

Inequalities defining polyhedral realizations and monomial realizations of crystal bases

金久保 有輝 (茨城大学 基礎自然科学野)

Yuki Kanakubo (Ibaraki University, Faculty of Basic Natural Science)

1 イントロダクション

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ について, その部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ や表現を組み合わせ論的に調べる際, 結晶基底は強力な道具となる. 結晶基底は, 多種多様な組み合わせ論的な表示方法を持ち, これらを用いることで, 表現の性質を効果的に調べられるようになる. そういった表示方法の中でも, 多面体表示は, $U_q^-(\mathfrak{g})$ に対する結晶基底 $B(\infty)$ の元を, ある多角錐の整数点で表示する. また, 単項式表示は, 可積分最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の元を, 二重変数のローラン単項式で表す. 本稿では, $B(\infty)$ を表示する多角錐を定める不等式が, 基本表現の結晶基底の単項式表示にトロピカライゼーションという操作を施すことで得られるという予想を紹介する.

2 量子群と結晶基底

2.1 記号

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を, 一般化カルタン行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ に付随する $\mathbb{C}$ 上の対称化可能なカツ・ムーディ代数とする. ここに, I は添字集合 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ である. $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ を, DA が対称行列となるような対角行列で, 成分 $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が互いに素であるものとする. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数, $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$ を単純ルート, $\{h_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}$ を単純コルートの集合とし, $\langle, \rangle$ を, $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の標準的なペアリングとする. P を, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を含むウェイト格子, $P_+ := \{\lambda \in P \mid \text{任意の } i \in I \text{ に対し, } \langle h_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $P^* = \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, P \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ とする. また, 各 $i \in I$ に対し, Λ_i を基本ウェイトとする. つまり, $\Lambda_i(h_j) = \delta_{i,j}$ を満たすものとする.

2.2 量子群

以下, q を不定元とし, 非負整数 $m, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($m \geq r$) に対し,

$$[r]_q := \frac{q^r - q^{-r}}{q - q^{-1}}, \quad [r]_q! := [r]_q [r-1]_q \cdots [1]_q, \quad \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[r]_q! [m-r]_q!}$$

と定める.

定義 2.1. 生成元 e_i, f_i, q^h ($i \in I, h \in P^*$) と以下の関係式で定義される, 単位元 1 を持つ $\mathbb{C}(q)$ -代数を, リー環 $\mathfrak{g}$ に付随する量子群と呼び, $U_q(\mathfrak{g})$ と書く:

- (i) $q^0 = 1, q^h q^{h'} = q^{h+h'}$,
- (ii) $q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i$,
- (iii) $q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i$,

$$(iv) \quad e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{d_i h_i} - q^{-d_i h_i}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

$$(v) \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_i}} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0 \quad (i \neq j),$$

$$(vi) \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_i}} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0 \quad (i \neq j).$$

$U_q(\mathfrak{g})$ は、以下のような三角分解を持つことが知られている：

$$U_q(\mathfrak{g}) = U_q^-(\mathfrak{g}) U_q(\mathfrak{g})_0 U_q^+(\mathfrak{g}), \quad U_q^-(\mathfrak{g}) = \langle f_i | i \in I \rangle, \quad U_q(\mathfrak{g})_0 = \langle q^h | h \in P^* \rangle, \quad U_q^+(\mathfrak{g}) = \langle e_i | i \in I \rangle.$$

各 $\lambda \in P_+$ に対し、可積分最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ は、次のような $U_q(\mathfrak{g})$ の表現である：ある $v_\lambda \in V(\lambda)$ という元が存在し、任意の $i \in I$ と $h \in P^*$ に対し、

$$e_i v_\lambda = 0, \quad q^h v_\lambda = q^{\lambda(h)} v_\lambda, \quad V(\lambda) = \langle f_{j_1} \cdots f_{j_r} v_\lambda | j_1, \dots, j_r \in I \rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-vect.sp.}}.$$

2.3 結晶基底

結晶基底について、基本的な結果を紹介する [3, 7].

$$\mathbb{A} = \left\{ \frac{f(q)}{g(q)} | f(q), g(q) \in \mathbb{C}[q], g(0) \neq 0 \right\}$$

と置く。表現 $V(\lambda)$ は、結晶基底 $(L(\lambda), B(\lambda))$ を持つことが知られている。ここに、 $L(\lambda)$ は結晶格子と呼ばれる $V(\lambda)$ の $\mathbb{A}$ 部分加群であり、 $V(\lambda) = \mathbb{C}(q) \otimes_{\mathbb{A}} L(\lambda)$ を満たす。また、 $B(\lambda)$ は $L(\lambda)/qL(\lambda)$ の $\mathbb{C}$ 基底である。 $B(\lambda)$ は次のような性質を持つ：

- $B(\lambda)$ は、次のような写像を持つ：

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B(\lambda) \rightarrow B(\lambda) \sqcup \{0\}.$$

これらは、表現の作用 $e_i, f_i : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$ の組み合わせ論的なアナログであると捉えられ、**柏原作用素**と呼ばれる。

- ある $\bar{v}_\lambda \in B(\lambda)$ が存在し、

$$B(\lambda) = \{ \tilde{f}_{j_1} \cdots \tilde{f}_{j_k} \bar{v}_\lambda | k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \dots, j_k \in I \} \setminus \{0\}.$$

結晶基底の元の個数は、表現の次元に一致する： $\sharp B(\lambda) = \dim V(\lambda)$.

- 写像 $\text{wt} : B(\lambda) \rightarrow P$ で

$$q^{\text{wt}(\tilde{f}_{j_1} \cdots \tilde{f}_{j_k} \bar{v}_\lambda)(h)} = (f_{j_1} \cdots f_{j_k} \cdot v_\lambda \in V(\lambda) \text{ の } q^h \text{ に対する固有値})$$

となるものが定まっている。

また、部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ も結晶基底 $(L(\infty), B(\infty))$ を持つことが知られている。 $L(\infty)$ は $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{A}$ 部分加群であり、 $B(\infty)$ は $L(\infty)/qL(\infty)$ における $\mathbb{C}$ 基底である。 $B(\infty)$ は次の性質を持つ：

- $B(\infty)$ は、写像

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B(\infty) \rightarrow B(\infty) \sqcup \{0\}$$

を持つ。

- ある $\bar{v}_\infty \in B(\infty)$ という元が存在し,

$$B(\infty) = \{\tilde{f}_{j_1} \cdots \tilde{f}_{j_k} \bar{v}_\infty \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \dots, j_k \in I\}.$$

- 写像 $\text{wt} : B(\infty) \rightarrow P$ が存在し,

$$q^{\text{wt}(\tilde{f}_{j_1} \cdots \tilde{f}_{j_k} \bar{v}_\infty)(h)} = (f_{j_1} \cdots f_{j_k} \in U_q^-(\mathfrak{g}) \text{ の } q^h \text{ に対する固有値})$$

が成り立つ. ここに, 各 $q^h \in U_q(\mathfrak{g})_0$ は, $U_q^-(\mathfrak{g})$ に,

$$q^h \cdot x := q^h x q^{-h} \quad (x \in U_q^-(\mathfrak{g}))$$

と作用している.

このように, 結晶基底を調べることで, 表現の次元や固有値など, 本質的な情報を獲得することができる. 後述する多面体表示や単項式表示などを用いることで, 結晶基底を組み合わせて論的に調べることができるようになる.

2.4 結晶

$B(\infty)$ や $B(\lambda)$ の性質を抽象化して, 結晶という概念が定義される [4]:

定義 2.2. 集合 $\mathcal{B}$ 上に, 写像 $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow P$, $\varepsilon_k, \varphi_k : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$, $\tilde{e}_k, \tilde{f}_k : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ ($k \in I$) が定まっていると仮定する. 次の条件が満たされるとき, 集合 $\mathcal{B}$ と, これらの写像の組は, **結晶**と呼ばれる: 各 $b, b' \in \mathcal{B}$ と $k \in I$ に対し,

- (1) $\varphi_k(b) = \varepsilon_k(b) + \langle h_k, \text{wt}(b) \rangle$,
- (2) $\tilde{e}_k(b) \in \mathcal{B}$ ならば, $\text{wt}(\tilde{e}_k b) = \text{wt}(b) + \alpha_k$, $\tilde{f}_k(b) \in \mathcal{B}$ ならば, $\text{wt}(\tilde{f}_k b) = \text{wt}(b) - \alpha_k$,
- (3) $\tilde{e}_k(b) \in \mathcal{B}$ ならば, $\varepsilon_k(\tilde{e}_k(b)) = \varepsilon_k(b) - 1$, $\varphi_k(\tilde{e}_k(b)) = \varphi_k(b) + 1$,
- (4) $\tilde{f}_k(b) \in \mathcal{B}$ ならば, $\varepsilon_k(\tilde{f}_k(b)) = \varepsilon_k(b) + 1$, $\varphi_k(\tilde{f}_k(b)) = \varphi_k(b) - 1$,
- (5) $\tilde{f}_k(b) = b' \Leftrightarrow b = \tilde{e}_k(b')$,
- (6) $\varphi_k(b) = -\infty$ ならば $\tilde{e}_k(b) = \tilde{f}_k(b) = 0$.

定義 2.3. (1) 二つの結晶 B_1, B_2 , に対し, 写像 $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \rightarrow B_2 \sqcup \{0\}$ は次の条件を満たすとき, **strict な射**と呼ばれる: $\psi(0) = 0$ であり, 各 $b \in B_1$ に対し,

- もし $\psi(b) \in B_2$ ならば, 各 $i \in I$ に対し,

$$\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b), \quad \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b), \quad \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b),$$

- $\tilde{e}_i(\psi(b)) = \psi(\tilde{e}_i(b))$, $\tilde{f}_i(\psi(b)) = \psi(\tilde{f}_i(b))$ が各 $i \in I$ に対して成り立つ. ここに, $\tilde{e}_i(0) = \tilde{f}_i(0) = 0$ と約束する.

- (2) Strict な射 $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \rightarrow B_2 \sqcup \{0\}$ が単射なとき, ψ は **strict な埋め込み**と呼ばれ, $\psi : B_1 \hookrightarrow B_2$ と記述する. もし ψ が全単射なら, ψ は **結晶の同型**と呼ばれ, B_1 と B_2 は結晶として同型と言われる.

3 多面体表示

結晶基底の組み合わせ論的な表示方法の一つとして、多面体表示を紹介する。 $B(\infty)$ の多面体表示を定めるためには、添え字の無限列 $\iota = (\cdots, i_2, i_1)$ ($i_k \in I$) を一つ固定する必要がある。 ι は次のマイルドな条件を満たすことを仮定する：

- 各 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し、 $i_j \neq i_{j+1}$,
- 各 $i \in I$ に対し、 $\#\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 1} | i_j = i\} = \infty$.

0 に収束する整数の無限列の集合 $\mathbb{Z}_\iota^\infty$ を定める：

$$\mathbb{Z}_\iota^\infty := \{(\cdots, a_2, a_1) | a_j \in \mathbb{Z}, a_k = 0 \ (k \gg 0)\}.$$

列 ι を用いて、この集合上に、柏原作用素 $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow \mathbb{Z}_\iota^\infty \sqcup \{0\}$ ($i \in I$) と、写像 $\text{wt} : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow P$, $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定める：まず、各 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $k \in I$ と $\mathbf{a} = (\cdots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}_\iota^\infty$ に対し、

$$\sigma_r(\mathbf{a}) := a_r + \sum_{j>r} a_{i_r, i_j} a_j \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}), \quad \sigma^{(k)}(\mathbf{a}) := \max_{r; i_r=k} \{\sigma_r(\mathbf{a})\},$$

$$M^{(k)}(\mathbf{a}) := \{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} | i_r = k, \sigma_r(\mathbf{a}) = \sigma^{(k)}(\mathbf{a})\}$$

と置く。各 $\mathbf{a} = (\cdots, a_j, \cdots, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}_\iota^\infty$ に対し、写像 $\text{wt} : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow P$ を $\text{wt}(\mathbf{a}) := -\sum_{j=1}^\infty a_j \alpha_{i_j}$, $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow \mathbb{Z}$ ($i \in I$) を

$$\varepsilon_i(\mathbf{a}) := \sigma^{(i)}(\mathbf{a}), \quad \varphi_i(\mathbf{a}) := \langle h_i, \text{wt}(\mathbf{a}) \rangle + \varepsilon_i(\mathbf{a})$$

で定める。柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow \mathbb{Z}_\iota^\infty \sqcup \{0\}$ を

$$(\tilde{f}_i(\mathbf{a}))_r := a_r + \delta_{r, \min M^{(i)}(\mathbf{a})},$$

$$(\tilde{e}_i(\mathbf{a}))_r := a_r - \delta_{r, \max M^{(i)}(\mathbf{a})} \text{ if } \sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > 0; \text{ o.w. } \tilde{e}_i(\mathbf{a}) := 0$$

で定める。

定理 3.1. [4, 9]

$B(\infty)$ から $\mathbb{Z}_\iota^\infty$ への結晶の strict な埋め込み

$$\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}_\iota^\infty$$

で、 $\Psi_\iota(\bar{v}_\infty) = (\cdots, 0, 0, 0)$ を満たすものが唯一つ存在する。

上の定理において、像 $\text{Im}(\Psi_\iota)$ は、 $B(\infty)$ と結晶として同型となる。この $\text{Im}(\Psi_\iota)$ の具体形を求めよ、という問は、多面体表示の理論で中心的な問題となる。なお、 $\mathfrak{g}$ が有限次元単純リー環で、 $s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ がワイル群の最長元 w_0 の最短表示のとき、 $\iota = (\cdots, i_{N+1}, i_N, \cdots, i_2, i_1)$ と、 ι の最初の N 個の添え字が $(i_N, \cdots, i_2, i_1)$ となるように取ると、 $\text{Im}(\Psi_\iota)$ は、string 錐と呼ばれる多角錐の整数点全体と一致することが知られている [6].

本稿では、全ての ι を考えるのではなく、以下の adapted という条件を満たすもののみを考える：

定義 3.2. [2] $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ を対称化可能一般化カルタン行列とし、 $\iota = (\cdots, i_3, i_2, i_1)$ を添え字の無限列とする。次の条件が満たされるとき、 ι は A に **adapted** であると言われる：各 $i, j \in I$ で $a_{i,j} < 0$ となるものに対し、 i, j のみで構成される ι の部分列が

$$(\cdots, i, j, i, j, i, j, i, j) \quad \text{または} \quad (\cdots, j, i, j, i, j, i, j, i)$$

となる。 A が明かな場合は、単に adapted である、という。

例 3.3. $\mathfrak{g}$ が $A_2^{(1)}$ 型, $\iota = (\cdots, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3)$ のとき,

- 1, 2 で構成される部分列: $(\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$
- 2, 3 で構成される部分列: $(\cdots, 2, 3, 2, 3, 2, 3)$
- 1, 3 で構成される部分列: $(\cdots, 1, 3, 1, 3, 1, 3)$

よって, ι は A に adapted である.

4 単項式表示

結晶基底 $B(\lambda)$ の組み合わせ論的表示方法の一つとして, 単項式表示を紹介する. 以下のような, 二重変数 $X_{s,i}$ のローラン単項式の集合を考える:

$$\mathcal{Y} := \left\{ \prod_{s \in \mathbb{Z}, i \in I} X_{s,i}^{\zeta_{s,i}} \mid \zeta_{s,i} \in \mathbb{Z}, \text{ 有限個の } (s,i) \text{ を除いて } \zeta_{s,i} = 0 \right\}.$$

Adapted な列 ι に対し, 整数の組 $(p_{i,j})_{i,j \in I; a_{i,j} < 0}$ を,

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & i, j \text{ で構成される } \iota \text{ の部分列が } (\cdots, j, i, j, i, j, i), \\ 0 & i, j \text{ で構成される } \iota \text{ の部分列が } (\cdots, i, j, i, j, i, j) \end{cases}$$

で定める. $\mathcal{Y}$ 上の写像 wt , $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$, φ_i , ε_i を次のように定義する: まず, $X = \prod_{s \in \mathbb{Z}, i \in I} X_{s,i}^{\zeta_{s,i}} \in \mathcal{Y}$ に対し, $\text{wt}(X) := \sum_{s,i} \zeta_{s,i} \Lambda_i$ と定め, 更に

$$\varphi_i(X) := \max \left\{ \sum_{k \leq s} \zeta_{k,i} \mid s \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \varepsilon_i(X) := \varphi_i(X) - \text{wt}(X)(h_i)$$

とする. 次に

$$A_{s,k} := X_{s,k} X_{s+1,k} \prod_{j \in I; a_{j,k} < 0} X_{s+p_{j,k},j}^{a_{j,k}} \quad (s \in \mathbb{Z}, k \in I).$$

と置き, $\mathcal{Y}$ 上の柏原作用素を

$$\tilde{f}_i X := \begin{cases} A_{n_{f_i},i}^{-1} X & \varphi_i(X) > 0, \\ 0 & \varphi_i(X) = 0, \end{cases} \quad \tilde{e}_i X := \begin{cases} A_{n_{e_i},i} X & \varepsilon_i(X) > 0, \\ 0 & \varepsilon_i(X) = 0 \end{cases}$$

で定める. ここに,

$$n_{f_i} := \min \left\{ r \in \mathbb{Z} \mid \varphi_i(X) = \sum_{k \leq r} \zeta_{k,i} \right\}, \quad n_{e_i} := \max \left\{ r \in \mathbb{Z} \mid \varphi_i(X) = \sum_{k \leq r} \zeta_{k,i} \right\}.$$

定理 4.1. [5, 8] ローラン単項式 $X \in \mathcal{Y}$ を, $\tilde{e}_i(X) = 0$ が任意の $i \in I$ に対して成り立つように取り, $\lambda = \text{wt}(X) \in P_+$ と置く. このとき, $\mathcal{Y}$ の部分集合

$$\{\tilde{f}_{j_m} \cdots \tilde{f}_{j_1} X \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \dots, j_m \in I\} \setminus \{0\} \subset \mathcal{Y}$$

は, 結晶基底 $B(\lambda)$ と同型となる. これを $B(\lambda)$ の単項式表示と呼ぶ.

$s \in \mathbb{Z}, k \in I$ に対し, $X = X_{s,k}$ とした単項式表示を, $\mathcal{M}_{s,k,\iota}$ とする:

$$\mathcal{M}_{s,k,\iota} = \{\tilde{f}_{j_m} \cdots \tilde{f}_{j_1} X_{s,k} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \dots, j_m \in I\} \setminus \{0\} \subset \mathcal{Y}.$$

上の定理により, これは, $B(\Lambda_k)$ と結晶として同型になる.

5 主結果

$\mathfrak{g}$ を対称化可能なカツ・ムーディ代数とし, $\iota = (\cdots, i_2, i_1)$ を, そのカルタン行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ に adapted な列とする. 各 $(\cdots, c_2, c_1) \in \mathbb{Z}_\iota^\infty$ に対し, c_k を, 次のように二重変数で書き直す: もし $i_k = j$ で, j が部分列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ の中で s 回現れるとき,

$$c_k = c_{s,j} \quad (5.1)$$

と書くことにする. 例えば, $\iota = (\cdots, 3, 1, 2, 3, 1, 2)$ のとき, $(\cdots, c_3, c_2, c_1) = (\cdots, c_{2,3}, c_{2,1}, c_{2,2}, c_{1,3}, c_{1,1}, c_{1,2})$ となる.

また, $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $x_k : \mathbb{Z}_\iota^\infty \rightarrow \mathbb{Z}$ を,

$$x_k(\cdots, c_2, c_1) = c_k$$

で定め, (5.1) と同じ規則で, $x_k = x_{s,j}$ と二重変数で書き直す. ここで,

$$\mathcal{H} := \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}, j \in I} \zeta_{s,j} x_{s,j} \mid \zeta_{s,j} \in \mathbb{Z}, \text{ 有限個の } (s, j) \text{ を除いて } \zeta_{s,j} = 0 \right\}$$

と置く. 写像

$$Trop : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$$

を

$$Trop \left(\prod_{s \in \mathbb{Z}, k \in I} X_{s,k}^{\zeta_{s,k}} \right) = \sum_{s \in \mathbb{Z}, k \in I} \zeta_{s,k} x_{s,k}.$$

で定める.

予想 5.1. [1] $\mathcal{M}_{s,k,\iota}$ を, $\mathfrak{g}^L$ に対する単項式表示とする. ここに, $\mathfrak{g}^L$ は, 一般化カルタン行列 ${}^t A$ に付随するカツ・ムーディ代数である. このとき,

$$\text{Im}(\Psi_\iota) = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_\iota^\infty \mid \text{任意の } \varphi \in \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \in I} Trop(\mathcal{M}_{s,k,\iota}) \text{ に対し, } \varphi(\mathbf{a}) \geq 0 \right\}$$

が成り立つ.

この予想が正しいければ, $B(\infty)$ に対する多面体表示を定める不等式が, 基本表現の単項式表示 $\mathcal{M}_{s,k,\iota}$ から得られる, ということになる. 一部の $\mathfrak{g}$ に対しては, 予想が正しいことが示されている:

定理 5.2. [1]

- (1) $\mathfrak{g}$ が A_n, B_n, C_n, D_n 型の有限次元単純リー環のとき, 予想は正しい.
- (2) $\mathfrak{g}$ がランク 2 のカツ・ムーディ代数のとき, 予想は正しい.
- (3) $\mathfrak{g}$ が $A_{n-1}^{(1)}, B_{n-1}^{(1)}, C_{n-1}^{(1)}, D_{n-1}^{(1)}, A_{2n-2}^{(2)}, A_{2n-3}^{(2)}, D_n^{(2)}$ 型の古典的アフィン型リー環のとき, 予想は正しい.

例 5.3. $\mathfrak{g}$ が C_2 型, $\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ のとき, 単項式表示 $\mathcal{M}_{s,1,\iota}$ は

$$X_{s,1} \xrightarrow{1} \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}} \xrightarrow{2} \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}} \xrightarrow{1} \frac{1}{X_{s+2,1}}$$

であり, $\mathcal{M}_{s,2,t}$ は

$$X_{s,2} \xrightarrow{2} \frac{X_{s+1,1}^2}{X_{s+1,2}} \xrightarrow{1} \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+2,1}} \xrightarrow{1} \frac{X_{s+1,2}}{X_{s+2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{X_{s+2,2}}$$

である. 各ローラン単項式のトロピカライゼーション (*Trop*) を取ることで, 以下の不等式を得る:

$$\begin{aligned} c_{s,1} &\geq 0, \quad c_{s,2} - c_{s+1,1} \geq 0, \quad c_{s+1,1} - c_{s+1,2} \geq 0, \quad -c_{s+2,1} \geq 0, \\ c_{s,2} &\geq 0, \quad 2c_{s+1,1} - c_{s+1,2} \geq 0, \quad c_{s+1,1} - c_{s+2,1} \geq 0, \\ c_{s+1,2} - 2c_{s+2,1} &\geq 0, \quad -c_{s+2,2} \geq 0. \end{aligned}$$

s を $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 全体で動かして, 不等式を整理することで, B_2 型の多面体表示 $\text{Im}(\Psi_t)$ は, 以下で与えられる:

$$\text{Im}(\Psi_t) = \{(c_{m,j}) \in \mathbb{Z}_t^\infty \mid c_{1,2} \geq c_{2,1} \geq c_{2,2} \geq 0, \quad c_{1,1} \geq 0, \quad c_{m,1} = c_{m,2} = 0 \ (m \geq 3)\}.$$

References

- [1] Y.Kanakubo, A conjecture on monomial realizations and polyhedral realizations for crystal bases, arXiv:2503.06417.
- [2] Y.Kanakubo, T.Nakashima, Adapted sequence for polyhedral realization of crystal bases, Communications in Algebra 48, Issue 11, 4732–4766 (2020).
- [3] M.Kashiwara, On crystal bases of the q -analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J., 63 (2), 465–516 (1991).
- [4] M.Kashiwara, The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula, Duke Math. J., 71, no 3, 839–858 (1993).
- [5] M.Kashiwara, Realizations of crystals, Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001), Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp.133–139 (2003).
- [6] P.Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups 3, no. 2, 145–179 (1998).
- [7] G.Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. 3, no. 2, 447–498 (1990).
- [8] H.Nakajima, t -analogs of q -characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n , Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001), Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp.141–160 (2003).
- [9] T.Nakashima, A.Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, Adv. Math. **131**, no. 1, 253–278 (1997).