

奇 Verma の定理

廣田 竣介

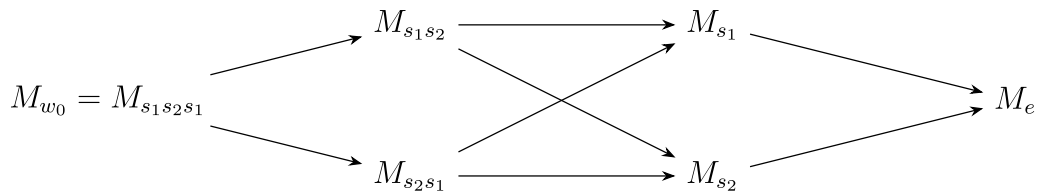
京都大学・理学研究科

Shunsuke Hirota

Graduate School of Science, Kyoto University

1 偶 Verma の定理

古典的な BGG 圏 $\mathcal{O}$ は、半単純 Lie 代数上の weight 加群圏の中で、単純最高ウェイト加群らが生成する Serre 部分圏に他ならず、1970 年代以来研究されてきた由緒あるアーベル圏である。古典的な Verma の定理・BGG の定理 [3, 12] によれば、半単純 Lie 代数の設定では、最高ウェイト加群の親玉である Verma 加群同士の準同型はすべて単射か 0 であり、Bruhat 順序によって統制される。図は $\mathfrak{sl}_3$ の主ブロックにおける全 Verma 加群間の準同型の概観である。



2 Weyl groupoids

Heckenberger-山根 (2008)[7] による、Weyl groupoid (a.k.a. 一般化された root 系、Cartan graph) は、“古典的 root 系の概念を、本質的に異なる基底のとり方を許すような形でこの上なく良く一般化したもの”に見える。このような一般化が現れたとき、その定義が“正しい”かを問うべきだが、以下に根拠を述べる。この概念の元々の動機は、Andruskiewitsch-Schneider の提唱していた“有限次元 pointed Hopf algebra を Nichols algebras of diagonal type を分類することで分類する”を解決することであり、それは Heckenberger (2009) が Gelfand-Kirillov 次元が有限な Nichols algebras of diagonal type を Weyl groupoid により Lie 理論的に分類したことで本質的に進展し、実際に余根基が可換な場合にある意味完遂された。そもそも量子群 (ここでは、可換でも余可換でもない Hopf algebra のことを指す) の具体例は、Drinfeld-神保 (1985, 1986) 以前は多くは知られていなかったといえる。たとえば、Nichols (1978) はいわゆる小量子群 $u_q^+(\mathfrak{sl}_3)$ の冪零部分を定義し、それがこんにち Nichols 代数と呼ばれる、R-行列からこの上なく自然な普遍性で定義される、適切な braided monoidal 圏上の bialgebra 的対象であることを示した (Nichols 代数は対称代数の定義を braiding で捻ったものとも言える)。Lusztig (1993) は Drinfeld-

神保型量子群の冪零部分が Nichols algebra であることを初めて示しており、これは”半単純 Lie 代数の普遍包絡代数の q 変形である”というよくある説明とは異なる、純粹に代数的な概念的な、Drinfeld-神保型量子群とは何か?に対する説明につながる。Nichols 代数の分類は”有限次元加群が半単純で単純部分余代数が自明なものしかない primitive 元のなす空間が有限次元であるような余可換 bialgebra”(通称半単純 Lie 代数 (の普遍包絡代数)) の分類の非余可換類似ともいえる。

さらに rank 2 の Weyl groupoid は Conway-Coxeter による frieze-pattern の概念と等価である。実際、古典的な A_2, B_2, G_2 の root 系は、それぞれ三角形の自明な分割、四角形の唯一の三角形分割、六角形の最も対称的な三角形分割から生じる frieze pattern と適切な意味で同一視できることが観察され、鏡映は列ずらしに対応する。これら 3 つの三角形分割以外の三角形分割から生じる frieze pattern は、明らかに観察されるように本質的に異なる列の取り方があり、これを 3 つの場合と同様にして root 系だと無理矢理思ったものが rank2 の Weyl groupoid に他ならない。このことは、Weyl groupoid が正しい定義をしている根拠を増大させるとともに理解を助ける例を提供する。

例えば、以下は五角形の唯一の三角形分割に対する frieze pattern であり、ここでいう列とは、textbf している 2 つの数字の組の長さ 5 の列のことをさす。古典的な場合ではこの数字の組に正ルートを基底で書いた時に出る係数が対応する。この frieze pattern に対応する root 系 / Weyl groupoid は、例外型 Nichols 代数 $ufo(7)$ の root 系であることが知られており、従来の Lie 理論では知られていなかった新しい例とされている。

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	3	1	2	2	1	3	1	2	2	1	3	1
	3	1	2	2	1	3	1	2	2	1	3	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

有限型の Weyl groupoid は Cuntz–Heckenberger(2015) により、frieze pattern と Lie 超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$, $\mathfrak{osp}(m|2n)$ から来る無限系列たちと、76 つの例外型に分類されることが示された。

この辺りのトピックに関しては、たとえばサーベイ、データブック、教科書 [1, 6] がある。ただし、frieze pattern に関する説明は上述以上に簡潔なものはない。

3 Kac-Moody Lie 超代数と奇鏡映

super の圏とは、加法かつ monoidal 圏としてはただの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-gr-Vec}$ に他ならず、重要なのは symmetry (braiding) である。symmetry は、例えばベクトル空間の圏における symmetry は $v \otimes w$ を $w \otimes v$ に送る、いわゆる flip に他ならず空気のように自明で存在感のないものであるが、加法圏構造とも monoidal 圏構造とも独立であり、たとえば次元の概念を内在的に定義する重要な情報である。superalgebra は、ただの次数付き代数だが、Hopf superalgebra とくに Lie 超代数の定義にはこの symmetry が絡み、そこに非自明さが生じる。そもそも super なる考え方はもともとは物理由来とされ、数学だけ考えていたら非自明な定義とされていたが、こんにちでは純代数的にこれらを良いものと思う方法が何通りもあり、Nichols algebra や Weyl groupoid の分類もその一つだと思われる。(Nichols 代数や Weyl groupoid は純粋に圏論的、組み合わせ的対象で、定義から super の香りは全くしないことに注意)

Kac は有限次元 Kac-Moody Lie 超代数 ($\doteq$ basic classical Lie superalgebras) というべきクラスを分類したが、今ではこの分類は Nichols 代数の Weyl groupoid による分類に埋め込めると考えるのが、(残念ながら現状は Lie 超代数の専門家に広く受け入れられているとは言い難いが) 見通しの良い自然な見方だと講演者は考える (ただし帰着先の Heckenberger の証明が簡単というわけではなく、Lie 超代数から Nichols 代数への対応 [2] も地味に $D(2, 1; \alpha)$ 型についてはいまだに十分な説明を与えることができていないとも考える)。さらに一般の有限次元とも限らない regular symmetrizable Kac-Moody Lie superalgebras [11] も Weyl groupoid の守備範囲内である。(ただし type P, Q として知られる興味深い Lie 超代数は Kac-Moody 型でなく、守備範囲外である。) よい Kac-Moody Lie 超代数については、root 系とその基底の概念が自然に定義され、鏡映は偶鏡映と奇鏡映に二分され、奇鏡映は基底を本質的に異なるものにうつすと考えるのが自然であることはよく知られていた。この設定で Weyl groupoid を考えることは偶鏡映と奇鏡映を同時に考えるという考え方に相当し、講演者は奇鏡映とは何かということに対する最も良い説明もまた Weyl groupoid によってなされると考える。Azam-山根-Yousefzadeh (2015) [2] は、Weyl groupoid における最長元の存在を用い、有限次元 Kac-Moody Lie 超代数の既約表現の Kac による分類をこの上なく見通しよく回復している。

奇鏡映と表現論の関係についてはこれまで精力的に研究されて来たとは言いがたい。実際、Nichols 代数、Weyl groupoid の話ほど奇鏡映の研究を動機づけてくれるものは他にないように考えられる。以下、一般線型 Lie 超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ という具体例で説明する。

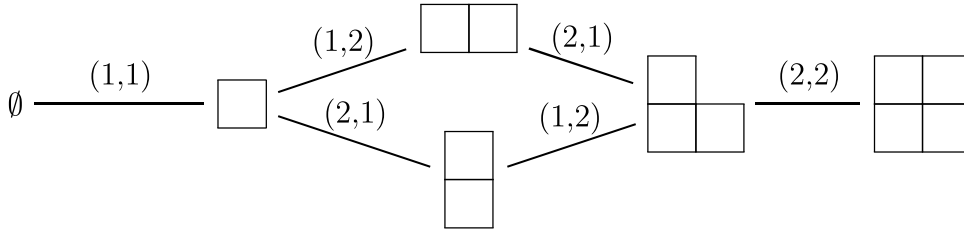
super が良いものだと認めたならば、一般線型超 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ は、一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(m+n)$ を区切って次数付けしたようなものだと理解しても本稿ではあまり困らない。偶部分是对角ブロックに対応し、Lie 代数 $\mathfrak{gl}_m \oplus \mathfrak{gl}_n$ に同型である。重要なのは奇ルートベクトルは普遍包絡代数の中で二乗すると 0 になることで、大きな違いをもたらす。 $\mathfrak{gl}(m|n)$ の root 分解、root 系、Borel 部分代数、鏡映の概念は、偶奇を忘れることで $\mathfrak{gl}(m+n)$ の対応する概念と同一視できる。鏡映は、偶奇を忘れなかったら偶鏡映と奇鏡映に分けられる。鏡映全体は (実際は groupoid と見るのが自然だが) 対称群 S_{m+n} をなすとおもえ、偶鏡映は Weyl 群 $S_m \times S_n$ をな

す。一方奇鏡映は groupoid をなすが、ある意味簡単なので辺彩色グラフと見るのが自然である。(このような雑な説明が許されるのは gl のみである。統一的に説明するには Weyl groupoid が真に必要なになる。) 例えば $gl(2|2)$ のばあい、Borel 部分代数の偶部分を固定したとき各 Borel 部分代数は、自然に 2×2 の矩形に含まれる Young 図形 (フランス式表示) と同一視することができる。

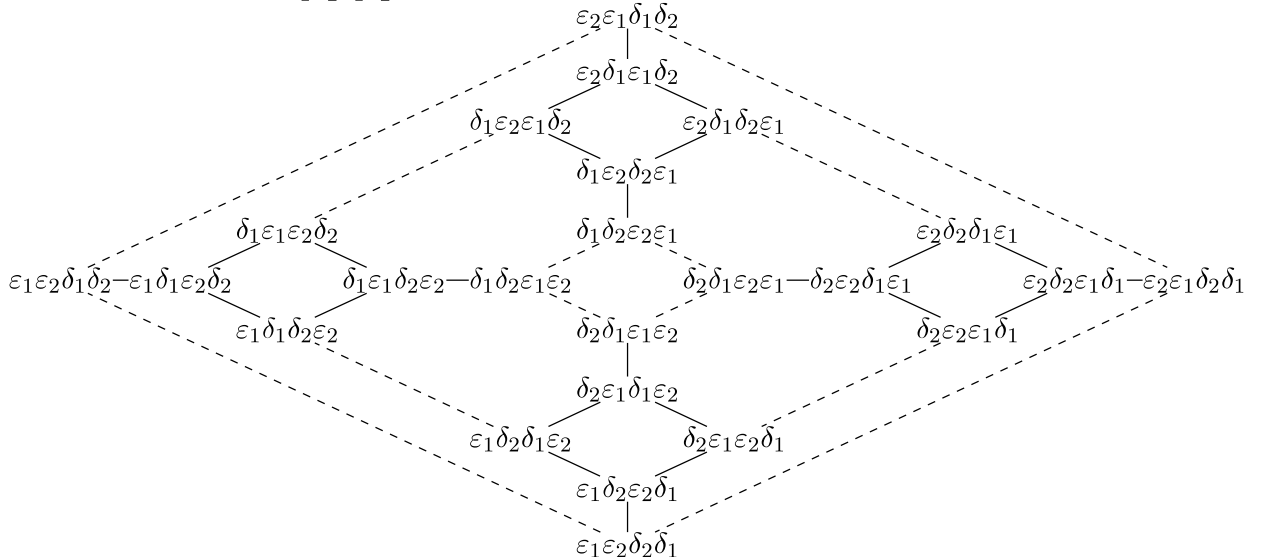
$$\emptyset \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right), \quad \square \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right), \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right), \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{array} \right), \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & 0 & * \end{array} \right)$$

ルート系の基底 / Borel 部分代数を点とし、奇鏡映を辺とし、その辺に Young 図形の箱の座標で彩色を施したグラフは、有限 Young 格子 $L(2, 2)$ と同一視できる。



全ての偶鏡映および奇鏡映のなす groupoid は、対称群 S_{2+2} と同一視できる。その Cayley グラフから偶鏡映をすべて取り除くと、4 つの有限 Young 格子 $L(2, 2)$ の互いに素な和に分解されこの四つのグラフは Weyl 群 $S_2 \times S_2$ の作用によって互いに移り合うと考えられる。我々はそのうちの一つを固定して議論する。これは、Borel 部分代数の偶部分を固定することに対応する。以下の図で、点線が偶鏡映、実線が奇鏡映で、 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1 \delta_2$ が standard 基底である。



b -Verma 加群

$$M^b(\lambda) := \text{Ind}_b^{\mathfrak{g}} k_\lambda$$

は、古典的な場合と同様の普遍性をもつが、Borel 部分代数 b に強く依存する．その simple top を weight 加群の圏において filt してできた Serre 部分圏を $\mathcal{O}^b$ といい、定義からこれは長さ有限のアーベル圏であり、さらに b -Verma 加群を含むことも示せる．

また、 $\mathcal{O}^b$ は b の偶部分にしか依存しないことは容易に確かめられ、したがって奇鏡映で移り合う Borel 部分代数に付随する b -Verma 加群はすべて同じ category $\mathcal{O}$ に含まれる．ただし b によって異なる最高ウェイト圏構造が入る．古典的な category $\mathcal{O}$ が最高ウェイト圏の典型例であるとすれば、super category $\mathcal{O}$ は複数の最高ウェイト圏構造をもつ圏の好例であると言える．

4 奇鏡映の exchange property

異なる Borel に付随する Verma を比べたい時、指標が同じものたちを全て考えるのが自然だと考えられる．詳しくは、

Lemma 4.1. 任意の *basic classical Lie superalgebra* $\mathfrak{g}$, ウェイト λ , および偶部分が一一致する Borel 部分代数 $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ に対して次が成り立つ．ここで ρ^b は $\mathfrak{b}$ に付随する Weyl ベクトルを表す：

- $\text{ch } M^b(\lambda - \rho^b) = \text{ch } M^{b'}(\lambda - \rho^{b'})$;
- $\dim \text{Hom}(M^b(\lambda - \rho^b), M^{b'}(\lambda - \rho^{b'})) = 1$.

簡単のため、 $\lambda = 0$ と仮定する．この場合、次の追加的な性質も成り立つ：

- 非零準同型の合成

$$M^b(-\rho^b) \longrightarrow M^{b'}(-\rho^{b'}) \longrightarrow M^b(-\rho^b)$$

は、 $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}'$ のとき常に零となる．

特に、奇鏡映で隣り合う Borel 部分代数に付随する加群の間の準同型が基本的であると考えられる．例えば、 $\mathfrak{gl}(2|2)$ の場合には、以下のような絵を考えることが自然であろう．

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & M^{(1^2)}(-\rho^{(1^2)}) & & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \nearrow & & \\
 M^{\emptyset}(-\rho^{\emptyset}) & \rightleftarrows & M^{(1)}(-\rho^{(1)}) & & M^{(21)}(-\rho^{(21)}) & \rightleftarrows & M^{(2^2)}(-\rho^{(2^2)}) \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \nwarrow & & \\
 & & & M^{(2)}(-\rho^{(2)}) & & &
 \end{array}$$

上の絵で加群の間の hom はスカラー倍除き一意なので、準同型をこの上なくよく理解することは、非零準同型の合成が非零となるのは正確にどのような場合かを決定することである．このようにして、奇（鏡映版）Verma の定理とでもいべきものは次のように簡潔かつ明示的に述べることができる．

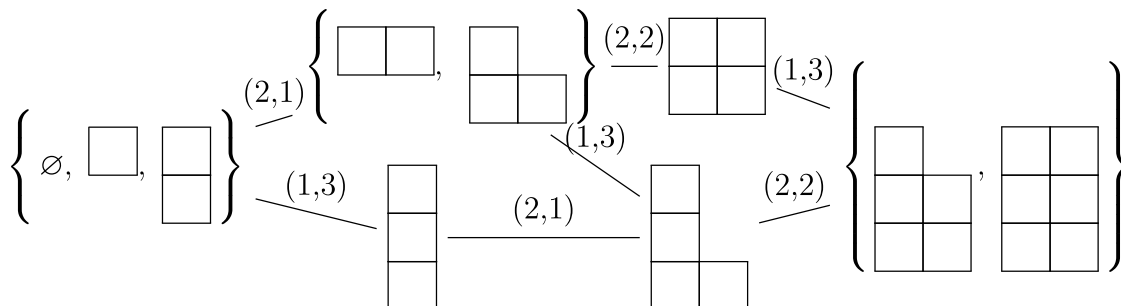
Theorem 4.2. [9][奇 Verma の定理] 奇鏡映で隣接する加群 $M^b(-\rho^b)$ の間の準同型の合成は、上の絵の上の walk w と自然に同一視できる．この同一視の下で、次は同値である：

1. $w \neq 0$ である。
2. w が *rainbow* である (すなわち, 各辺の色がすべて異なる)。
3. w が最短である (同じ始点・終点をもつ *walk* の中で最短)。

(2) と (3) の同値性は, Gorelik–Hinich–Serganova [5] によって指摘された, 奇鏡映に関する "exchange property" にほかならず, 奇 Verma の定理, その証明はこの性質の表現論的帰結とみなすことができる. この性質は, よく知られた Coxeter 群つまり偶鏡映に関する "exchange property" の類似物である. 実際, ある元の長さとその転倒数が一致するという有名な事実は, Cayley グラフにおいて「walk が最短であることと rainbow であることが同値である」という命題に対応する.

本稿の最も強調する部分の一つは、Heckenberger–Yamane [7] が Coxeter 群の場合を一般化して示した、Weyl groupoid の exchange property から、Weyl groupoid の Cayley graph から偶鏡映を消すことで、奇鏡映の exchange property を導くことができるということである。これは [5] にある説明よりはるかに易しいものと思われる。もし $\mathrm{gl}(m|n)$ だけを扱うのであれば、exchange property は自明であり、Weyl groupoid という概念を本稿に登場させる必要は必ずしもないかもしれない。しかし Weyl groupoid の概念により、奇 Verma 定理は、regular 対称化可 Kac–Moody Lie 超代数や対角型 Nichols 代数の設定へも拡張することができ、またその自然さを説明してくれる。

任意のウェイト λ に対しては、 $\mathbf{b} \neq \mathbf{b}'$ であっても $M^{\mathbf{b}}(\lambda - \rho^{\mathbf{b}}) \cong M^{\mathbf{b}'}(\lambda - \rho^{\mathbf{b}'})$ が成り立つ場合があり得るので奇鏡映で隣りあう加群が互いに非同型であるようにするために、適切な意味で色で割った辺収縮グラフを導入する．よいことに、exchange property はこの辺収縮グラフにも受け継がれ、奇 Verma 定理 は同じ形で成り立ち続ける．以下は $L(3, 2)$ の商グラフの例である．このようなグラフも Lie superalgebras 的にはとても自然ということである．



奇 Verma の定理の応用の一つとして, $\mathfrak{gl}(m|n)$ に関して, Coulembier–Serganova[4] による特別な Borel の取り方に基づく考察を, 見通しよく任意の Borel に一般化し, Verma 加群の射影次元が有限となる条件を求めることができた. 証明には Duflo–Serganova 関手と呼ばれる super に特有な関手を用いる。

また、奇 Verma の定理は自然な semibrick を導き、いくつかの場合で Verma 加群の構造の理解を助ける。

最近、辺収縮グラフの考察と奇 Verma の定理の応用として以下を得た。

Theorem 4.3. [8] $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m|n)$ とし、 λ を *integral weight*、 $\mathfrak{b}_1$ を *borel 部分代数* とする。もしある *Borel 部分代数* $\mathfrak{b}_2$ と重み μ に対して

$$M^{\mathfrak{b}_1}(\lambda) \cong M^{\mathfrak{b}_2}(\mu)^\vee$$

が成り立つならば、 $M^{\mathfrak{b}_1}(\lambda)$ は *distinguished Borel* () または *antidistinguished Borel* (n^m) のいずれかに関する Verma 加群と同型であり、さらに $L^{\mathfrak{b}_1}(\lambda)$ は *antidominant* である。

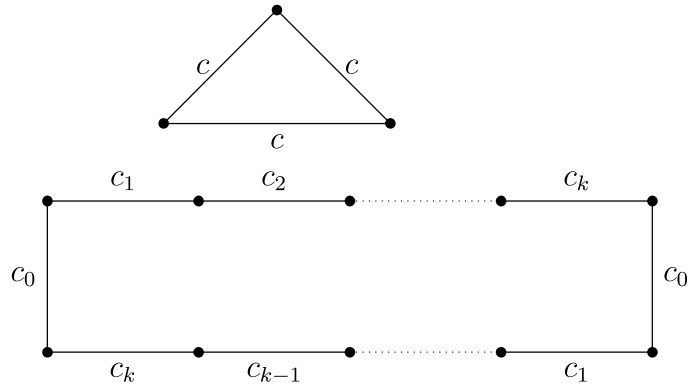
逆に、もし λ が *antidominant* であるならば次が成り立つ：

$$M^0(\lambda) \cong M^{(n^m)}(\lambda - 2\rho_{\bar{1}})^\vee,$$

ここで $\rho_{\bar{1}}$ は奇根の半和を表す。

5 Rainbow Boomerang Graphs

偶 Verma の定理と異なり奇 Verma の定理の証明は初等的であり、本質は、奇 Verma の定理での walk に関する条件、”rainbow iff shortest”に関する初等グラフ理論である。この条件は非常に強い。実際、この条件を満たす連結閉路（サイクル）は、次に示すものだけである：



ここで、辺の色は $c_0, c_1, \dots, c_k$ が互いにすべて異なることを満たし、また $k \geq 0$ とする。

例外型を除くことで以下の定義をする。これはある意味 root system 的な趣をすでに持っているクラスである。なお、応用数学でよく研究される ”rainbow connected graph” の遥かに強い版ともみなせる。”

Definition 5.1. 隣り合う辺の色が相異なる辺彩色グラフについて、その上の walk が常に ”rainbow iff shortest” を満たすとき、rainbow boomerang graph と呼ぶ。

Weyl groupoid や odd reflection groupoid の Caylay graph が好例である。

グラフの辺収縮という概念があるが、一般の辺彩色グラフについて、色と整合することは期待されない。rainbow boomerang graph の著しい点は、指定した色に関する辺収縮が自然な色つけを持ち、再び rainbow boomerang graph となることであり、これこそが奇 Verma の定理の本質である。

rainbow boomerang graph の定義は色を用いたが、実は不便ではあると思われるが色なしの特徴付けをもつ。以下は、齋藤琢弥氏に suggest されたものである。

Theorem 5.2. [10] 任意の有限の rainbow boomerang graph は、適切な（辺に *natural* な色付けを施した）ある hypercube Q_n に埋め込むことができる。さらに、hypercube Q_n 内の sub-edge-colored graph G が rainbow boomerang graph であることと、任意の subhypercube $Q_{n'} \subset Q_n$ に対して $G \cap Q_{n'}$ が connected であることは同値である。

参考文献

- [1] Nicolás Andruskiewitsch and Iván Angiono. On finite dimensional nichols algebras of diagonal type. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 7(3):353–573, 2017.
- [2] Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, and Malihe Yousofzadeh. Classification of finite-dimensional irreducible representations of generalized quantum groups via weyl groupoids. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 51(1):59–130, 2015.
- [3] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand. A certain category of $\mathfrak{g}$ -modules. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 10(2):1–8, 1976. English transl. in *Functional Anal. Appl.* 10 (1976), no. 2, 87–92.
- [4] Kevin Coulembier and Vera Serganova. Homological invariants in category for the general linear superalgebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 369(11):7961–7997, 2017.
- [5] Maria Gorelik, Vladimir Hinich, and Vera Serganova. Root groupoid and related lie superalgebras. *arXiv preprint arXiv:2209.06253*, 2022.
- [6] István Heckenberger and Hans-Jürgen Schneider. *Hopf algebras and root systems*, volume 247. American Mathematical Soc., 2020.
- [7] István Heckenberger and Hiroyuki Yamane. A generalization of coxeter groups, root systems, and matsumoto’s theorem. *Mathematische Zeitschrift*, 259(2):255–276, 2008.
- [8] Shunsuke Hirota. $\mathfrak{b}_{-1} - \text{verma} \setminus \mathfrak{b}_{-2} - \text{dualvermasupermodules}$. *arXiv preprint arXiv:2510.25276*, 2025.
- [9] Shunsuke Hirota. Odd verma’s theorem. *arXiv preprint arXiv:2502.14274*, 2025.
- [10] Shunsuke Hirota. Rainbow boomerang graphs. *arXiv preprint arXiv:2503.00275*, 2025.
- [11] Vera Serganova. Kac–moody superalgebras and integrability. In *Developments and trends in infinite-dimensional Lie theory*, pages 169–218. Springer, 2010.
- [12] Daya-Nand Verma. Structure of certain induced representations of complex semisimple lie algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 74:160–166, 1968. doi: 10.1090/S0002-9904-1968-11924-4.