

有限群が作用する超平面配置とその特性準多項式

大阪大学・大学院理学研究科 内海 凌

Ryo Uchiumi

Graduate School of Science,

The University of Osaka *

概要

整数係数で定義される超平面配置に対して、対応する $\text{mod } q$ 配置の補空間の数え上げ関数として特性準多項式が定義される。これは超平面配置の重要な不変量である特性多項式を含んだものである。また、エルハート準多項式の $\text{mod } q$ 版といわれることもある。一方、エルハート理論では、その同変理論が導入されており、近年盛んに研究されている。本研究では、有限群が作用する超平面配置に対して、同変版の特性準多項式を、対応する $\text{mod } q$ 配置の補空間に関する置換指標として導入し、同変版エルハート準多項式との関連を述べる。なお、本研究は [Uch, arXiv:2508.10236] に基づく。

1 Hyperplane arrangement and characteristic quasi-polynomial

1.1 Hyperplane arrangement

V を体 $\mathbb{K}$ 上の ℓ 次元線形空間とする。 V の**超平面 (hyperplane)** とは、 V の $\ell - 1$ 次元 (アフィン) 部分空間のことをいう。すなわち、 V の超平面 H は、零でない線形関数 $\alpha : V \rightarrow \mathbb{K}$ と定数 $b \in \mathbb{K}$ を用いて

$$H = \alpha^{-1}(b) = \left\{ x \in V \mid \alpha(x) = b \right\}$$

と表される。 V 上の**超平面配置 (hyperplane arrangement)** とは、 V の超平面の有限集合のことをいう。超平面配置の研究は、代数や組合せ論だけでなく、トポロジーや代数幾何、応用数学など多岐にわたる。

V 上の超平面配置 $\mathcal{A}$ の部分配置 (部分集合) $\mathcal{B}$ に対して、

$$H_{\mathcal{B}} := \begin{cases} V & \mathcal{B} = \emptyset; \\ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H & \mathcal{B} \neq \emptyset \end{cases}$$

と定める。 $\mathcal{A}$ の**特性多項式 (characteristic polynomial)** とは、次で定義される多項式のことを

* E-mail: uchiumi.ryou.1xu@ecs.osaka-u.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

いう:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ H_{\mathcal{B}} \neq \emptyset}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{\dim H_{\mathcal{B}}}.$$

$\chi_{\mathcal{A}}(t)$ は次数 $\ell = \dim V$ の monic 多項式であり, $t^{\ell-1}$ の係数はちょうど $-\#\mathcal{A}$ である. 特性多項式は, $\mathcal{A}$ の超平面たちがどのように交わっているかという情報だけから得られる多項式である. 一方で, 特性多項式は超平面配置 $\mathcal{A}$ に関する様々な情報を有しており, 超平面配置の最も重要な不変量であるといわれることもある. たとえば, 超平面配置 $\mathcal{A}$ の補空間

$$M(\mathcal{A}) := V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

に関して, 次のことが知られている.

Theorem 1.1. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}$ 上の線形空間 V 上の超平面配置とする.

- (Zaslavsky [Zas75, Theorem A,C]) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で, $\mathcal{A}$ が少なくとも一つの (0 次元) 交点をもてば^{*1},
 – $M(\mathcal{A})$ の連結成分の個数は $|\chi_{\mathcal{A}}(-1)|$;
 – $M(\mathcal{A})$ の有界な連結成分の個数は $|\chi_{\mathcal{A}}(1)|$.
- (Orlik–Solomon [OS80, Theorem 2.6]) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であるとき, $M(\mathcal{A})$ の Poincaré 多項式は次と等しい:

$$(-t)^{\dim V} \chi_{\mathcal{A}}(-t^{-1}).$$

1.2 Characteristic quasi-polynomial

$L \cong \mathbb{Z}^{\ell}$ を格子 (lattice) とし, $L_{\mathbb{R}} := L \otimes \mathbb{R}$ とする. 特性準多項式のために, 格子 L 上で定義される超平面配置を定義する. $L^{\vee} := \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ を L の双対とする. 零でない元 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^{\vee}$ を固定し, $L_{\mathbb{R}}$ の超平面 H_i を

$$H_i = H_{\alpha_i} := \left\{ x \in L_{\mathbb{R}} \mid \alpha_i(x) = 0 \right\}$$

で定義する. このような超平面を L 上で定義される超平面といい, それらの有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を L 上で定義される超平面配置という. つまり, L 上で定義される超平面は, 整数係数の一次式を用いて表されるような超平面である.

各正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $L_q := L/qL$ とおき, $\pi_q : L \rightarrow L_q$ を自然に定義される射影とする. 各超平面 H_i に対して, L_q の “超平面” を

$$H_{i,q} := \left\{ \pi_q(x) \in L_q \mid \alpha_i(x) \equiv 0 \pmod{q} \right\}$$

^{*1} このとき, $\mathcal{A}$ は本質的 (essential) であるという.

で定め, L_q 上の“超平面配置” $\mathcal{A}_q := \{H_{1,q}, \dots, H_{n,q}\}$ の補空間

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}; q) &:= L_q \setminus \bigcup_{H_{i,q} \in \mathcal{A}_q} H_{i,q} \\ &= \left\{ \pi_q(x) \in L_q \mid \alpha_i(x) \not\equiv 0 \pmod{q} \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\} \right\} \end{aligned}$$

を考える. この有限集合の位数 $\#M(\mathcal{A}; q)$ について, 次のことが知られている.

Theorem 1.2 ([KTT08, Theorem 2.4]). $\#M(\mathcal{A}; q)$ は q に関する準多項式である. すなわち, 正整数 $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$ と多項式 $f^{(1)}, \dots, f^{(\tilde{n})} \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して,

$$\#M(\mathcal{A}; q) = f^{(r)}(q) \quad \text{if } q \equiv r \pmod{\tilde{n}}.$$

さらに, 次を満たす:

- (1) $\gcd\{\tilde{n}, r_1\} = \gcd\{\tilde{n}, r_2\}$ であるとき, $f^{(r_1)} = f^{(r_2)}$ (**gcd-property**);
- (2) $\gcd\{\tilde{n}, r\} = 1$ であるとき, $f^{(r)}$ は $\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}$ に等しい.

この準多項式を $\mathcal{A}$ の**特性準多項式 (characteristic quasi-polynomial)** と呼び, $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ で表す:

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \#M(\mathcal{A}; q).$$

正整数 $\tilde{n}$ を準多項式の**周期 (period)** といい, 各多項式 $f^{(r)}$ は準多項式の**第 r 構成素 (r -th constituent)** という. 準多項式の周期は一意的ではないことに注意する. 周期となりうる正整数のうち最小のものを準多項式の**最小周期 (minimum period)** という.

Theorem 1.2 (2) によると, q が十分大きな素数であれば, $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \chi_{\mathcal{A}}(q)$ となる^{*2}. したがって, 格子 L 上で定義されるような超平面配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式は, いくつかの十分大きな素数 q に対する $M(\mathcal{A}; q)$ の数え上げによって計算できることがわかる^{*3}.

A を整数係数 $\ell \times m$ 行列とし, $r := \text{rank } A$ とする. このとき, ℓ 次 unimodular 行列 U , m 次 unimodular 行列 V , および $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して,

$$UAV = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$$

とできる. $d_1, \dots, d_r$ を A の**単因子 (elementary divisors)** という.

行列 A の単因子 $d_1, \dots, d_r$ および $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\Pi(A; q) := \prod_{j=1}^r \gcd\{d_j, q\}$$

とする.

Theorem 1.2 の証明には単因子論が使われる. 特に, 次の補題が重要である.

^{*2} この事実は, Kamiya–Takemura–Terao 以前からも知られていた (cf. [Yos25, §12.2]).

^{*3} このようにして特性多項式を計算する方法は**有限体法 (finite field method)** と呼ばれている.

Lemma 1.3 ([KTT08, Lemma 2.1]). $f : \mathbb{Z}^\ell \rightarrow \mathbb{Z}^m$ を $\mathbb{Z}$ -準同型とする. 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $f_q : \mathbb{Z}_q^\ell \rightarrow \mathbb{Z}_q^m$ を f から誘導される準同型とする. このとき, $\# \ker f_q$ は q に関する準多項式で, gcd-property を満たす. さらに, A を f の表現行列とすると,

$$\# \ker f_q = \Pi(A; q) \cdot q^{\ell-r}$$

で, $\# \ker f_q$ の最小周期は A の単因子のうち最大のものに等しい.

格子 $L \cong \mathbb{Z}^\ell$ の $\mathbb{Z}$ -基底 $B = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ を固定し, $B^\vee = \{\beta_1^\vee, \dots, \beta_\ell^\vee\} \subseteq L^\vee$ を B の双対基底とする. L 上の超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ に対して, 整数係数 $\ell \times n$ 行列 $S = (s_{ij})_{ij}$ を

$$\alpha_i = s_{1i}\beta_1^\vee + \dots + s_{\ell i}\beta_\ell^\vee \quad \text{for } i \in \{1, \dots, n\}$$

を満たすように定義する. 空でない部分集合 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対して, S_J を J に関する列に対応した S の小行列とし, $r(J) := \text{rank } S_J$ とする. S_J の単因子のうち最大のものを $d(J)$ で表す. このとき, Lemma 1.3 と包除原理によって

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = q^\ell + \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{\#J} \cdot \Pi(S_J; q) \cdot q^{\ell-r(J)}$$

となり, 正整数

$$\tilde{n}_{\mathcal{A}} := \text{lcm} \left\{ d(J) \mid J \subseteq \{1, \dots, n\}, J \neq \emptyset \right\}$$

は $\mathcal{A}$ の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ の周期となる. このような周期は **lcm-period** と呼ばれており, 特性準多項式の最小周期となることが知られている [HTY23, Theorem 1.2].

Remark 1.4. $\mathcal{A}$ が L 上で定義される中心的でない (すなわち, 原点を含まない超平面をもつ) 超平面配置である場合, $\#M(\mathcal{A}; q)$ はある非負整数 q_0 を超える範囲に限って準多項式となる [KTT11, Theorem 3.1]. またこのとき, lcm-period $\tilde{n}_{\mathcal{A}}$ は準多項式の周期であるが, 一般に最小周期であるとは限らない [HTY23, Theorem 1.1].

2 Equivariant version of characteristic quasi-polynomial

2.1 Group action on lattice

Γ を有限群とし, 格子 L に対して群準同型 $\rho : \Gamma \rightarrow \text{GL}(L)$ による線形な作用が与えられているとする. ただし, ρ は単射であると仮定する. 各元 $\gamma \in \Gamma$ に対して, L の固定された $\mathbb{Z}$ -基底 $B = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ に関する $\rho(\gamma)$ の表現行列を R_γ で表す. ただし, $x = x_1\beta_1 + \dots + x_\ell\beta_\ell \in L$ を $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ と同一視するとき,

$$\rho(\gamma)(x) = xR_\gamma$$

となるようにする.

このとき、各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、有限群 Γ の L_q への作用 $\rho_q : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L_q)$ が

$$\rho_q(\gamma) \circ \pi_q = \pi_q \circ \rho(\gamma) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma$$

を満たすように定まる．論文 [UY26] (cf. [Uch24]) では、 γ で固定される L_q の点の個数

$$\#L_q^\gamma = \#\left\{x \in L_q \mid \rho_q(\gamma)(x) = x\right\},$$

あるいは L_q の置換指標 $\chi_{L_q} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$;

$$\chi_{L_q}(\gamma) = \#L_q^\gamma$$

が q に関してどのように振る舞うのかを研究している． I を ℓ 次単位行列とし、 $r(\gamma) := \mathrm{rank}(R_\gamma - I)$ とする． $R_\gamma - I$ の単因子のうち最大のものを $d(\gamma)$ で表す．

Theorem 2.1 ([UY26, Theorem 1.3]).

- 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $\#L_q^\gamma$ は q に関する gcd-property を満たす準多項式である．特に、

$$\#L_q^\gamma = \#\ker(R_\gamma - I)_q = \Pi(R_\gamma - I; q) \cdot q^{\ell - r(\gamma)}$$

であり、その最小周期は $d(\gamma)$ である．

- 置換指標 χ_{L_q} は q に関する gcd-property を満たす準多項式で、lcm-period

$$\tilde{n}_\Gamma := \mathrm{lcm}\left\{d(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\right\}$$

はその最小周期である．

2.2 Hyperplane arrangement with group action

L を格子とし、有限群 Γ が準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ によって作用しているとする．このとき、 Γ の $L^\vee$ への作用 $\rho^\vee : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L^\vee)$ を

$$\rho^\vee(\gamma)(\alpha) = \alpha \circ \rho(\gamma^{-1}) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma, \alpha \in L^\vee$$

となるように定める．

$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を L 上で定義された超平面配置とする． $\mathcal{A}$ が Γ の作用で**不変** (**Γ -invariant**) であるとは、任意の $\gamma \in \Gamma$ および $H_i \in \mathcal{A}$ に対して $\rho(\gamma)(H_i) \in \mathcal{A}$ を満たすときにいう．また、

$$\begin{aligned} \rho(\gamma)(H_i) &= \left\{ \rho(\gamma)(x) \in L_\mathbb{R} \mid \alpha_i(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in L_\mathbb{R} \mid \alpha_i(\rho(\gamma)^{-1}(x)) = 0 \right\} \\ &= H_{\rho^\vee(\gamma)(\alpha_i)} \end{aligned}$$

となるため、 $\mathcal{A}$ が Γ の作用で不変であることは、任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\rho^\vee(\gamma)(\{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_n\}) = \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_n\}$$

であることと同値である。

以下、 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ は L 上で定義された超平面配置で、有限群 Γ の作用で不変な超平面配置とする。このとき、各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、 $\mathcal{A}_q$ の補空間 $M(\mathcal{A}; q)$ は Γ の作用 ρ_q に関して不変な集合となる [Uch, Lemma 2.3]。したがって、 $M(\mathcal{A}; q)$ の置換指標 $\chi_{\mathcal{A}, q} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ を考えることができる。置換表現に関する表現行列が置換行列であることに注意すると、各 $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma) = \#\left\{x \in M(\mathcal{A}; q) \mid \rho_q(\gamma)(x) = x\right\}$$

である。特に、 $\gamma = 1$ (Γ の単位元) のときは

$$\chi_{\mathcal{A}, q}(1) = \chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q)$$

であり、 $\mathcal{A} = \emptyset$ (空配置) であるときは

$$\chi_{\emptyset, q} = \chi_{L_q}$$

となることに注意する。

以降本稿では、 $\chi_{\mathcal{A}, q}$ の q に関する振る舞いや Ehrhart 理論とのかかわりについて紹介する。

Γ の類関数 (class function) とは、関数 $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$\varphi(\sigma^{-1}\gamma\sigma) = \varphi(\gamma) \quad \text{for } \gamma, \sigma \in \Gamma$$

を満たすものをいい、 Γ の類関数全体を $\text{Cl}(\Gamma)$ で表す。 $\text{Cl}(\Gamma)$ は Γ の複素数値関数がなす内積空間の部分空間である。ただし、内積は

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma) \overline{\psi(\gamma)}$$

で与えられる。また、 Γ の既約指標全体 $\{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ は、 $\text{Cl}(\Gamma)$ の正規直交基底をなす。 Γ の既約指標の有理数係数の一次結合で表される Γ の類関数の集合を

$$\text{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma) := \left\{ m_1\chi_1 + \dots + m_k\chi_k \in \text{Cl}(\Gamma) \mid m_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

とする。 $\text{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ の元が Γ の指標であるためには、 Γ の既約指標の非負整数係数の一次結合として表せることが必要十分である。

Theorem 2.2 ([Uch, Theorem 2.6]). $\mathcal{A}$ を L 上で定義された超平面配置とする。

- (1) 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma)$ は q に関する準多項式で、gcd-property を満たす。
- (2) $\chi_{\mathcal{A}, q}$ は q に関する準多項式で、gcd-property を満たす。ただし、 $\chi_{\mathcal{A}, q}$ の各構成素は $\text{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ の元を係数とする多項式である。

証明の概略. (1) は、Theorem 1.2, Theorem 2.1 と同様に単因子論を使って証明する。 $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ とする。部分集合 $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対して、 $\ell \times (\ell + \#J)$ 行列 $S_{\gamma, J}$ を

$$S_{\gamma, J} = \begin{pmatrix} R_{\gamma} - I & S_J \end{pmatrix}$$

で定義し, $r(\gamma, J) := \text{rank } S_{\gamma, J}$ とする. $S_{\gamma, J}$ の単因子のうち最大のものを $d(\gamma, J)$ とする. このとき, Lemma 1.3 と包除原理によって

$$\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} \cdot \Pi(S_{\gamma, J}; q) \cdot q^{\ell - r(\gamma, J)}$$

となる. $\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma)$ が gcd-property を満たす準多項式であることはこの式から得られる.

(2) は, $\chi_{\mathcal{A}, q}$ の既約指標分解

$$\chi_{\mathcal{A}, q} = m_{q,1}\chi_1 + \dots + m_{q,k}\chi_k \quad (2.1)$$

を使って示す. このとき, 各係数 $m_{q,i}$ は

$$m_{q,i} = (\chi_i, \chi_{\mathcal{A}, q}) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_i(\gamma) \chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma)$$

となる. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma)$ が q に関する準多項式であることから, $m_{q,i}$ も q に関する準多項式で, gcd-property を満たすこともわかる. 特に, 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $m_{q,i} \in \mathbb{Z}$ となるため, 準多項式 $m_{q,i}$ の各構成素は有理数係数の多項式である. したがって, 式 (2.1) の右辺は q に関して gcd-property を満たす準多項式であり, 各構成素は $\text{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ の元を係数とする多項式となる. $\square$

準多項式 $\chi_{\mathcal{A}, q}$ について,

$$\tilde{N} := \text{lcm} \left\{ d(\gamma, J) \mid \gamma \in \Gamma, J \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}$$

はその周期である. ただし, $d(1, \emptyset) = 1$ とみなす. 一般に, lcm-period $\tilde{N}$ は準多項式 $\chi_{\mathcal{A}, q}$ の最小周期ではない. $\chi_{\mathcal{A}, q}$ の最小周期 $\tilde{n}_{\min}$ については次のことがわかっている:

- $\tilde{n}_{\mathcal{A}}, \tilde{n}_{\Gamma}$ は $\tilde{N}$ の約数である.
- ([Uch, Proposition 2.8]) $\tilde{n}_{\mathcal{A}}$ は $\tilde{n}_{\min}$ の約数である.
- ([Uch, Example 2.9]) $\tilde{n}_{\Gamma}$ が $\tilde{n}_{\min}$ の約数であるとは限らない.
- ([Uch, Example 2.11]) $\tilde{n}_{\Gamma}$ が $\tilde{n}_{\min}$ の約数であっても, $\text{lcm}\{\tilde{n}_{\mathcal{A}}, \tilde{n}_{\Gamma}\}$ が $\tilde{n}_{\min}$ に等しいとは限らない.

Example 2.3. $L = \mathbb{Z}^2$ とする. Γ を位数 4 の巡回群とし, $\gamma \in \Gamma$ をその生成元の一つとする. 準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}(L)$ を

$$\rho(\gamma): (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1) \quad \text{for } (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$$

となるように定める. すなわち, $\gamma \in \Gamma$ は L に対して 90° 回転として作用する. L 上で定義される超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2\}$ を

$$H_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \right\}, \quad H_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

で定める. $\mathcal{A}$ は Γ の作用で不変である (図 1 参照).

$\mathcal{A}$ の特性準多項式は

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \begin{cases} q^2 - 2q + 1 & \text{if } \gcd\{5, q\} = 1; \\ q^2 - 2q + 5 & \text{if } \gcd\{5, q\} = 5 \end{cases}$$

である.

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, γ^k ($k \in \{1, 2, 3\}$) で固定される L_q の元の集合 $L_q^{\gamma^k}$ について

$$L_q^{\gamma} = L_q^{\gamma^3} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 1; \\ \{(0, 0), (\frac{q}{2}, \frac{q}{2})\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 2, \end{cases}$$

$$L_q^{\gamma^2} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 1; \\ \{(0, 0), (\frac{q}{2}, 0), (0, \frac{q}{2}), (\frac{q}{2}, \frac{q}{2})\} & \text{if } \gcd\{2, q\} = 2 \end{cases}$$

となる. これらの点のうち, $(0, 0), (\frac{q}{2}, 0), (0, \frac{q}{2})$ は L_q の “超平面” $H_{1,q}, H_{2,q}$ の少なくとも一方に含まれるため,

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \chi_{\mathcal{A},q}(\gamma^2) = \chi_{\mathcal{A},q}(\gamma^3) = \begin{cases} 0 & \text{if } \gcd\{2, q\} = 1; \\ 1 & \text{if } \gcd\{2, q\} = 2 \end{cases}$$

であるとわかる. よって,

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\chi_R q^2 - 2\chi_R q + \chi_R) & \text{if } \gcd\{10, q\} = 1; \\ \frac{1}{4}(\chi_R q^2 - 2\chi_R q + 4\mathbf{1}) & \text{if } \gcd\{10, q\} = 2; \\ \frac{1}{4}(\chi_R q^2 - 2\chi_R q + 5\chi_R) & \text{if } \gcd\{10, q\} = 5; \\ \frac{1}{4}(\chi_R q^2 - 2\chi_R q + 4\chi_R + 4\mathbf{1}) & \text{if } \gcd\{10, q\} = 10 \end{cases}$$

と計算できる. ただし, $\mathbf{1}$ は Γ の自明な指標, χ_R は Γ の正則表現の指標である:

$$\mathbf{1}(\gamma^k) = 1, \quad \chi_R(\gamma^k) = \begin{cases} 4 & \text{if } k = 4; \\ 0 & \text{if } k \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad \text{for } k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

3 Via Ehrhart theory

3.1 Equivariant version of Ehrhart quasi-polynomial

L を格子とし, $L_{\mathbb{R}} := L \otimes \mathbb{R}$ とする. $P \subseteq L_{\mathbb{R}}$ を有理多面体とする. すなわち, 多面体 P のすべての頂点が有理点であることを仮定する. 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, qP で P を q 倍に膨らませた多面体を表す. このとき, qP 上の格子点を数え上げる関数

$$L_P(q) := \#(qP \cap L)$$

は q に関する準多項式となる. これを **Ehrhart 準多項式 (Ehrhart quasi-polynomial)** と呼ぶ. P が格子多面体 (すべての頂点が L 上にある多面体) であるとき, L_P は単に多項式 (最小周期 1 の準多項式) となる.

Remark 3.1. 一般に, Ehrhart 準多項式は gcd-property を満たさない. gcd-property を満たす Ehrhart 準多項式は, zonotope という性質によって特徴づけられている [DY25, Theorem 5.5].

多面体 P を膨らませる代わりに格子 L を縮小させることでも, Ehrhart 準多項式と同じ数え上げ関数が得られることに注意する. すなわち,

$$L_P(q) = \#(qP \cap L) = \#(P \cap \tfrac{1}{q}L)$$

である.

多面体 P の相対的内部 (relative interior) を P° で表す. P° 上の格子点を数え上げる関数 $L_{P^\circ}(q)$ も q に関する準多項式であり, 次の相互関係が知られている:

$$L_{P^\circ}(q) = (-1)^{\dim P} L_P(-q).$$

格子 L に対して, 有限群 Γ が $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(L)$ によって作用しているとする. L 上の有理多面体 P が Γ の作用で不変であると仮定する^{*4}. 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $qP \cap L$ の置換指標を $\chi_{P,q} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ で表す. つまり,

$$\chi_{P,q}(\gamma) = \#\left\{x \in qP \cap L \mid \rho(\gamma)(x) = x\right\} = \#(qP^\gamma \cap L) = \#(P^\gamma \cap \tfrac{1}{q}L)$$

である. ただし, P^γ は P の $\rho(\gamma)$ によって固定される点からなる部分集合で, 有理多面体である [Sta11, Lemma 5.4]. このとき, $\chi_{P,q}$ は q に関する準多項式であることが知られている [Sta11, Theorem 5.7]. また, $\gamma = 1$ のとき, $\chi_{P,q}(1) = L_P(q)$ であることがわかる. したがって, $\chi_{P,q}$ は同変版の Ehrhart 準多項式と位置づけられる.

3.2 Via equivariant Ehrhart theory

L を格子とし, 有限群 Γ が $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(L)$ によって作用しているとする. $T := L_{\mathbb{R}}/L$ とおき, $\pi_T : L_{\mathbb{R}} \rightarrow T$ を自然に定まる射影とする. このとき, 有限群 Γ の T への作用 $\rho_T : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(T)$ が

$$\rho_T(\gamma) \circ \pi_T = \pi_T \circ \rho(\gamma) \quad \text{for } \gamma \in \Gamma$$

を満たすように定まる. ただし,

$$\mathrm{GL}(T) := \left\{g : T \rightarrow T \mid \text{there exists } g' \in \mathrm{GL}(L_{\mathbb{R}}) \text{ such that } g \circ \pi_T = \pi_T \circ g'\right\}$$

である.

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$T[q] := \left\{t \in T \mid qt = 0\right\} = \left\{\pi_T(x) \in T \mid qx \in L\right\}$$

とする. $T[q]$ の元は T の **q -torsion point** と呼ばれる. このとき, 集合 $T[q]$ を L_q の代わりに考えることができる. 実際, 写像 $f : T[q] \rightarrow L_q$ を

$$f : \pi_T(x) \mapsto \pi_q(qx) \quad \text{for } x \in L_{\mathbb{R}}$$

^{*4} しばしば, 平行移動による違いは無視される.

となるように定めると, f は well-defined な全単射である. さらに, f は Γ -equivariant, すなわち

$$f \circ \rho_T(\gamma) = \rho_q(\gamma) \circ f \quad \text{for } \gamma \in \Gamma$$

を満たすことがわかる [Uch, Proposition 3.1]. つまり, $T[q]$ と L_q は, Γ が作用する空間として同一視できる.

$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を L 上で定義される超平面配置とする. T 上で $M(\mathcal{A}; q)$ の代わりとなる集合を考える. 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_i^k := \left\{ x \in L_{\mathbb{R}} \mid \alpha_i(x) = k \right\}$$

とおき, アフィン超平面の集合

$$\mathcal{A}^{\text{aff}} := \left\{ H_i^k \mid i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

を与える. アフィン配置 $\mathcal{A}^{\text{aff}}$ の補空間を

$$M(\mathcal{A}^{\text{aff}}) := L_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}^{\text{aff}}} H$$

とする. $x, y \in L_{\mathbb{R}}$ が $\pi_T(x) = \pi_T(y)$ を満たすとき, $x \in M(\mathcal{A}^{\text{aff}})$ ならば $y \in M(\mathcal{A}^{\text{aff}})$ となることからわかるため, $\mathcal{A}$ における T 上の補空間

$$T(\mathcal{A}) := \pi_T(M(\mathcal{A}^{\text{aff}})) = \left\{ \pi_T(x) \in T \mid \alpha_i(x) \notin \mathbb{Z} \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

を考えることができる. さらに, 写像 f は $T(\mathcal{A})$ の q -torsion point の集合 $T(\mathcal{A})[q]$ と $M(\mathcal{A}; q)$ の間の全単射を誘導する. したがって, 同変版の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}, q}$ は $T(\mathcal{A})[q]$ の置換指標と一致することがわかる [Uch, Corollary 3.7]:

$$\chi_{\mathcal{A}, q}(\gamma) = \# \left\{ t \in T(\mathcal{A})[q] \mid \rho_T(\gamma)(t) = t \right\}.$$

補空間 $M(\mathcal{A}^{\text{aff}})$ の連結成分を $\mathcal{A}^{\text{aff}}$ の**部屋 (chamber)** と呼ぶ. $\mathcal{A}^{\text{aff}}$ の部屋全体からなる集合を $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\text{aff}})$ とする. T 上の補空間 $T(\mathcal{A})$ の連結成分全体からなる集合を $\mathcal{C}_T$ とすると,

$$\mathcal{C}_T = \left\{ \pi_T(C) \mid C \in \mathcal{C}(\mathcal{A}^{\text{aff}}) \right\}$$

となる. 記号の乱用だが, 各部屋 $C \in \mathcal{A}^{\text{aff}}$ に対して, $\pi_T(C)$ 上の q -torsion point を数え上げる関数を

$$L_{\pi_T(C)}(q) = \#(\pi_T(C) \cap T[q])$$

で表す. $L_{\pi_T(C)}(q)$ は q に関する準多項式である. 特に C が有界であれば, $L_{\pi_T(C)}$ は C の Ehrhart 準多項式 L_C と一致する. このとき, $T(\mathcal{A})[q]$ の点を $T(\mathcal{A})$ の連結成分ごとに数えることで, $\mathcal{A}$ の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ は

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \sum_{\pi_T(C) \in \mathcal{C}_T} L_{\pi_T(C)}(q)$$

と表すことができる.

以下, $\mathcal{C}_T$ の元 $\pi_T(C)$ を単に C で表すことにする. 有限群 Γ の作用 $\rho_T: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(T)$ は $\mathcal{C}_T$ への作用を誘導する. この作用での γ による固定点の集合を $\mathcal{C}_T^\gamma$, 元 $C \in \mathcal{C}_T$ に関する固定部分群を Γ_C で表す:

$$\mathcal{C}_T^\gamma := \left\{ C \in \mathcal{C}_T \mid \gamma(C) = C \right\}, \quad \Gamma_C := \left\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(C) = C \right\}.$$

部分群 Γ_C による $C \cap T[q]$ の置換表現を $\chi_{C,q}^{\Gamma_C}: \Gamma_C \rightarrow \mathbb{C}$ で表す:

$$\chi_{C,q}^{\Gamma_C}(\gamma) = \# \left\{ t \in C \cap T[q] \mid \rho_T(\gamma)(t) = t \right\} \quad \text{for } \gamma \in \Gamma_C.$$

このとき, 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して, $T(\mathcal{A})[q]$ の $\rho_T(\gamma)$ による固定点を $T(\mathcal{A})$ の連結成分ごとに数えることで

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \sum_{C \in \mathcal{C}_T^\gamma} \chi_{C,q}^{\Gamma_C}(\gamma) \quad (3.1)$$

となることがわかる.

H を Γ の部分群とする. H の指標 $\theta: H \rightarrow \mathbb{C}$ における Γ の誘導指標 (induced character) とは, 次で定まる指標 $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \theta: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ のことをいう:

$$\left(\mathrm{Ind}_H^\Gamma \theta \right)(\gamma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma \\ \sigma^{-1}\gamma\sigma \in H}} \theta(\sigma^{-1}\gamma\sigma).$$

$\{C_1, \dots, C_k\}$ を $\mathcal{C}_T$ の Γ -軌道の完全代表系とする. 次の定理は, 本稿の主結果である.

Theorem 3.2 ([Uch, Theorem 4.3]). 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \sum_{i=1}^k \mathrm{Ind}_{\Gamma_{C_i}}^\Gamma \chi_{C_i,q}^{\Gamma_{C_i}}.$$

Theorem 3.2 は 式 (3.1) から得られる (ここでの証明は省略する). 特に, $\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ の部屋がすべて有界であるとき, $\chi_{\mathcal{A},q}$ が同変版の Ehrhart 準多項式の誘導指標の和として表せることを意味する. したがって, $\chi_{\mathcal{A},q}$ は有理多面体上の格子点の数え上げによって計算することができる.

Example 3.3. ここでは, Example 2.3 と同一の例を扱う: $L = \mathbb{Z}^2$ とする. Γ を位数 4 の巡回群とし, $\gamma \in \Gamma$ をその生成元の一つとする. 準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(L)$ を

$$\rho(\gamma): (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1) \quad \text{for } (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$$

となるように定める. すなわち, $\gamma \in \Gamma$ は L に対して 90° 回転として作用する. L 上で定義される超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2\}$ を

$$H_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \right\}, \quad H_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

で定める.

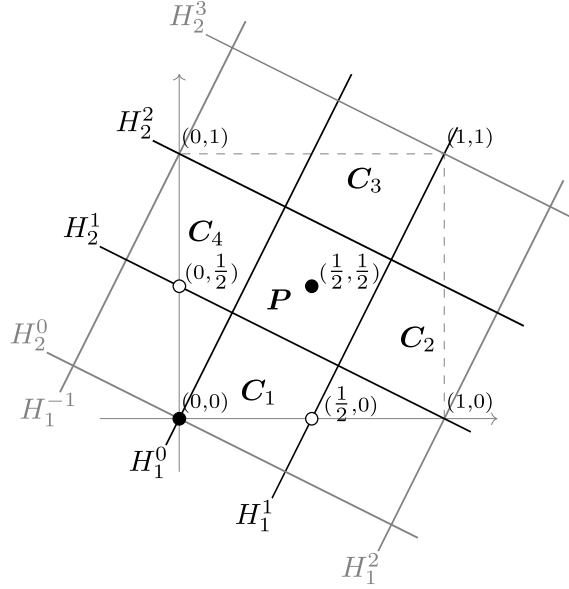


図1 Example 2.3, Example 3.3 における $\mathcal{A}^{\text{aff}}$ の図

このとき、 $\mathcal{A}$ に関する $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の補空間 $T(\mathcal{A})$ は、図 1 のように P, C_1, C_2, C_3, C_4 の 5 つの連結成分からなる。 Γ の作用に関する $\mathcal{C}_T$ の Γ -軌道は $\{P\}$ と $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ の 2 つに分かれる。したがって、 $\Gamma_P = \Gamma, \Gamma_{C_1} = \{1\}$ であるから、

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \text{Ind}_{\Gamma_P}^{\Gamma} \chi_{P,q}^{\Gamma_P} + \text{Ind}_{\Gamma_{C_1}}^{\Gamma} \chi_{C_1,q}^{\Gamma_{C_1}} = \chi_{P,q} + L_{C_1}(q) \cdot \chi_R$$

となる。

3.3 Coxeter arrangement

Coxeter 配置 $\mathcal{A}$ について、置換指標 $\chi_{\mathcal{A},q}$ の Theorem 3.2 を用いた表示を紹介する。

E を ℓ 次元ユークリッド空間とし、 $(\cdot, \cdot)$ をその内積とする。 $\Phi \subseteq E$ をランク ℓ のルート系とする。 Φ の単純ルート $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ を固定し、 Φ^+ を対応する正ルートの集合とする。 Δ は E の基底をなす。 Φ の最高ルート (highest root) を $\tilde{\alpha}$ とし、単純ルートの一次結合として

$$\tilde{\alpha} = c_1\alpha_1 + \dots + c_\ell\alpha_\ell$$

と表す。

Φ の単純ルートで生成される格子 $Q := Q(\Phi)$ をルート格子 (root lattice) という。 Φ のコウェイト格子 (coweight lattice) $Z := Z(\Phi)$, コルート格子 (coroot lattice) $\check{Q} := \check{Q}(\Phi)$ とは、それ

それ

$$Z = Z(\Phi) = \left\{ x \in E \mid (\alpha, x) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \alpha \in \Phi \right\},$$

$$\check{Q} = \check{Q}(\Phi) = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z} \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$$

で定義される格子のことをいう。コルート格子 $\check{Q}$ はコウェイット格子 Z の部分群で、その指数^{*5} $f := (Z : \check{Q})$ は有限である。また、 Z はルート格子 Q の双対である。以下、ルート格子の各元 $\beta \in Q$ は写像 $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}$;

$$\beta(x) = (\beta, x)$$

と同一視する。 Δ に関する双対基底を $\{\varpi_1^\vee, \dots, \varpi_\ell^\vee\} \subseteq Z$ で表す。つまり、 $\alpha_i(\varpi_j^\vee) = \delta_{ij}$ を満たす。

各ルート $\alpha \in \Phi$ に対して、超平面 H_α を

$$H_\alpha := \left\{ x \in E \mid \alpha(x) = 0 \right\}$$

で定める。 Φ の **Coxeter 配置 (Coxeter arrangement)** とは、超平面配置

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Phi) = \left\{ H_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \right\}$$

のことをいう。 $Q = Z^\vee$ であるから、各 H_α は Z 上で定義される超平面、Coxeter 配置 $\mathcal{A}$ は Z 上で定義される超平面配置とみなせる。

各ルート $\alpha \in \Phi$ に対して、写像 $s_\alpha : E \rightarrow E$ を

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

で定義する。 s_α は超平面 H_α を鏡映面とする鏡映で、このような鏡映たちで生成される有限鏡映群 $W := W(\Phi)$ は **Weyl 群 (Weyl group)** と呼ばれる。Weyl 群 W は鏡映群として E に作用し、ルート系 Φ を固定する。このとき、 W の Q, Z への作用 $\rho_Q : W \rightarrow \text{GL}(Q)$, $\rho_Z : W \rightarrow \text{GL}(Z)$ が定まり、それぞれ $w \in W$ に対して

$$\rho_Q(w) : \beta \mapsto w(\beta), \quad \rho_Z(w) : x \mapsto w(x)$$

を満たす。さらに、 E の内積 $(\cdot, \cdot)$ は W で不変であり、作用 ρ_Q は Z の双対としての作用 $\rho_Z^\vee$ に一致することがわかる。また、 W の作用に関して、Coxeter 配置 $\mathcal{A}$ は不変である。

Coxeter 配置 $\mathcal{A}$ の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ は、 Z 上で定義される超平面配置の特性準多項式として定義される：

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \# \left\{ \pi_q(x) \in Z_q \mid \alpha(x) \not\equiv 0 \pmod{q} \text{ for all } \alpha \in \Phi^+ \right\}.$$

^{*5} Lie theory では **index of connection** と呼ばれることがある。

アフィン配置 $\mathcal{A}^{\text{aff}}$ の部屋のうち,

$$A_{\circ} := \left\{ x \in E \mid \begin{array}{l} \alpha_i(x) > 0 \text{ for all } i \in \{1, \dots, \ell\}, \\ \tilde{\alpha}(x) < 1 \end{array} \right\}$$

を Φ の **fundamental alcove** という. その閉包 $\overline{A_{\circ}}$ は単体であり, 凸包

$$\text{conv} \left\{ 0, \frac{\varpi_1^{\vee}}{c_1}, \dots, \frac{\varpi_{\ell}^{\vee}}{c_{\ell}} \right\}$$

に等しい. $\mathcal{A}$ の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}$ と fundamental alcove $A_{\circ}$ の格子 Z に関する Ehrhart 準多項式の間には次の関係が知られている [Yos18, Proposition 3.7]:

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\text{quasi}}(q) = \frac{\#W}{f} L_{A_{\circ}}(q). \quad (3.2)$$

$T = E/Z$ とし, $\pi_T : E \rightarrow T$ を射影とする. T 上の補空間 $T(\mathcal{A})$ の連結成分全体からなる集合 $\mathcal{C}_T$ が $A_{\circ}(= \pi_T(A_{\circ}))$ を含むことに注意する.

Proposition 3.4. W の $\mathcal{C}_T$ への作用に関して,

- (1) $A_{\circ}$ を含む軌道 $W(A_{\circ})$ は $\mathcal{C}_T$ に等しい [Uch, Proposition 5.1].
- (2) $A_{\circ}$ に関する固定部分群 $W_{A_{\circ}}$ は部分群 $Z/\check{Q}$ に同型である (cf. [Bou, Ch.VI §2.3]).

したがって, Theorem 3.2, Proposition 3.4 (1) によって, 次が得られる.

Theorem 3.5 ([Uch, Theorem 5.2]). 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\chi_{\mathcal{A},q}$ は fundamental alcove $A_{\circ}$ に関する同変版の Ehrhart 準多項式の誘導指標に等しい:

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \text{Ind}_{W_{A_{\circ}}}^W \chi_{A_{\circ},q}^{W_{A_{\circ}}}.$$

この式に単位元 1 を代入すると, 式 (3.2) が復元される.

Example 3.6. Φ をタイプ A_{ℓ} のルート系とする:

$$\Phi = \left\{ e_i - e_j \mid i, j \in \{1, \dots, \ell+1\}, i \neq j \right\}.$$

対応する Weyl 群 W は $\ell+1$ 次対称群で, Φ に対しては $\{e_1, \dots, e_{\ell+1}\}$ への置換によって作用する. このとき, $W_{A_{\circ}}$ は巡回置換 $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ \ell+1)$ で生成される $\ell+1$ 次巡回群である. σ^k ($k \in \{1, \dots, \ell+1\}$) で固定される $A_{\circ}$ の点からなる多面体 $A_{\circ}^{\sigma^k}$ の Ehrhart 準多項式を計算することで,

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\sigma^k) = \begin{cases} \varphi(d) \cdot (q-d) \cdots (q-d(g-1)) & \text{if } q \in d\mathbb{Z}; \\ 0 & \text{if } q \notin d\mathbb{Z} \end{cases}$$

であるとわかる. ただし,

$$g := \gcd\{\ell+1, k\}, \quad d := \frac{\ell+1}{g}$$

であり, φ は Euler の totient 関数である. また, $w \in W$ が $W_{A_{\circ}}$ のどの元とも共役でないとき, $\chi_{\mathcal{A},q}(w) = 0$ である.

References

- [Bou] N. Bourbaki, Lie Groups and Lie algebras: Chapters 4–6, Springer-Verlag, BerlinHeidelberg New York, 2002.
- [DY25] C. De Vries and M. Yoshinaga, Ehrhart Quasi-Polynomials of Almost Integral Polytopes, Discrete & Computational Geometry, **73** (2025), no. 1, 177–196.
- [HTY23] A. Higashitani, T.N. Tran and M. Yoshinaga, Period Collapse in Characteristic Quasi-Polynomials of Hyperplane Arrangements, International Mathematics Research Notices, **2023** (2023), no. 10, 8934–8963.
- [Hum90] J.E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press, 1990.
- [KTT08] H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, Journal of Algebraic Combinatorics, **27** (2008), no. 3, 317–330.
- [KTT11] H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of Non-Central Integral Arrangements Modulo Positive Integers, Annals of Combinatorics, **15** (2011), no. 3, 449–464.
- [OS80] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, Inventiones Mathematicae, **56** (1980), no. 2, 167–189.
- [Sta11] A. Stapledon, Equivariant Ehrhart theory, Advances in Mathematics, **226** (2011), no. 4, 3622–3654.
- [Uch] R. Uchiumi, The characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements with actions of finite groups, (2025), arXiv:2508.10236.
- [Uch24] 内海 凌, 格子への線形な有限群作用における $\text{mod } q$ 置換表現の準多項式性について, (2024), RIMS 講究録 No.2317, 組合せ論的表現論の発展 (2024 年 10 月).
- [UY26] R. Uchiumi and M. Yoshinaga, The quasi-polynomiality of $\text{mod } q$ permutation representation for a linear finite group action on a lattice, Journal of Algebra, **689** (2026), no. 1, 501–518.
- [Yos18] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials, Tohoku Mathematical Journal, **70** (2018), no. 1, 39–63.
- [Yos25] 吉永正彦, 『やさしくまなぶ超平面配置』 (数学セミナーライブラリー), 日本評論社, 2025.
- [Zas75] T. Zaslavsky, Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes, Memoirs of the American Mathematical Society, (1975), no. 154, American Mathematical Society, Providence.