で出てくる行列が得られることを紹介する.

keywords Grassmann 代数, Clifford 代数, automorphisms, parity non-preserving, Grassmann-valued variables, supermanifolds, queer Lie superalgebras

1 parity 構造, Grassmann 代数, Clifford 代数

この小稿で必要になる概念, 用語を簡略に述べる. 詳細は [20], [21] にある. 本研究を進めるにあたり, 可換代数・Weyl 代数に関わる変形量子化, 代数表示の変形に関する理論から多くの発想のヒントを得ている ([5], [6], [14], [15], [16], [17] 参照).

定義 1.1. 代数 $(A, \cdot)$ が parity 構造を持つとは, ある $P, Q \subset A$ が存在して, 次の関係式を満たすときをいう.

$$\begin{aligned} A &= P \oplus Q \\ P \cdot P &\subset P \\ P \cdot Q &\subset Q \\ Q \cdot P &\subset Q \\ Q \cdot Q &\subset P \end{aligned}$$

次に, 代数 $(A, \cdot)$ が parity 構造を持つときに, parity が同じであることを以下のように定義する.

定義 1.2. 代数 $(A, \cdot)$ が, parity 構造を持つとき, 代数 $(A, \cdot)$ の代数的自己同型写像の元 $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(A, \cdot)$ に対して, parity 同値であるとは, $\varphi_1(P) = \varphi_2(P), \varphi_1(Q) = \varphi_2(Q)$ のときをいう.

parity 構造のような一般的な概念を準備したのは, Grassmann 代数, Clifford 代数においては odd part は絶対的に固定された概念ではないためである.

定義 1.3. $(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$ が 2^{2n} 次元実 Grassmann 代数であるとは, 次の性質を持つ $\mathbb{R}$ 係数 2^{2n} 次元線

* tada@kanagawa-kgs.ac.jp

形空間のことである.

- $\wedge$ は結合的な積
- 生成元 $\langle e_i \rangle = \{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ が存在し, 次の基本関係式を満たす.

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n)$$

通常, 生成元の偶数回の積で作られる項の線形和を even part, 生成元の奇数回の積で作られる項の線形和を odd part というわけだが, odd part は $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な代数的自己同型写像に対しては, even 元と odd 元とが mix される. どの生成元を使っているかを明確にする必要があるときは $(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$ と表す. 特に混乱を生じない場合には, $(\wedge^{2n}, \wedge)$ とする. Grassmann 代数の代数的自己同型写像 φ に対して, $\varphi_i = \varphi(e_i)$ とおく. ここで even part と odd part とに分解する (φ -odd part は通常の意味での odd part とは区別される).

定義 1.4. Grassmann 代数 $(\wedge^{2n}, \wedge)$ と, Grassmann 代数の代数的自己同型写像 φ に対して, even part $(\wedge_0^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge)$, φ -odd part $(\wedge_1^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} (\wedge_0^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge) &= \left\{ a_{ev} = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_{2k}}, a^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \in \mathbb{R} \right\} \\ (\wedge_1^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge) &= \left\{ a_{od} = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1}} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1}} \varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_{2k-1}}, a^{i_1 i_2 \dots i_{2k-1}} \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

注 1.1. $(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$, $\forall \varphi \in \text{Aut}(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$ に対して,

- $(\wedge^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge) = (\wedge_0^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \oplus \varphi((\wedge_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge))$
- $\wedge_0^{2n} \wedge \wedge_0^{2n} \subset \wedge_0^{2n}$
- $\wedge_0^{2n} \wedge \varphi(\wedge_1^{2n}) \subset \varphi(\wedge_1^{2n})$
- $\varphi(\wedge_1^{2n}) \wedge \wedge_0^{2n} \subset \varphi(\wedge_1^{2n})$
- $\varphi(\wedge_1^{2n}) \wedge \varphi(\wedge_1^{2n}) \subset \wedge_0^{2n}$

である. 一般に (集合としては) $\varphi(\wedge_0^{2n}) = \wedge_0^{2n}$, $\varphi(\wedge_1^{2n}) \neq \wedge_1^{2n}$ である. Grassmann 代数の項の次数は, odd part の取り方に依存する. ゆえに parity という概念は絶対的な概念ではない (表示の問題を持つことになる).

命題 1.1. Grassmann 代数は parity 構造を持つ ($\mathbb{Z}_2$ -graded 代数である).

Grassmann 代数の $\mathbb{R}[[\nu]]$ による中心拡大 ν として得られる結合的代数を ν 付き Grassmann 代数と定義し, 適宜 $\langle e_i \rangle$, ν に関する degree を定義する.

定義 1.5. ν 付き Grassmann 代数 $(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle)[[\nu]], \wedge)$ 上の生成元 $\langle e_i \rangle$ に依存する Poisson 括弧を次の式で定義をする.

$$\{\cdot, \cdot\} = \sum_{i=1}^n \left(\overleftarrow{\partial}_{e_i} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right)$$

定義 1.6. ν 付き Grassmann 代数 $(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$ 上の Moyal $*$ -積を次の式で定義する ([6] 参照).

$$* = \exp \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^n \left(\overleftarrow{\partial}_{e_i} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right)$$

次のように略記することもある.

$$\exp \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial}_{e_j} \quad (\text{この場合 } \bmod 2n \text{ で考える})$$

上で定義した Moyal $*$ -積を用いると, 次の関係式が得られる.

命題 1.2. 次の関係式が成り立つ.

$$e_i * e_j + e_j * e_i = \nu \delta_{ij+n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n)$$

命題 1.3. $*$ -積は associativity を持つ.

命題 1.4. $(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *) \cong Cl(n, n, \mathbb{R})$ が成り立つ.

注 1.2. 上記の命題を確かめるには, Hadamard 行列 (その高次元版) を用いればよい.

$(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *)$ 上に逆 Moyal 積 $*^{-1}$ を次のように定義する (Weyl 代数で成立していることのアナロジーである.[15] 参照).

$$*^{-1} = \exp \left(-\frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^n \left(\overleftarrow{\partial}_{e_i} * \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} * \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right) \right)$$

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 1.5. $((\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *), *^{-1}) \cong (\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$ が成り立つ.

これは, 逆積を用いて, 新しい代数との組を構成すると, 元の代数に戻るという性質をもっていることを主張している. Weyl 代数の場合は [14].[15] を参照. 通常は Grassmann 代数の方を “古典”, Clifford 代数の方を “量子” と見なすのだが, 命題 1.5 は “古典-量子” の見方を逆転させる可能性があることも示唆している.

2 代数的自己同型写像のなす群について

Grassmann 代数や Clifford 代数の代数的自己同型写像を考える. 生成元の基本関係式によって代数的自己同型であるということが特徴付けされる.

定理 2.1. $\varphi : (\bigwedge^{2n}, \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n}, \wedge)$ が Grassmann 代数の代数的自己同型であるということと, 次の性質を持つことは同値である.

- $\mathbb{R}$ -linear
- $\varphi(e_i) = \sum_{p=1}^{2n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$ と表示したとき, 行列 (a_i^j) は逆行列を持つ.
- $\varphi(e_i) \wedge \varphi(e_j) + \varphi(e_j) \wedge \varphi(e_i) = 0$

注 2.1. ν 付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像についても, $\tilde{\varphi}(\nu) = \nu$ を条件に加えれば, 同様の議論ができる.

Clifford 代数についても同様の定理が成り立つ.

定理 2.2. $\psi : (\wedge^{2n} \llbracket \nu \rrbracket, *) \rightarrow (\wedge^{2n} \llbracket \nu \rrbracket, *)$ が Clifford 代数の代数的自己同型であるということと, 次の性質を持つことは同値である.

- $\mathbb{R}$ -linear
- $\psi(\nu) = \nu$
- $\psi(e_i) * \psi(e_j) + \psi(e_j) * \psi(e_i) = \nu \delta_{ij+n}$

この小稿で主に扱う Grassmann 代数, Clifford 代数の代数的自己同型写像は, 線形部分が単位行列のタイプのものである.

$$\begin{aligned} \text{Aut}_E(\wedge^{2n}, \wedge) & \left\{ \varphi(e_i) = e_i + \sum_{p=2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{Aut}_E(\wedge^{2n} \llbracket \nu \rrbracket, *) & = \left\{ \psi(e_i) = e_i + \sum_{p=2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R} \llbracket \nu \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

Grassmann 代数, Clifford 代数の代数的自己同型写像全体の Lie 群論的性質の詳細は, [19], [20] を参照.

上記のタイプの Grassmann 代数の代数的自己同型写像は

$$\varphi(e_i) = (e_i + \omega_B^i) \wedge (1 + \eta)$$

の形で書かれる. これが Clifford 代数の代数的自己同型であるためにはどのような条件が付帯されてくるのかを考察すると, 次の定理が成り立つ.

定理 2.3. 線形項の係数が単位行列で書かれる, Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像は, 次の形で書かれる.

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(e_i) &= (e_i + \omega^i) \wedge (1 + \eta) \\ \{\eta, \eta\} &= 0, \quad \{\omega^i, \omega^j\} = 0, \quad \{e_i, \omega^j\} + \{\omega^i, e_j\} = 0 \end{aligned}$$

ただし $\psi \in \text{Aut}_E(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *)$, φ_ψ は ψ の Grassmann 射影, η, ω^i は odd 元.

証明は [21] 参照. 付帯条件を見ると, $\wedge$ 積と Poisson 積の役割交換の式が得られているように見える. Transposed Poisson (super)algebras については, [1], [2]などを参照. 命題 1.5 を見れば, この辺りの話から何か共通する性質を抜き出していくことで, 量子化と Transposed Poisson (super)algebras との関係に関することについて, 何か言及できると面白い.

3 Grassmann-valued variables

先までの議論では, Grassmann 代数や Clifford 代数の生成元の個数はすべて $2n$ 個で行ってきた (正準形式のアナロジーで議論を作っていた) が, n 個の変数にしてもほぼ同様のことが成立する (Moyal $*$ -積の定義などは適宜変更する必要がある). このような場合にも $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な代数的自己同型写像の存在は明白であろう. それゆえ $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な代数的自己同型写像を交えた座標変換を持つ “超多様体” の構成を考えようとするのは, 自然に発想されることと思われる (超多様体や super 数学の計算に関わる文献は沢山存在する. 例えば, [4], [7], [8], [9] 等がある). この問題 (意識) そのものは, 超多様体の黎明

期からすでに存在していて, Leites によって指摘されてきた ([10], [11], [12], [13], [23]). その解決策として [11] で metasymmetry として議論がされているようだが, それが広く浸透している状況ではない (Volichenko algebras の応用として, 最近では [18] がある). 我々が目指すのは, $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な代数的自己同型写像を考察の対象とする立場で Grassmann-valued variables を導入し, $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な代数的自己同型写像を取り込めるような“超多様体”の構築である.

この問題に対して, ささやかな試みではあるが, even 元, odd 元の区別を付けない Grassmann-valued な変数を用意し, 変数の組を考え, そこでの座標変換を考える (Grassmann-valued variables におけるパッチワーク). この際, even variables と odd variables を天下りに区別する超多様体の定義から離れようとして議論を試みたが, 計算の技術的な部分では, even-odd 分解は非常に有用ではあるので, 後付けで even-odd 分解を実施する形での理論構成を試みた. この場合の odd 分解は φ -odd 分解のことである. つまり, 我々の考える“超多様体”の odd variables とは, どの odd で考察しているのかまで考慮する必要のある変数になっていることが新しい観点である. n 個の Grassmann-valued variables で上記のように even-odd 分解を実施すると $2n$ 個の変数 (n 個の even variables と n 個の odd variables で考察をする) ことになり, 超多様体に埋め込まれるともいえる. Grassmann-valued variables におけるパッチワークについて, 行列成分が even-odd で分解されている場合 (Grassmann-valued で考えているので, Grassmann 代数の次数概念からみれば, 非線形なものも扱っている) について考察をしてみた. すると (驚くべきことに), queer Lie superalgebras の理論で出てくる行列が自然と得られる. これは 超多様体の重要な例として取り上げられている (一方で, なぜその形が自然と得られるものであるかの説明は, 色々と調べてみたものの, その辺りについて, 説明がされている文献を見つけることができなかった. Berezin はすでに知っていたのだろうか?).

首尾一貫しない形になるが, 以下では n 個の生成元からなる Grassmann 代数 に対して考察を進めることにする. 次のように右代数的自己同型写像と左代数的自己同型写像を用意する (ここでは選択した φ を φ_R とした). φ_L は φ_R を決めると同時に決められる (代数的自己同型写像の“左右の双子”) のようなものである).

$$\varphi_R(e_i) = (e_i + \omega^i) \wedge (1 + \eta), \quad \varphi_L(e_i) = (e_i + \omega^i) \wedge (1 - \eta).$$

一般には $\varphi_L \neq \varphi_R^{-1}$ である. これらの写像を用いることで even-odd 分解を考えることができる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(e_i) &= e_i + \omega^i, \\ \frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(e_i) &= (e_i + \omega^i) \wedge \eta. \end{aligned}$$

すなわち

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L) + \frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)$$

となる.

ここでは簡単のため, 2 つの Grassmann-valued variables の変換について考察をする (n 個の Grassmann-valued variables の変換についてもほぼ同様の議論ができる).

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1, y_1) \\ G(x_1, y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(\mathbf{x}_1)}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(\mathbf{x}_1)}_{\varphi\text{-odd}}, \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(\mathbf{y}_1)}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(\mathbf{y}_1)}_{\varphi\text{-odd}} \right) \\ G \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(\mathbf{x}_1)}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(\mathbf{x}_1)}_{\varphi\text{-odd}}, \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(\mathbf{y}_1)}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(\mathbf{y}_1)}_{\varphi\text{-odd}} \right) \end{pmatrix}$$

φ -odd 分解の仕方が分かっているれば, $\frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(F), \frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(F), \frac{1}{2}(\varphi_R + \varphi_L)(G), \frac{1}{2}(\varphi_R - \varphi_L)(G)$ などを計算すればよいことが分かる. 変換 F,G などの具体形が分かる場合には, φ -odd 分解の仕方により注意すればよい. 変換 F,G 等が Grassmann continuation の展開が可能となるときに, Grassmann 代数の代数的自己同型写像 φ の取り方によってどのような表示の変更を受けるのかを調べればよい.

以下の議論では, Grassmann-valued な成分を持つ行列が作用する場合について考察する.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

ここで, 上式の even-odd 分解を考える. φ -odd 分解を考えている (φ の取り方で行列表示が変更される).

$$\begin{pmatrix} x_{2ev} + x_{2od} \\ y_{2ev} + y_{2od} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ev} & B_{od} \\ C_{od} & D_{ev} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1ev} + x_{1od} \\ y_{1ev} + y_{1od} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{od} & B_{ev} \\ C_{ev} & D_{od} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1ev} + x_{1od} \\ y_{1ev} + y_{1od} \end{pmatrix}$$

この後で, 各成分を even と odd 毎に分ける (変数は 2 倍になる). この時点では行列成分に even odd が市松模様のように現れる.

$$\begin{pmatrix} x_{2ev} \\ x_{2od} \\ y_{2ev} \\ y_{2od} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ev} & A_{od} & B_{ev} & B_{od} \\ A_{od} & A_{ev} & B_{od} & B_{ev} \\ C_{ev} & C_{od} & D_{ev} & D_{od} \\ C_{od} & C_{ev} & D_{od} & D_{ev} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1ev} \\ x_{1od} \\ y_{1ev} \\ y_{1od} \end{pmatrix}$$

行と列に関して適当な入れ替えを実施すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2ev} \\ x_{2od} \\ y_{2ev} \\ y_{2od} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ev} & A_{od} & B_{ev} & B_{od} \\ A_{od} & A_{ev} & B_{od} & B_{ev} \\ C_{ev} & C_{od} & D_{ev} & D_{od} \\ C_{od} & C_{ev} & D_{od} & D_{ev} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1ev} \\ x_{1od} \\ y_{1ev} \\ y_{1od} \end{pmatrix}$$

とでき, 以下の関係式を得る.

$$\begin{pmatrix} x_{2ev} \\ y_{2ev} \\ x_{2od} \\ y_{2od} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ev} & B_{ev} & A_{od} & B_{od} \\ C_{ev} & D_{ev} & C_{od} & D_{od} \\ A_{od} & B_{od} & A_{ev} & B_{ev} \\ C_{od} & D_{od} & C_{ev} & D_{ev} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1ev} \\ y_{1ev} \\ x_{1od} \\ y_{1od} \end{pmatrix}$$

ここで

$$P = \begin{pmatrix} A_{ev} & B_{ev} \\ C_{ev} & D_{ev} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} A_{od} & B_{od} \\ C_{od} & D_{od} \end{pmatrix}$$

と置き直すと, queer Lie superalgebras の理論で知られている $q(2)$ の行列が得られる. この議論では 2 変数の Grassmann-valued variables で考察したが, n 変数に変更しても全く同様の議論を行うことで容易に $q(n)$ 型の行列が得られる. 代数表示の変形に対して, どのような計算がなされるかを観察してみる. ここでは

Grassmann 代数の (右) 代数的自己同型写像 $\varphi(e_i) = e_i + e_i \wedge \xi$ を作用させてみる. すると

$$\begin{pmatrix} x_{2\text{ ev}} \\ y_{2\text{ ev}} \\ x_{2\text{ od}} \wedge (1 + \xi) \\ y_{2\text{ od}} \wedge (1 + \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \wedge (1 + \xi) \\ Q \wedge (1 + \xi) & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\text{ ev}} \\ y_{1\text{ ev}} \\ x_{1\text{ od}} \wedge (1 + \xi) \\ y_{1\text{ od}} \wedge (1 + \xi) \end{pmatrix}$$

と変換されることになり, 変換後の even 元には $Q \wedge x_{1\text{ od}}, Q \wedge y_{1\text{ od}}$, odd 元には $Q \wedge x_{1\text{ ev}}, Q \wedge y_{1\text{ ev}}$ の項が流入している. even odd の逆方向に影響しているところが面白い (Picture changing operator との関係があると考えている. Picture changing operator については, [3], [22] 参照). この表示での odd とは代数表示の変更に後の odd 表示であることは注意しておく. odd part の部分に ξ が入ることで mixed されていく状況が分かる. もっと一般の代数的自己同型写像 $\varphi(e_i) = (e_i + \omega^i) \wedge (1 + \xi)$ を作用させた場合は, P, Q の部分の各項にある各 e_i を $e_i + \omega^i$ に取り換えることで正しい形を書くことが可能である (ゲージの”ずれ”が生じていると考えれば良いだろう). 上の表示は右表示で書いているが, $1 + \xi$ を $\wedge$ 積に関して交換して書けば左表示したものが得られる. 右表示と左表示の違いの重要性が表れていると考えられる. 拙稿 [20]. [21] で述べている無限小 odd deformation の計算で定義した coboundary 作用素は, 端的に言えば右 Batalin Vilkovisky 代数と左 Batalin Vilkovisky 代数における定義で使われる括弧式の差である ($\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存の観点から, Batalin Vilkovisky 代数の定義での右と左の区別を意識的に行っている文献は探し出せていない) ことから, 右と左の概念を意識的に記述することは大事である. また, 代数的自己同型写像による表示変形に対して, Berezinian の定義 (あるいは queer determinant) といったものをどのように考えるべきかということは今後の課題である.

4 謝辞

This work was supported by the Ressearch Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

今回, 発表の機会を与えて下さった, 神奈川大学の小林雅人先生には沢山のご厚意を賜りました. この場をかりてお礼申し上げます.

参考文献

- [1] V. Abramov and O. Liivapuu, *Transposed Poisson superalgebra*. arxiv:2311.02604(2023) .
- [2] P.D.Beites , B.L.Macedo , F.I.Kaygorodov, *Transposed Poisson structures*. arXiv:2207.00281
- [3] A.Belopol'sky, *Picture changing operators in supergeometry and superstring theory* arXiv:9706033
- [4] F.A.Berezin. *Introduction to superanalysis*,
Math Phys and Applied Math. Vol.9, D.Reidel Publ Comp. Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo(1987).
- [5] F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz and D.Sternheimer, *Deformation theory and quantization I*. Ann.Phys.111(1978), pp61-110.
- [6] F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz and D.Sternheimer. *Deformation theory and quantization 2*. Ann.Phys.111(1978), pp111-151.
- [7] B.S.DeWitt *Supermanifolds*. Cambridge Univ.Press London(1984)

- [8] A.Inoue and Y.Maeda.*Foundations of Calculus on super Euclidean space $R^{m|n}$ based on a Fréchet-Grassmann algebra*, Kodai.Math.J.14(1991),pp.72-112.
- [9] D.A.Leites.*Introduction to the Theory of Supermanifolds*. Russian Math.surveys 35:1(1980),pp1-64.
- [10] D.A.Leites.*Selected problems of supermanifold theory*.
Duke Math.J.Vol.54(1987),pp-649-656.
- [11] D.A.Leites,V.Serganova.*Metasymmetry and Volichenko algebras*, Phys.letters B 252.
- [12] D.A.Leites.*The Schrodinger equation,Supplement3,Quantization and supermanifolds*.
Kluwer Dordrecht(1991)
- [13] D.A.Leites.*Odd Parameters in geometry*. arXiv:2210.17096
- [14] 大森 英樹, 前田吉昭, 量子的な微分・積分,Springer (2004)
- [15] 大森 英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版会 (2004)
- [16] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *I* 表示変形論, 導入編, 現代数学社 (2018)
- [17] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *II* 表示変形論, 応用編, 現代数学社 (2019)
- [18] F.Toppan: *Volichenko-type metasymmetry of braided Majorana qubits*. arXiv:2406.0087
- [19] 多田 和功,*Clifford 代数の無限小自己同型写像の準古典化* (1996), 東京理科大学修士論文
- [20] 多田 和功, *$\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な Poisson 括弧* (2024) 北海道大学講究録 186 : 第 20 回数学総合若手研究集会 : 数学の交叉点
- [21] 多田 和功,*A $\mathbb{Z}_2$ -graded shift symmetry and trasnposed like relations between $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson algebras and Gerstenhaber algebras*(2025):RIMS Kôkyûroku No.2338
- [22] E.Witten,*Notes On Supermanifolds and Integration*, arXiv:1209.2199
- [23] K.Yagi. *Super differential calculus*. Osaka J.Math.25(1988),pp243-257.