

逆 Hessenberg 畳み込み多様体の同変コホモロジー

京都大学理学研究科

兒玉 太陽

Taiyo Kodama

Department of Mathematics, Kyoto University

1 はじめに

Macdonald 多項式・ k -Schur 関数の文脈で, Chen–Haiman [Che10] は旗多様体 $\mathcal{B} = GL_n/B$ 上のベクトル束 $T_{\Psi}^*\mathcal{B}$ に関する予想を提案した. その考察において, 加藤 [Kat23] はそのベクトル束を“コンパクト化”した多様体 $\mathcal{X}_{\Psi}$ を導入した.

一方で, $\mathcal{X}_{\Psi}$ は単位区間グラフ (unit interval graph) の準対称彩色多項式の幾何学的実現も与えることが判明した [Kat24; Kam24]. $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$ とおき, Gr を GL_n のアフィン Grassmannian $GL_n(\mathcal{K})/GL_n(\mathcal{O})$ とする. このとき標準的な $GL_n(\mathcal{O})$ 同変な射 $m_{\Psi} : \mathcal{X}_{\Psi} \rightarrow \text{Gr}$ が存在し, 幾何学的佐武同値により $\mathcal{X}_{\Psi}$ の定数層の押し出しと対応する GL_n の表現の指標にその彩色多項式が現れる. この記事では, [Kam24] に従い $\mathcal{X}_{\Psi}$ を「逆 Hessenberg 畳み込み多様体」(reverse Hessenberg convolution variety) とよぶ.

この多様体は Hessenberg 多様体と異なり, コンパクトかつ滑らかである. ただし, Hessenberg 多様体についても別の方法で単位区間グラフ彩色多項式の幾何学的実現を与えていることが知られている [BC18].

本稿では, GL_n の極大トーラス T およびループ回転 $S = \mathbb{C}^{\times}$ についての同変コホモロジー $H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_{\Psi})$ を具体的な多項式環の商として表し, さらに退化アフィン Hecke 代数の部分代数の作用について述べる.

2 定義

2.1 逆 Hessenberg 関数・ルートイデアル

Definition 2.1. 長さ n の逆 Hessenberg 関数とは, 関数 $\mathbf{r} : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ で

$$\mathbf{r}(i) \leq \mathbf{r}(i+1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{かつ} \quad \mathbf{r}(i) < i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

をみたすものをいう.

以下, n を 2 以上の整数として固定し, 「逆 Hessenberg 関数」といったときは長さ n のものを指す.

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

Remark 2.2. **Hessenberg 関数**とは、関数 $h: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ で

$$h(i) \leq h(i+1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{かつ} \quad h(i) \geq i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

をみたすものをいう。逆 Hessenberg 関数と Hessenberg 関数は、 $r(i) = n - h(n - i + 1)$ とすることで 1 対 1 に対応する。Hessenberg 関数の方が組み合わせ論でよく用いられるが、ここでは簡単のため逆 Hessenberg 関数を用いる。

$G = GL_n$ とし、 B を上三角行列全体からなる Borel 部分群、 T を対角行列全体からなる極大トーラスとする。また $\epsilon_i \in \mathfrak{t}^*$ を、 T の Lie 代数 $\mathfrak{t}$ の行列の i 番目の対角成分を取り出す線形汎関数とする。 G のルートおよび正ルートの集合は次で与えられる。

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j\} \supset \Delta^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}.$$

部分集合 $\Psi \subset \Delta^+$ が次をみたすとき、これを**ルートイデアル**という。

$$(\Psi + \Delta^+) \cap \Delta^+ \subset \Psi.$$

逆 Hessenberg 関数とルートイデアルの間には、次で与えられる 1 対 1 対応がある。

$$r \mapsto \Psi_r := \{\epsilon_i - \epsilon_j \in \Delta^+ \mid i \leq r(j)\}.$$

特に Δ^+ 自身もルートイデアルであり、これは

$$r(i) = i - 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

と対応する。

G の Weyl 群 W は対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型であり、 Δ 上に自然に作用する。 $1 \leq i \leq n-1$ に対し $s_i \in W$ を、 ϵ_i と ϵ_{i+1} を入れ替える単純鏡映とする。

2.2 逆 Hessenberg 畳み込み多様体

以下、 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$ とおく。

Definition 2.3. $\mathcal{K}^n$ の部分 $\mathcal{O}$ 加群が、階数 n の自由 $\mathcal{O}$ 加群であるとき、これを**格子**と呼ぶ。

$\mathcal{K}^n$ のすべての格子の集合を Gr と書き、これを GL_n の**アフィングラスマニアン**と呼ぶ。この空間は商 $G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ としても表される。

$S = \mathbb{C}^\times$ とする。群 $G(\mathcal{O}) \rtimes S$ は、 $g \in G(\mathcal{O})$, $a \in S$, $v(t) \in \mathcal{K}^n$ に対して

$$(g, a) \cdot v(t) = g \cdot v(at)$$

により $\mathcal{K}^n$ に作用する。この作用は Gr 上の $G(\mathcal{O}) \rtimes S$ の作用を誘導する。

以下、 $L_0 \in \text{Gr}$ を $L_0 = t\mathcal{O}^n$ と固定する。

Definition 2.4 ([Kat23], [Kam24]). 逆 Hessenberg 関数 r に対応する**逆 Hessenberg 畳み込み多様体** (reverse Hessenberg convolution variety) $\mathcal{X}_r$ を

$$\mathcal{X}_r := \{L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n \mid L_i \in \text{Gr}, \dim(L_i/L_{i-1}) = 1, tL_i \subset L_{r(i)} \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$$

と定義する. 対応するルートイデアル Ψ を強調したいときは, $\mathcal{X}_r$ を $\mathcal{X}_\Psi$ とも書く. この多様体には, Gr 上の作用から誘導される $G(\mathcal{O}) \rtimes S$ 作用が入る.

Remark 2.5. 上の格子による定義は [Kam24] によるが, 次数を 1 ずらしている.

Remark 2.6. $k = 0, 1, \dots, n$ に対して, 次のように $\mathcal{X}_r$ の部分多様体を定義する.

$$\mathcal{X}_r^{[k]} := \{L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_k \mid L_i \in \text{Gr}, \dim(L_i/L_{i-1}) = 1, tL_i \subset L_{r(i)} \text{ for } 1 \leq i \leq k\}.$$

写像 $\pi_k: \mathcal{X}_r^{[k]} \rightarrow \mathcal{X}_r^{[k-1]}$ を部分空間 L_k を忘れる写像とすれば,

$$\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_r^{[n]} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{X}_r^{[1]} \rightarrow \mathcal{X}_r^{[0]} = \{\text{pt}\}$$

というファイブレーションの列が定まる. 点 $L_\bullet \in \mathcal{X}_r^{[k-1]}$ の上での π_k のファイバーは,

$$\dim(L_k/L_{k-1}) = 1 \quad \text{かつ} \quad L_{k-1} \subset L_k \subset t^{-1}L_{r(k)} \quad (2.1)$$

をみたす格子 L_k 全体と対応する. (2.1) をみたす線形空間 L_k が格子となることに注意すれば, $\mathcal{X}_r^{[k]}$ は $\mathcal{X}_r^{[k-1]}$ 上の射影束 $\mathbb{P}(\mathcal{V}_k)$ とみなせる. ここで $\mathcal{V}_k$ はファイバーが $t^{-1}L_{r(k)}/L_{k-1}$ であるベクトル束である. 特に, $\mathcal{X}_r$ は滑らかなコンパクト多様体である.

3 $\mathcal{X}_\Psi$ の同変コホモロジー

3.1 同変コホモロジー

この小節では G を一般の複素線形代数群として同変コホモロジーの概略を述べる. 教科書として例えば [Bri98], [AF24] を参照のこと.

$\mathbb{E}G$ を G が右から自由に作用する可縮空間 (全空間) とする. X を G が左から作用する複素代数多様体とすると, **Borel 構成**を商空間

$$\mathbb{E}G \times^G X := (\mathbb{E}G \times X) / \sim, \quad (eg, x) \sim (e, gx) \quad \forall g \in G$$

とする. X が 1 点 pt のときは分類空間 $\mathbb{B}G$ と一致する. R を可換環とすると, X の G 同変コホモロジーを Borel 構成の特異コホモロジー

$$H_G^*(X; R) := H^*(\mathbb{E}G \times^G X; R)$$

と定めると, これは環構造をもつ. また, 断らない限り $H_G^*(X) := H_G^*(X; \mathbb{Z})$ と定める. 1 点の同変コホモロジーを $\Lambda_G := H_G^*(\text{pt}) = H^*(\mathbb{B}G)$ と書く.

E を階数 r の G 同変ベクトル束とする. これは階数 r のベクトル束 $\mathbb{E}G \times^G E \rightarrow \mathbb{E}G \times^G X$ を誘導する. このとき $0 \leq i \leq r$ に対し E の G 同変 Chern 類 $c_i^G(E)$ を, 束 $\mathbb{E}G \times^G E$ の通常の Chern 類

$$c_i^G(E) := c_i(\mathbb{E}G \times^G E) \in H^{2i}(\mathbb{E}G \times^G X; \mathbb{Z}) = H_G^{2i}(X)$$

として定義する. これは Chern 類の通常の性質, すなわち引き戻しに関する自然性や Whitney 和公式をみたす. 全 Chern 類を $c^G(E) = \sum_{i=0}^r c_i^G(E)$ と定める.

V が G の有限次元表現であるとき, V を pt 上の G 同変ベクトル束とみなせば, $c_i^G(V) \in H_G^{2i}(\text{pt}) \subset \Lambda_G$ が定まる.

Example 3.1 ([AF24, Example 2.3.3, Proposition 2.4.1, Exercise 2.5.1]). $G = GL_n(\mathbb{C})$ とし, $T \subset G$ を対角行列全体のなす極大トーラスとする. $1 \leq i \leq n$ に対し T の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{t_i}$ を, T の i 番目の成分による掛け算で定める. $t_i = c_1^T(\mathbb{C}_{t_i})$ とおくと, Λ_T は

$$\Lambda_T = H_T^*(\text{pt}) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$$

と表される. また, 埋め込み $T \hookrightarrow G$ は単射環準同型 $\Lambda_G \hookrightarrow \Lambda_T$ を誘導し, その像は $t_1, \dots, t_n$ について対称な多項式全体である.

また, 射影束公式が同変コホモロジーでも成立する.

Proposition 3.2 (射影束公式, [AF24, Proposition 2.6.1]). $E \rightarrow X$ を階数 r の G 同変ベクトル束とし, $\mathbb{P}(E)$ を E の射影化とする. このとき環同型

$$H_G^*(\mathbb{P}(E)) \cong H_G^*(X)[x] / \left(\sum_{i=0}^r c_i^G(E) x^{r-i} \right)$$

が存在する. ここで $[x] = c_1^G(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ である.

3.2 主定理

以下, $G = GL_n(\mathbb{C})$ とし, B を上三角行列全体からなる Borel 部分群, T を対角行列全体からなる極大トーラスとする.

このとき, Example 3.1 のように $\Lambda_T = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ と表され, Λ_G はその $t_1, \dots, t_n$ について対称な多項式からなる部分環とみなせる. ϵ を $S = \mathbb{C}^\times$ の標準 1 次元表現の Chern 類とすると, $\Lambda_{T \times S} = \Lambda_T[\epsilon]$, $\Lambda_{G \times S} = \Lambda_G[\epsilon]$ と表される.

Λ を $\Lambda_{T \times S}$ または $\Lambda_{G \times S}$ とする. 作用素 $\partial_i, \mathbf{S}_i \in \text{End}_\Lambda(\Lambda[x_1, \dots, x_n])$ ($i = 1, \dots, n-1$) を次のように定義する.

$$\partial_i(f) = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}, \quad \mathbf{S}_i(f) = s_i(f) - \epsilon \partial_i(f), \quad f \in \Lambda[x_1, \dots, x_n]$$

ただし s_i は x_i と x_{i+1} を入れ替える作用である.

Theorem 3.3. $\mathbf{r}$ を逆 *Hessenberg* 関数とし, $f_1 = \prod_{i=1}^n (x_1 + t_i) \in \Lambda_{T \times S}[x_1, \dots, x_n]$ とする. このとき, 次のような $\Lambda_{T \times S}$ 代数の同型が存在する.

$$H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_{\mathbf{r}}) \cong \Lambda_{T \times S}[x_1, \dots, x_n]/I_{\mathbf{r}}$$

ここで $\deg x_i = 2$ であり, $I_{\mathbf{r}}$ は次の多項式によって生成されるイデアルである.

$$D_k(f_1) = \partial_{k-1} \partial_{k-2} \cdots \partial_{\mathbf{r}(k)+1} \mathbf{S}_{\mathbf{r}(k)} \cdots \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 f_1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

また, $G \times S$ 同変コホモロジーに関してもまったく同じ表示が成立する.

証明の概略. 射影束の列 $\mathcal{X}_{\mathbf{r}} = \mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{[n]} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{[1]} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbf{r}}^{[0]} = \{\text{pt}\}$ に対して, 射影束公式を繰り返して適用する. $[x_k] = -c_1(L_k/L_{k-1})$ である. $\square$

4 退化アフィン Hecke 代数の作用

4.1 作用の定め方

Definition 4.1. 退化アフィン Hecke 代数 $\mathbf{H}_{\deg}$ は, 以下の性質により定義される, 単位的かつ結合的な次数付き $\mathbb{Z}[\epsilon]$ 代数である.

- (i) 次数付き $\mathbb{Z}$ 加群として $\mathbb{Z}[W] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon]$ ($\deg w = 0 \ \forall w \in W$, $\deg x_i = 2 \ \forall i$, $\deg \epsilon = 2$) と同型である.
- (ii) $\mathbb{Z}[W]$ と $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon]$ は $\mathbf{H}_{\deg}$ の部分代数である.
- (iii) $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, 関係式

$$s_j x_i - x_{s_j(i)} s_j = \begin{cases} -\epsilon & \text{if } i = j, \\ \epsilon & \text{if } i = j + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

が成立する.

$\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}} := \mathbf{H}_{\deg} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ と表記する.

Λ を可換環, $\epsilon \in \Lambda$ とする. このとき $\mathbf{H}_{\deg}$ の $\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ への作用が次で定まる.

$$s_i \cdot f = \mathbf{S}_i(f), \quad x_i \cdot f = x_i f, \quad \epsilon \cdot f = \epsilon f, \quad f \in \Lambda[x_1, \dots, x_n].$$

この作用は Λ 線形である. この表現を**多項式表現**と呼ぶ.

Λ を $\Lambda_{T \times S}$ または $\Lambda_{G \times S}$ とし, $\epsilon \in \Lambda$ について多項式表現 $\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ を考える.

$\mathbf{r}$ を逆 *Hessenberg* 関数とする. Theorem 3.3 で定めたイデアル $I_{\mathbf{r}} \subset \Lambda[x_1, \dots, x_n]$ について, 次が計算で確かめられる.

Lemma 4.2. Ψ を $\mathbf{r}$ に対応するルートイデアルとする. $\Psi \cup (-\Psi)$ が s_m の作用で不変な m について, $I_{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{S}_m$ の作用で閉じている.

したがって、次が成立する.

Corollary 4.3. Ψ をルートイデアルとし, S' を W の単純鏡映の部分集合で, $\Psi \cup (-\Psi)$ が S' の作用で安定であるものとする. $\mathbf{H}'_{\deg}$ を退化アフィン Hecke 代数 $\mathbf{H}_{\deg}$ の部分代数で, S' と $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, \epsilon]$ により生成されるものとする. このとき, 多項式表現は $\mathbf{H}'_{\deg}$ の $H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_\Psi)$ と $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_\Psi)$ への作用を誘導する. 同様に, $\mathbf{H}'_{\deg, \mathbb{C}} = \mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は $H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_r; \mathbb{C})$ と $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_r; \mathbb{C})$ に作用する. 特に, $\mathbf{H}_{\deg}$ は $H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+})$ と $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+})$ に作用し, $\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}}$ は $H_{T \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+}; \mathbb{C})$ と $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+}; \mathbb{C})$ に作用する.

4.2 旗多様体の余接束のコンパクト化

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ を G の Lie 代数とし, $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{n}$ をそれぞれ B とその冪単根基の Lie 代数とする. $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ をすべての冪零行列からなる冪零錐とする.

$\mathcal{B} = G/B$ を旗多様体とする. この多様体は, $\mathbb{C}^n$ の完全旗 $F_\bullet$ 全体の集合と同一視される:

$$\mathcal{B} \cong \{F_\bullet = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim F_i = i \text{ for } 0 \leq i \leq n\}.$$

余接束 $T^*\mathcal{B}$ は次と同一視される:

$$T^*\mathcal{B} \cong \{(F_\bullet, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{N} \mid xF_i \subset F_{i-1} \text{ for } 1 \leq i \leq n\}.$$

$S = \mathbb{C}^\times$ とする. 次のように $\mathcal{N}$ と $T^*\mathcal{B}$ に $G \times S$ 作用を入れる.

$$(g, a) \cdot x = a^{-1}gxg^{-1}, \quad (g, a) \cdot (F_\bullet, x) = (gF_\bullet, a^{-1}gxg^{-1}).$$

Springer 特異点解消 (Springer resolution) は, $\mu(F_\bullet, x) = x$ によって定義される $G \times S$ 同変写像 $\mu: T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$ である.

アフィングラスマニアン Gr の部分多様体 $\text{Gr}^{(n)}$ を次のように定義する.

$$\text{Gr}^{(n)} := \{L \in \text{Gr} \mid L_0 \subset L, \dim(L/L_0) = n\}$$

また, 写像 $\mathfrak{m}: \mathcal{X}_{\Delta+} \rightarrow \text{Gr}^{(n)}$ を $(L_0 \subset \dots \subset L_n) \mapsto L_n$ で定める.

Proposition 4.4 (Lusztig [Lus81], Ngô [Ngô99], Mirkovic–Vybornov [MV03]). $G \times S$ 同変かつ, 像が稠密な単射 ι と $\tilde{\iota}$ が存在し, 次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{B} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \mathcal{X}_{\Delta+} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mathfrak{m} \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{\iota} & \text{Gr}^{(n)} \end{array}$$

すなわち, 写像 $\mathfrak{m}$ は「Springer 特異点解消のコンパクト化」と思える.

Ψ をルートイデアルとし, r を対応する逆 Hessenberg 関数とする. 部分空間 $\mathfrak{n}(\Psi) \subseteq \mathfrak{n}$ を

$$\mathfrak{n}(\Psi) := \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$$

と定義し, $T_\Psi^* \mathcal{B} := G \times^B \mathfrak{n}(\Psi) \subseteq G \times^B \mathfrak{n} = T^* \mathcal{B}$ を余接束の部分束とする. これは次と同一視できる.

$$T_\Psi^* \mathcal{B} \cong \{(F_\bullet, x) \in \mathcal{B} \times \mathcal{N} \mid xF_i \subset F_{r(i)} \text{ for } 1 \leq i \leq n\}.$$

加藤 [Kat23] は, $\mathcal{X}_\Psi$ が $\mathcal{X}_{\Delta+}$ における $\iota(T_\Psi^* \mathcal{B})$ の閉包であることを示した. したがって, 包含写像 $\iota_\Psi : T_\Psi^* \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{X}_\Psi$ を得る. ホモトピー同値および [AF24, Example 4.3] から次が成立する.

$$H_{G \times S}^*(T_\Psi^* \mathcal{B}) \cong H_{G \times S}^*(\mathcal{B}) \cong H_{T \times S}^*(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n, \epsilon].$$

x_i に対応する直線束の引き戻しを計算すれば次を得る.

Proposition 4.5. 制限写像 $\iota_\Psi^* : H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_\Psi) \rightarrow H_{G \times S}^*(T_\Psi^* \mathcal{B})$ は, 各 $i = 1, \dots, n$ に対して x_i を $-t_i$ に写す全射 $\Lambda_{G \times S}$ 代数準同型である.

4.3 多項式表現の幾何学的構成との整合性

以降, (コ) ホモロジーは $\mathbb{C}$ 係数とする.

Steinberg 多様体 Z は次で定まる多様体である.

$$Z := T^* \mathcal{B} \times_{\mathcal{N}} T^* \mathcal{B} = \{(p, q) \in T^* \mathcal{B} \times T^* \mathcal{B} \mid \mu(p) = \mu(q)\}.$$

ここで, $\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}}$ の $H_{G \times S}^*(T^* \mathcal{B}) \cong \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, \epsilon]$ への作用を, Proposition 4.5 における符号の反転に注意しながら定める. すなわち,

$$s_i \cdot f = s_i f + \epsilon \frac{f - s_i f}{t_i - t_{i+1}}, \quad x_i \cdot f = -t_i f, \quad \epsilon \cdot f = \epsilon f, \quad f \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, \epsilon]$$

とする. ただし $s_i f$ は f の t_i と t_{i+1} を入れ替えた多項式である.

Proposition 4.6 ([Gin98, Theorem 12.7]). 同変 *Borel–Moore* ホモロジー $H_*^{\text{BM}, G \times S}(Z)$ は, 畳み込み積により退化アフィン *Hecke* 代数 $\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}}$ と同型な代数構造をもつ. それは幾何学的構成により自然に

$$H_{G \times S}^*(T^* \mathcal{B}) \cong H_{T \times S}^*(\text{pt}) \cong \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, \epsilon]$$

に作用し, この作用は上で述べた多項式表現と一致する.

これと Proposition 4.5 および Corollary 4.3 を組み合わせることで, 次を得る.

Proposition 4.7. Corollary 4.3 と Proposition 4.6 を通じて, それぞれ $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+})$ と $H_{G \times S}^*(T^* \mathcal{B})$ を $\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}}$ 加群とみなす. このとき, 制限写像 $\iota_{\Delta+}^* : H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+}) \rightarrow H_{G \times S}^*(T^* \mathcal{B})$ は $\mathbf{H}_{\deg, \mathbb{C}}$ 同変である.

この命題は, $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+})$ 上に定めた $\mathbf{H}_{\deg}$ の作用が, ある意味で「幾何学的に標準的な作用」と整合するということを意味している.

5 今後の展望

本稿では $H_{G \times S}^*(\mathcal{X}_{\Delta+})$ に対する $\mathbf{H}_{\deg}$ の作用を代数的な手法により構成した。この作用は、Steinberg 多様体のコンパクト化 $\mathcal{X}_{\Delta+} \times_{\mathrm{Gr}(n)} \mathcal{X}_{\Delta+}$ の同変 Borel–Moore ホモロジーを通じた幾何学的な構成によっても実現可能であると期待される。この幾何学的な作用の構築については、現在進行中の課題である。

さらに、本稿で展開した理論が組合せ論へどのような応用をもつかを探ることも今後の興味深い問題である。特に、単位区間グラフの準対称彩色多項式や、Macdonald 多項式・ k -Schur 関数の理論との具体的な関連を明らかにできれば意義深いと考えており、引き続き考察の対象としたい。

References

- [AF24] D. Anderson and W. Fulton. *Equivariant cohomology in algebraic geometry*. Vol. 210. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2024, pp. xv+446.
- [BC18] P. Brosnan and T. Y. Chow. “Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties”. In: *Adv. Math.* 329 (2018), pp. 955–1001.
- [Bri98] M. Brion. “Equivariant cohomology and equivariant intersection theory”. In: *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*. Vol. 514. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. Notes by Alvaro Rittatore. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 1–37.
- [Che10] L.-C. Chen. *Skew-Linked Partitions and a Representation-Theoretic Model for k -Schur Functions*. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010, p. 71.
- [Gin98] V. Ginzburg. “Geometric methods in the representation theory of Hecke algebras and quantum groups”. In: *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*. Vol. 514. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. Notes by Vladimir Baranovsky [V. Yu. Baranovskii]. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 127–183.
- [Kam24] J. Kamnitzer. “Fixed points of reverse Hessenberg convolution varieties”. In: *arXiv preprint arXiv:2412.09446* (2024).
- [Kat23] S. Kato. “A geometric realization of Catalan functions”. In: *arXiv preprint arXiv:2301.00862* (2023).
- [Kat24] S. Kato. “A geometric realization of the chromatic symmetric function of a unit interval graph”. In: *arXiv preprint arXiv:2410.12231* (2024).

- [Lus81] G. Lusztig. “Green polynomials and singularities of unipotent classes”. In: *Adv. in Math.* 42.2 (1981), pp. 169–178.
- [MV03] I. Mirković and M. Vybornov. “On quiver varieties and affine Grassmannians of type A ”. In: *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 336.3 (2003), pp. 207–212.
- [Ngô99] B. C. Ngô. “Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye”. In: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 32.5 (1999), pp. 619–679.