

Non-compact homogeneous spaces and the fundamental groups of smooth varieties

大阪大学・理学研究科 下地 泰斗

Taito Shimoji

Department of Mathematics

The University of Osaka

1 概要

本稿は 2026 年度 RIMS 研究集会「表現論とその周辺分野の交流」での [Shi26] についての講演に基づいて作成された講究録である。

本講演では、冪零リー群 G の離散部分群 Γ による等質空間が非特異複素代数多様体と微分同相であるとき、 Γ は可換群または 2-ステップ冪零群であることを説明する。また、リー群のステップ数が 3 以上であっても非特異複素代数多様体を構成できることを紹介する。主結果と関連する話題や今後の課題についても紹介する。

1.1 謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の神奈川大学の小林雅人さんに感謝申し上げます。また、研究集会にて興味深い質問をして下さった方々にも感謝申し上げます。本研究は国際共同利用・共同研究拠点、京都大学数理解析研究所の支援を受けたものである。本研究は JSPS KAKENHI Grant number 26KJ1608 の助成を受けたものである。

2 主定理

定理 2.0.1 ([Shi26]). G を冪零リー群、 $\Gamma \subset G$ を離散部分群とする。ある非特異複素代数多様体 M が存在して、 M が等質空間 $\Gamma \backslash G$ と微分同相ならば、 Γ は可換群または 2-ステップ冪零群である。

注意 2.0.2. 主定理の証明から、以下が従う（詳しくは [Shi26] 参照）。

- M のコンパクト化 V の 1 次コホモロジーが消滅しているとき、 Γ は可換群である。
- Γ が非可換かつ $\Gamma' \times \mathbb{Z}^n$ (Γ' は 2 ステップ冪零群、 $n > 0$) という形でかけないとき、 Γ の可換化のランクは偶数である。

系として以下が従う。

系 2.0.3. G を冪零リー群、 $\Gamma \subset G$ を離散部分群とする。以下が成り立つ。

- Γ のステップ数が 3 以上のとき、等質空間はどのような非特異複素代数多様体とも微分同相にならない。
- Γ が非可換かつ $\Gamma' \times \mathbb{Z}^n$ (Γ' は 2 ステップ冪零群、 $n > 0$) という形でかけないと仮定する。可換化のランクが奇数のとき、等質空間はどのような非特異複素代数多様体とも微分同相にならない。

3 具体例

- $G = \mathbb{R}^{2n}$ 、 $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$ とすると。等質空間 $\Gamma \backslash G$ は $2n$ 次元トーラスと微分同相である。 $2n$ 次元トーラスは楕円曲線たちの直積 $(\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \sqrt{-1}\mathbb{Z})^n$ と微分同相であるため、 $\Gamma \backslash G$ は非特異複素代数多様体と微分同相である。
- $G = H_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 、 $\Gamma = H_3(\mathbb{Z}) \times \{0\}$ とすると、等質空間 $\Gamma \backslash G$ は 2 次元トーラス上の $\mathbb{C}^*$ 束と微分同相である。2 次元トーラスは楕円曲線 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \sqrt{-1}\mathbb{Z}$ と微分同相であるため、 $\Gamma \backslash G$ は非特異複素代数多様体と微分同相である ([Mor78] 参照)。ここで、 $H_3(\mathbb{R})$ は可換環 R に対して以下で定義される群である。

$$H_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in R \right\}.$$

- G を以下で定義される実リー群とする。

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

G の離散部分群 $\Gamma_i (i = 1, 2)$ を以下のようにとる。

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a_1, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a_4 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

等質空間 $\Gamma_1 \backslash G$ と $\Gamma_2 \backslash G$ はそれぞれ、2次元トーラス上の $\mathbb{C}^*$ 束、 $S^1 \times \mathbb{R}^3$ と微分同相である。前者は上の例から非特異複素代数多様体と微分同相。後者は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ と微分同相であるため、非特異複素代数多様体と微分同相である。特に、 G のリー代数は3ステップ冪零である。

4 関連する話題、今後の展望

本研究は主に以下の話題と関連している。

4.1 長谷川、Benson-Gordon の定理

[BG88, Has89] にて、以下が示された。

定理 4.1.1 ([BG88, Has89]). G を冪零リー群、 $\Gamma \subset G$ を等質空間 $\Gamma \backslash G$ がコンパクトであるような離散部分群とする。このとき、ある非特異複素代数多様体 M が存在して、 M が等質空間 $\Gamma \backslash G$ と微分同相であることと G が可換群であることは必要十分である。つまり、等質空間はトーラスに限られる。

上の定理はリー群が可解である場合にも拡張されている ([Has05])。本研究は上の定理の非コンパクトな場合を許した結果であるといえる。しかし、等質空間と微分同相なものとしてどのような多様体が現れるかどうかは未だに分かっていない。リー群が可解である場合も未検証である。したがって、今後は以下の課題に取り組む。

- 冪零リー群 G の離散部分群 Γ による等質空間と微分同相な多様体を分類せよ。また、微分同相以外の同値類により分類せよ。
- 可解リー群 G の離散部分群 Γ による等質空間が、ある非特異複素代数多様体と微分同相であるための必要条件を求めよ。また、冪零でないもので、等質空間が非特異複素代数多様体と微分同相である例を与えよ。

4.2 Aguilar-Campana の問題

Aguilar と Campana は、以下の問題を提示した。

問題 4.2.1 ([AC25]). M を非特異複素代数多様体とする。 M の基本群が、ある冪零リー群 G の離散部分群であるとき、基本群のステップ数は 2 以下か？つまり、基本群は可換群または 2 ステップ冪零群か？

本研究の主結果は、上の問題の部分的な肯定的結果を与えている。上の問題に対する部分的な結果として、例えば [Rog25, Shi25, CDHP26, Rog26] がある。しかし、一般の場合に対して完全な解決には至っていない。以下の課題に取り組む。

- 高いステップ数の冪零基本群を持つ非特異複素代数多様体または、その基本群に対する必要条件を導出せよ。
- 基本群が、ある冪零リー群 G の離散部分群で、ステップ数が 3 以上である非特異複素代数多様体の例を与えよ。

参考文献

- [AC25] R. Aguilar and F. Campana. *The nilpotent quotients of quasi-projective manifolds with proper quasi-Albanese map*. Pure and Applied Mathematics Quarterly, 21(3):911–929, (2025).
- [BG88] C. Benson and C. S. Gordon. *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*. Topology **27** (1988), no. 4, 513–518.
- [CDHP26] J. Cao, Y. Deng, C. D. Hacon, and M. Paun. *Two-step nilpotent monodromy of local systems on special varieties*. arXiv:2603.14539, (2026).
- [Has89] K. Hasegawa. *Minimal models of nilmanifolds*. Proceedings of the American Mathematical Society **106** (1989), no. 1, 65–71.
- [Has05] K. Hasegawa. *Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds*. Journal of Symplectic Geometry **3** (2005), no. 4, 749–767.
- [Mor78] J. W. Morgan. *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*. Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques **48** (1978), 137–204.
- [Rog25] V. Rogov. *O-minimal geometry of higher Albanese manifolds*. arXiv:2505.07632, (2025).
- [Rog26] V. Rogov. *Topology of higher Albanese maps and aspherical varieties with nilpotent fundamental group*. arXiv:2607.19013
- [Shi25] Taito Shimoji. *On the torsion-free nilpotent fundamental groups of smooth quasi-projective varieties of rank up to seven*. arXiv:2510.09026, (2025).

[Shi26] T. Shimoji. *Quasi-projective nilmanifolds*, [arXiv:2601:16433](#). (2026).