

$N = 1$ 超対称 Virasoro 代数と自由 fermion 代数 の直和の q -変形

摂南大学・基礎理工学機構 大久保勇輔

Yusuke Ohkubo

Institute for Fundamental Sciences, Setsunan University

概要

量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数の自由場表示から、 q -変形 Virasoro 代数を導出できることが知られている。本稿では、この導出の枠組みを $\mathfrak{gl}_2$ 型の量子トロイダル代数に適用することで得られる新しい代数の性質について紹介する。この場合に現れる代数は、 $N = 1$ 超対称 Virasoro 代数 SVir と自由 fermion 代数 F の直和 $\text{SVir} \oplus F$ の q -変形とみなすことができる。さらに、この代数は2つのスクリーニング作用素をもち、閉じた2次関係式を満たす。これを用いた最高ウェイト表現の解析から、Kac 行列式の因子化も予想される。尚、本稿の第5節までは [1] に基づく。

1 背景

q -変形 Virasoro 代数 $q\text{-Vir}$ は、Macdonald 多項式や5次元ゲージ理論 (q -変形版の AGT 対応) などに深く関わる重要な量子代数であり、その発見以来、多くの研究が進められてきた。概要でも述べたように、量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数と呼ばれるアフィン量子群のある種の一般化から、 $q\text{-Vir}$ を導出できることが知られている [2]。本稿では、この導出方法を量子トロイダル $\mathfrak{gl}_2$ 代数に適用すると、 $\text{SVir} \oplus F$ の q -変形が得られること、およびその代数の性質について解説する。 $q\text{-Vir}$ が多くの応用をもつように、この代数にも様々な応用が期待できる。

以下、量子トロイダル $\mathfrak{gl}_n$ 代数を $\mathcal{E}_n$ と書く。 $\mathcal{E}_2$ から $\text{SVir} \oplus F$ の q -変形が得られることは、AGT 対応 (共形場理論の相関関数とゲージ理論の分配関数の対応関係) の観点から理解できる。この対応を自然に理解する1つの見方として、Virasoro 代数を拡張したある代数の表現空間において、特殊な基底 (固定点基底とも呼ばれる) に着目する方法がある。詳細は省くが、例えば以下の表に挙げる代数または表現に対して、その特殊な基底をとることができ、それぞれの代数や表現が、表に示したゲージ理論と対応することが知られている。¹

	代数または表現	対応するゲージ理論
q -変形前	$\text{Vir} \oplus H$ or $W(\mathfrak{sl}_N) \oplus H$	$\mathbb{R}^4$ 上の4次元 $U(N)$ ゲージ理論
	$\text{SVir} \oplus F \oplus H \oplus H$	$\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ 上の4次元 $U(2)$ ゲージ理論
q -変形版	$\mathcal{E}_1$ のレベル N 表現 ($\sim q\text{-Vir} \otimes H$ or $q\text{-}W(\mathfrak{sl}_N) \otimes H$)	$\mathbb{R}^4 \times S^1$ 上の5次元 $U(N)$ ゲージ理論

(Vir : Virasoro 代数, H : Heisenberg 代数, $W(\mathfrak{sl}_N)$: $\mathfrak{sl}_N$ 型の W 代数,
 $q\text{-Vir}$: q -変形 Virasoro 代数, $q\text{-}W(\mathfrak{sl}_N)$: $\mathfrak{sl}_N$ 型の q -変形 W 代数)

¹文献については全てを挙げ切ることはいできないが、例えば [3, 4, 5, 6, 7] を参照されたい。

さらに、AGT 対応を動機とした研究として、intertwining 作用素を用いたアプローチもある。例えば、 $\mathcal{E}_1$ の intertwining 作用素を用いて、 $\mathbb{R}^4 \times S^1$ 上の 5 次元ゲージ理論の分配関数を再現することができる [8]。また [9] では、一般に $\mathcal{E}_n$ の intertwining 作用素を用いて、 $(\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_n) \times S^1$ 上の分配関数も構成されている。

$\mathcal{E}_1$ のレベル 2 表現から、Heisenberg 代数 H を分離することで q -Vir が得られるため、これらの状況を鑑みると、 $\mathcal{E}_2$ の同様の表現から、2 つ Heisenberg 代数 H を分離することで、 $SVir \oplus F$ の q -変形が現れることが期待される。

2 量子トロイダル gl_2 代数からの導出

まずは量子トロイダル gl_2 代数 $\mathcal{E}_2$ から、 $N = 1$ 超対称 Virasoro 代数 $SVir$ と自由 fermion 代数 F の直和 $SVir \oplus F$ の q -変形を導出する。

2.1 量子トロイダル gl_2 代数の定義

q, d を generic な複素パラメータとし、

$$q_1 = q^{-1}d, \quad q_2 = q^2, \quad q_3 = q^{-1}d^{-1} \quad (2.1)$$

とおく。このとき、 $q_1 q_2 q_3 = 1$ を満たしている。また、 $q_3 = q_1^{-\beta}$ となるように

$$\beta = -\frac{\log q_3}{\log q_1} \quad (2.2)$$

とおく。 $\mathcal{E}_2$ の生成元は $E_{i,n}, F_{i,n}, H_{i,k}, K_i^{\pm 1} (n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}, i = 1, 2)$ と中心 $q^{\pm c}$ であり、これらの形式的母関数

$$E_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{i,n} z^{-n}, \quad F_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{i,n} z^{-n}, \quad (2.3)$$

$$K_i^{\pm 1}(z) = K_i^{\pm 1} \exp \left(\pm (q - q^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} H_{i,\pm n} z^{\mp n} \right) \quad (2.4)$$

を用いる。定義関係式は次式で与えられる：

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad q^c q^{-c} = q^{-c} q^c = 1, \quad (2.5)$$

$$K_i^{\pm 1}(z) K_j^{\pm 1}(w) = K_j^{\pm 1}(w) K_i^{\pm 1}(z), \quad (2.6)$$

$$\frac{g_{i,j}(q^{-c}z, w)}{g_{i,j}(q^c z, w)} K_i^{-}(z) K_j^{+}(w) = \frac{g_{j,i}(w, q^{-c}z)}{g_{j,i}(w, q^c z)} K_j^{+}(w) K_i^{-}(z), \quad (2.7)$$

$$d_{i,j} g_{i,j}(z, w) K_i^{\pm 1}(q^{(1 \mp 1)c/2} z) E_j(w) + g_{j,i}(w, z) E_j(w) K_i^{\pm 1}(q^{(1 \mp 1)c/2} z) = 0, \quad (2.8)$$

$$d_{j,i} g_{j,i}(w, z) K_i^{\pm 1}(q^{(1 \pm 1)c/2} z) F_j(w) + g_{i,j}(z, w) F_j(w) K_i^{\pm 1}(q^{(1 \pm 1)c/2} z) = 0, \quad (2.9)$$

$$d_{i,j} g_{i,j}(z, w) E_i(z) E_j(w) + g_{j,i}(w, z) E_j(w) E_i(z) = 0, \quad (2.10)$$

$$d_{j,i} g_{j,i}(w, z) F_i(z) F_j(w) + g_{i,j}(z, w) F_j(w) F_i(z) = 0, \quad (2.11)$$

$$[E_i(z), F_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q - q^{-1}} \left(\delta \left(q^c \frac{w}{z} \right) K_i^{+}(z) - \delta \left(q^c \frac{z}{w} \right) K_i^{-}(w) \right), \quad (2.12)$$

$$\text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} \left[E_i(z_1), \left[E_i(z_2), [E_i(z_3), E_j(w)]_{q_2} \right] \right]_{q_2^{-1}} = 0 \quad (i \neq j), \quad (2.13)$$

$$\text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} \left[F_i(z_1), \left[F_i(z_2), [F_i(z_3), F_j(w)]_{q_2} \right] \right]_{q_2^{-1}} = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.14)$$

ここで,

$$g_{i,j}(z, w) = \begin{cases} z - q_2 w & (i = j), \\ (z - q_1 w)(z - q_3 w) & (i \neq j), \end{cases} \quad d_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ -1 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.15)$$

とした. $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ, $\delta(z)$ は形式的デルタ関数 $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ である. Serre 関係式 (2.13), (2.14) における $\text{Sym}_{z_1, z_2, z_3}$ は z_1, z_2, z_3 に関する対称化を表す. さらに $[A, B]_p = AB - pBA$ とした.

さらに, $\mathcal{E}_2$ は, 次式で与えられる余積 Δ を備えている:

$$\Delta(E_i(z)) = E_i(z) \otimes 1 + K_i^-(C_1 z) \otimes E_i(C_1 z), \quad (2.16)$$

$$\Delta(F_i(z)) = F_i(C_2 z) \otimes K_i^+(C_2 z) + 1 \otimes F_i(z), \quad (2.17)$$

$$\Delta(K_i^+(z)) = K_i^+(z) \otimes K_i^+(C_1^{-1} z), \quad \Delta(K_i^-(z)) = K_i^-(C_2^{-1} z) \otimes K_i^-(z), \quad (2.18)$$

$$\Delta(q^c) = q^c \otimes q^c. \quad (2.19)$$

ここで, $C_1 = q^c \otimes 1$, $C_2 = 1 \otimes q^c$ である.

2.2 自由場表示と Cartan 部分の分離

量子トロイダル $\mathfrak{gl}_1$ 代数 $\mathcal{E}_1$ から q -変形 Virasoro 代数を導出するには, $\mathcal{E}_1$ の自由場表示 (特にテンソル積表現) を考え, その上で, ある生成元から Cartan 部分代数に対応する Heisenberg 代数を分離する [2]. これと同じ手法を $\mathcal{E}_2$ に適用する. まずは, $\mathcal{E}_2$ の自由場表示を与える.

Heisenberg 代数 $\alpha_{i,n}$, $\mathcal{Q}_i$ ($n \in \mathbb{Z}, i = 1, 2$) と $\mathbf{a}_0, \mathbf{Q}$ を関係式

$$[\alpha_{i,n}, \alpha_{j,m}] = \begin{cases} n(1 + q_2^{-|n|})\delta_{n+m,0}, & i = j, \\ -n(q_1^{|n|} + q_3^{|n|})\delta_{n+m,0}, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$[\alpha_{i,n}, \mathcal{Q}_j] = \begin{cases} 2\delta_{n,0}, & i = j, \\ -2\delta_{n,0}, & i \neq j, \end{cases} \quad [\mathbf{a}_0, \mathbf{Q}] = \beta \quad (2.21)$$

によって定める. ただし $\alpha_{1,0} = -\alpha_{2,0}$, $\mathcal{Q}_1 = -\mathcal{Q}_2$ とする. また $|0\rangle$ を $\alpha_{i,n}|0\rangle = \mathbf{a}_0|0\rangle = 0$ ($n \geq 0$) を満たす最高ウェイトベクトルとし,

$$|n, u\rangle = e^{\frac{n}{2}\mathcal{Q}_1 + \frac{u}{\beta}\mathbf{Q}}|0\rangle \quad (n \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{C}), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{F}(n, u) = \mathbb{C}[\alpha_{1,-1}, \alpha_{1,-2}, \dots, \alpha_{2,-1}, \alpha_{2,-2}, \dots] |n, u\rangle, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{F}_u = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(n, u) \quad (2.24)$$

によって Fock 空間を定義する.

自由場表示には, この Fock 空間に作用する次の頂点作用素を用いる.

Definition 2.1. 頂点作用素 $\eta_i(z), \xi_i(z), \varphi_i^\pm(z) \in \text{End}(\mathcal{F}_u)[[z, z^{-1}]]$ ($i = 1, 2$) を

$$\eta_i(z) =: \exp \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z} \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_{i,n} z^{-n} \right) :, \quad \xi_i(z) =: \exp \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \neq 0} \frac{q^{|n|}}{n} \alpha_{i,n} z^{-n} \right) :, \quad (2.25)$$

$$\varphi_i^+(z) = \exp \left(- \sum_{n > 0} \frac{1 - q_2^n}{n} q^{-n/2} \alpha_{i,n} z^{-n} \right), \quad \varphi_i^-(z) = \exp \left(\sum_{n > 0} \frac{1 - q_2^n}{n} q^{-n/2} \alpha_{i,-n} z^n \right) \quad (2.26)$$

と定義する．ここで $: * :$ は通常の正規順序化の記号を表す．

以下の表現は, [10, 11] によって与えられている．

Fact 2.2. 以下によって定まる代数準同型 ρ は $\mathcal{E}_2$ の $\mathcal{F}_u$ 上の表現となる：

$$\rho(E_i(z)) = \eta_i(z) \times e^{\mathcal{Q}_i} z^{\alpha_{i,0}+1} q_1^{\mathfrak{a}_0}, \quad \rho(F_i(z)) = \xi_i(z) \times e^{-\mathcal{Q}_i} z^{-\alpha_{i,0}+1} q_1^{-\mathfrak{a}_0}, \quad (2.27)$$

$$\rho(K_i^+(z)) = \varphi_i^+(q^{-\frac{1}{2}} z) \times q^{\alpha_{i,0}}, \quad \rho(K_i^-(z)) = \varphi_i^-(q^{-\frac{1}{2}} z) \times q^{-\alpha_{i,0}}, \quad (2.28)$$

$$\rho(q^{\pm c}) = q^{\pm 1}. \quad (2.29)$$

次に, この表現のテンソル積表現

$$\rho \otimes \rho \circ \Delta(E_i(z))$$

を考え, ここから Cartan 部分代数に対応する Heisenberg 代数を分離する．

Definition 2.3. Heisenberg 代数 $\bar{h}_{i,n}$ と $h_{i,n}^\perp$ を

$$\bar{h}_{i,n} = \rho \otimes \rho \circ \Delta(H_{i,n}), \quad h_{i,n}^\perp = \alpha_{i,n} \otimes 1 - \frac{[\alpha_{i,n} \otimes 1, \bar{h}_{i,-n}]}{[\bar{h}_{i,n}, \bar{h}_{i,-n}]} \bar{h}_{i,n} \quad (n \neq 0)$$

によって定める．またゼロモード $\bar{h}_{i,0}, h_{i,0}^\perp, \bar{Q}_i, Q_i^\perp, \bar{\mathfrak{a}}_0, \mathfrak{a}_0^\perp, \bar{Q}, Q^\perp$ を

$$\begin{aligned} \bar{h}_{i,0} &= \frac{1}{2}(\alpha_{i,0} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_{i,0}), & h_{i,0}^\perp &= \frac{1}{2}(\alpha_{i,0} \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_{i,0}), \\ \bar{Q}_i &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_i \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{Q}_i), & Q_i^\perp &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_i \otimes 1 - 1 \otimes \mathcal{Q}_i), \\ \bar{\mathfrak{a}}_0 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0 \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{a}_0 + 1 \otimes 1), & \mathfrak{a}_0^\perp &= \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0 \otimes 1 - 1 \otimes \mathfrak{a}_0 - 1 \otimes 1), \\ \bar{Q} &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{Q}), & Q^\perp &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q} \otimes 1 - 1 \otimes \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

によって定める．

$\bar{h}_{i,n}$ が Cartan 部分代数に対応する Heisenberg 代数であり, $h_{i,n}^\perp$ はそれと可換な成分になっている．この 2 つの成分に分解する．

Proposition 2.4. $E_i(z)$ ($i = 1, 2$) のテンソル積表現を

$$\rho \otimes \rho \circ \Delta(E_i(q^{-1}z)) = W_i(z) \times \bar{\Lambda}_i(q^{-1}z)$$

と分解できる．ここで

$$W_i(z) = \Lambda_i^+(z) + \Lambda_i^-(z), \quad (2.30)$$

$$\Lambda_i^\pm(z) =: \exp \left(\mp \sum_{r \neq 0} \frac{q^{\pm r}}{r} h_{i,r}^\pm z^{-r} \right) : e^{Q_i^\pm} (q^{\mp 1} z)^{\pm h_{i,0}^\pm} q^{\pm a_0^\pm}, \quad (2.31)$$

$$\bar{\Lambda}_i(z) =: \exp \left(- \sum_{n > 0} \frac{(q - q^{-1}) q_2^n}{(1 - q_2^{2n})} \bar{h}_{i,-n} z^n \right) \quad (2.32)$$

$$\times \exp \left(\sum_{n > 0} \frac{(q - q^{-1})}{(1 - q_2^{2n})} \bar{h}_{i,n} z^{-n} \right) : e^{\bar{Q}_i} z^{\bar{h}_{i,0} + 1} q_1^{\bar{a}_0} \quad (2.33)$$

とした．

この分解における $\bar{\Lambda}_i(z)$ は，Cartan 部分代数に対応する Heisenberg 代数 $\bar{h}_{i,n}$ のみで構成されており， $W_i(z)$ はそれと可換な成分 $h_{i,n}^\pm$ のみで構成されている．Cartan 部分 $\bar{\Lambda}_i(z)$ を分離し，以下， $W_i(z)$ ($i = 1, 2$) の生成する代数を考える．この $W_i(z)$ ($i = 1, 2$) の成す代数を $\text{SVir} \oplus \mathbb{F}$ の q -変形とみなすことができる．

3 二次関係式

まずは $W_i(z)$ の満たす二次関係式について紹介する． $W_i(z)$ の関係式からは，任意のパラメータ ξ に依存する次の生成元が現れる．

Definition 3.1. 複素パラメータ ξ ($\neq 0$) に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi; z) &= M_1^+(\xi; z) + M_1^-(\xi; z) + z^2 M_2^+(\xi; z) + z^2 M_2^-(\xi; z), \\ M_1^\pm(\xi; z) &= q^{\pm 1} : \Lambda_1^\pm(\xi z) \Lambda_2^\pm(z) :, \\ M_2^\pm(\xi; z) &= q^{\pm 1} (1 - q_1^{\pm 1} \xi) (1 - q_3^{\pm 1} \xi) : \Lambda_1^\pm(\xi z) \Lambda_2^\mp(z) : \end{aligned}$$

と定める．

これを用いて代数の二次関係式を次のように書ける．

Theorem 3.2. $i = 1, 2$ と $k = 1, 3$ に対して，次式が成り立つ：

$$W_i(z) W_i(w) + W_i(w) W_i(z) = q z^{-1} \delta \left(\frac{q_2 w}{z} \right) + q^{-1} z^{-1} \delta \left(\frac{w}{q_2 z} \right), \quad (3.1)$$

$$\xi \cdot f \left(\xi; \frac{w}{z} \right) W_1(z) W_2(w) + f \left(\xi^{-1}; \frac{z}{w} \right) W_2(w) W_1(z) = \delta \left(\frac{\xi w}{z} \right) w^{-1} \mathcal{T}(\xi; w), \quad (3.2)$$

$$[\mathcal{T}(q_1; z), \mathcal{T}(q_3; w)] = [\mathcal{T}(q_1^{-1}; z), \mathcal{T}(q_3^{-1}; w)] = 0, \quad (3.3)$$

$$g^{(k)} \left(\frac{w}{z} \right) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; z) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) - g^{(k)} \left(\frac{z}{w} \right) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; z) = \mathcal{C}^{(k)} \cdot \left(\delta \left(\frac{w}{q_2 z} \right) - \delta \left(\frac{q_2 w}{z} \right) \right), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
q_k^{\pm 1} \cdot f\left(q_k^{\pm 1}; \frac{w}{z}\right) W_1(z) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) - f\left(q_k^{\mp 1}; \frac{z}{w}\right) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) W_1(z) \\
= \pm q^{\pm 1} (q_k - q_k^{-1}) \delta\left(\frac{q_k^{\pm 1} w}{q_2^{\pm 1} z}\right) W_2(w),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
q_k^{\mp 1} \cdot f\left(q_k^{\mp 1}; \frac{q_k^{\pm 1} w}{z}\right) W_2(z) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) - f\left(q_k^{\pm 1}; \frac{z}{q_k^{\pm 1} w}\right) \mathcal{T}(q_k^{\pm 1}; w) W_2(z) \\
= \mp q^{\mp 1} (q_k - q_k^{-1}) \delta\left(\frac{q_2^{\pm 1} w}{z}\right) W_1(q_k^{\pm 1} w).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
f(\xi; z) &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi^n - \frac{q_1^n + q_3^n}{(1 + q_2^{-n})} \right) \frac{z^n}{n} \right\}, \\
g^{(k)}(z) &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{(1 - q_k^{2n})(1 - q_2^{-n} q_k^{-2n})}{n(1 + q_2^{-n})} z^n \right), \quad \mathcal{C}^{(k)} = -\frac{(1 - q_k^2)(1 - q_2^{-1} q_k^{-2})}{1 - q_2^{-1}}
\end{aligned}$$

とした.

式 (3.1) は単純な fermion の関係式 (反交換関係が定数となる関係式) であり, また式 (3.2) のように, 2つの fermion $W_1(z)$, $W_2(z)$ から, $\mathcal{T}(\xi; z)$ が生成できる. ξ を $q_1^{\pm 1}$, $q_3^{\pm 1}$ などの特殊な値にとったとき, $\mathcal{T}(\xi; z)$ は (3.4) のような閉じた関係式を満たすことが分かる. 実は式 (3.4) は, 通常の q -変形 Virasoro 代数の二次関係式と同じ関係式である. これと式 (3.3) から, この代数には可換な 2つの q -変形 Virasoro 代数が含まれていることが分かる. 尚, この 2つの q -変形 Virasoro 代数は, $\mathcal{E}_2$ に埋め込まれている 2つの可換な $\mathcal{E}_1$ に対応している [12]. また実際には, 3種類の生成元 $W_1(z)$, $W_2(z)$, $\mathcal{T}(q_1; z)$ だけで閉じた関係式を成し, これらの関係式を用いて最高ウェイト表現を構成することもできる.

4 共形極限

次に, 生成元 $W_i(z)$, $\mathcal{T}(\xi; z)$ の退化極限 $q_i \rightarrow 1$ について概説する. これらの退化極限からは代数 $\text{SVir} \oplus \mathbb{F}$ が現れる. 極限をとる際は, $\hbar = \log q_1$ とおき, パラメータ q_1, q_2, q_3 を

$$q_1 = e^{\hbar}, \quad q_2 = e^{(\beta-1)\hbar}, \quad q_3 = e^{-\beta\hbar}$$

とパラメトライズする. このパラメトライズの下で, β を固定して極限 $\hbar \rightarrow 0$ を考える. $h_{i,n}^{\perp}$ の交換関係は q_1, q_2, q_3 に依存するため, これとは独立な Heisenberg 代数を用意する.

Heisenberg 代数 $a_n, \tilde{a}_n$ ($n \in \mathbb{Z}$) を交換関係

$$[a_n, a_m] = [\tilde{a}_n, \tilde{a}_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad [a_n, \tilde{a}_m] = 0$$

によって定め, これを用いて $h_{i,n}^{\perp}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $i = 1, 2$) を

$$\begin{aligned}
h_{i,n}^{\perp} &= (-1)^{i+1} \frac{(1 + q_1^n)(1 + q_3^n)}{2(1 + q_2^{-n})} a_n + \frac{\sqrt{\beta}}{2} (1 - q_1^n) \tilde{a}_n, \\
h_{i,-n}^{\perp} &= (-1)^{i+1} a_{-n} + \frac{1 - q_3^n}{\sqrt{\beta}(1 + q_2^{-n})} \tilde{a}_{-n}, \quad (n > 0)
\end{aligned}$$

と実現して極限をとる.

この実現のもとで, 生成元 $W_i(z), \mathcal{T}(\xi; z)$ は

$$\begin{aligned} W_i(z) &= \sqrt{2} \psi(z) + (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{-2\beta}}{2} G(z) z \hbar + O(\hbar^2), \\ \mathcal{T}(\xi; z) &= 2 + \left(2\beta \mathsf{T}(x; z) z^2 + \frac{(\beta-1)^2}{4} \right) \hbar^2 + O(\hbar^3) \quad (\xi = e^{x\hbar}) \end{aligned}$$

の形に $\hbar$ -展開することができる. ここで,

$$\mathsf{T}(x; z) = T(z) + \left(\frac{x^2}{\beta} - \frac{1}{2} \right) \vdots \psi'(z) \psi(z) \vdots + \frac{x}{\sqrt{-\beta}} \psi(z) G(z)$$

とした. $\vdots * \vdots$ は fermion ($\psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_r z^{-r-\frac{1}{2}}$ によって定まる ψ_μ) に対する正規順序化の記号で

$$\vdots \psi_\mu \psi_\nu \vdots = \begin{cases} \psi_\mu \psi_\nu & \mu \geq \nu, \\ -\psi_\nu \psi_\mu & \mu < \nu \end{cases}$$

によって定める. 退化極限から現れる作用素 $T(z), G(z), \psi(z)$ は $\text{SVir} \oplus \mathsf{F}$ の関係式を満たす. つまり,

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad G(z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} G_\mu z^{-\mu-\frac{3}{2}}$$

によって, L_n, G_μ を定めると, 関係式

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{C}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m, 0}, \\ [L_n, G_\mu] &= \left(\frac{n}{2} - \mu \right) G_{n+\mu}, \\ [G_\mu, G_\nu]_+ &= 2L_{\mu+\nu} + \frac{C}{3} \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{\mu+\nu, 0}, \\ [\psi_r, \psi_s]_+ &= \delta_{r,s}, \quad [\psi_r, L_n] = [\psi_r, G_s]_+ = 0 \end{aligned}$$

をみたす. ただし $C = \frac{3}{2} - \frac{3(1-\beta)^2}{\beta}$ とした. 実際には, 作用素 $T(z), G(z)$ は SVir の通常の自由場表示 (自由 boson 1 つと自由 fermion 1 つを用いた表示) において, そのうちの 1 つの fermion を boson-fermion 対応で boson で表示した形 (自由 boson 2 つで表示した形) になっている. boson-fermion 対応は元々, 自由 boson 1 つと自由 fermion 2 つの対応関係であるが, そのうちの片割れであるもう 1 つの fermion が $\psi(z)$ として現れている.

また, $(x_1, x_2) = (\pm 1, \mp \beta)$ のとき, 作用素 $\mathsf{T}(x_1; z)$ と $\mathsf{T}(x_2; z)$ は $\text{SVir} \oplus \mathsf{F}$ に含まれる非自明で可換な 2 つの Virasoro 代数を成すことも分かる. 以上より, $W_i(z)$ によって生成される代数は, $\text{SVir} \oplus \mathsf{F}$ の q -変形とみなすことができる.

5 スクリーニング作用素

スクリーニング作用素は Virasoro 代数やそれを拡張した代数の表現論において重要な役割を果たすが, $W_i(z)$ によって生成される代数にも, 同様にスクリーニング作用素が存在する.

Definition 5.1. パラメータ $\tau_{\pm}, s_{\pm}$ を

$$\tau_+ = \frac{1}{\beta}, \quad \tau_- = -1, \quad s_+ = q_3, \quad s_- = q_1$$

とおき、スクリーニング作用素 $S^+(z), S^-(z)$ を

$$S^{\pm}(z) = S_1^{\pm}(z) - S_2^{\pm}(z),$$

$$\begin{aligned} S_1^{\pm}(z) &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{s_{\pm}^{\frac{n}{2}}(1+q_2^n)}{q^n(1-s_{\pm}^{2n})} (h_{1,-n}^{\perp} + s_{\pm}^n h_{2,-n}^{\perp}) z^n \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n>0} \frac{s_{\pm}^{\frac{n}{2}}(1+q_2^n)}{q^n(1-s_{\pm}^{2n})} (s_{\pm}^n h_{1,n}^{\perp} + h_{2,n}^{\perp}) z^{-n} \right) e^{Q_1^{\perp} + \tau_{\pm} Q^{\perp}} z^{h_{1,0}^{\perp} + 2\tau_{\pm} a_0^{\perp}}, \\ S_2^{\pm}(z) &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{s_{\pm}^{\frac{n}{2}}(1+q_2^n)}{q^n(1-s_{\pm}^{2n})} (s_{\pm}^n h_{1,-n}^{\perp} + h_{2,-n}^{\perp}) z^n \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n>0} \frac{s_{\pm}^{\frac{n}{2}}(1+q_2^n)}{q^n(1-s_{\pm}^{2n})} (h_{1,n}^{\perp} + s_{\pm}^n h_{2,n}^{\perp}) z^{-n} \right) e^{-Q_1^{\perp} + \tau_{\pm} Q^{\perp}} z^{-h_{1,0}^{\perp} + 2\tau_{\pm} a_0^{\perp}} \end{aligned}$$

によって定義する.

このスクリーニング作用素は、量子トロイダル $\mathfrak{gl}_2$ 代数の intertwining 作用素から導出することもできる [13]. 生成元 $W_i(z)$ との関係式は次のようになる.

Proposition 5.2. 生成元 $W_i(z)$ と スクリーニングカレント $S^{\pm}(w)$ の反交換関係は

$$[W_1(z), S^{\pm}(w)]_+ = w^{-1}(T_{s_{\pm}, w} - 1) \delta \left(\frac{w}{s_{\pm}^{1/2} z} \right) : \Lambda_1^+(s_{\pm}^{-1/2} w) S_2^{\pm}(w) :, \quad (5.1)$$

$$[W_2(z), S^{\pm}(w)]_+ = w^{-1}(1 - T_{s_{\pm}, w}) \delta \left(\frac{w}{s_{\pm}^{1/2} z} \right) : \Lambda_2^+(s_{\pm}^{-1/2} w) S_1^{\pm}(w) : \quad (5.2)$$

となる. ここで, $T_{p,w}$ は $T_{p,w} f(w) = f(pw)$ を満たす差分作用素とした.

関係式 (5.1), (5.2) の右辺は, w について閉じた積分路で積分すれば 0 となるため, スクリーニング作用素 $\oint S^{\pm}(w) dw$ と $W_i(z)$ は反可換となる. このスクリーニングカレントの極限 $q_i \rightarrow 1$ は, 超対称 Virasoro 代数のスクリーニングカレントに一致することも分かる.

Remark 5.3. スクリーニングカレント $S^{\pm}(z)$ は 2 つの指数関数の項の和で表されているが, $W_i(z)$ については, 1 つの指数関数で表されるスクリーニングカレントは構成することができない. 量子トロイダル代数から q -変形された W 代数を導出する先行研究は, 超対称な場合も含め様々なものがあるが [14, 15, 16, 17, 18], 多くは 1 つの指数関数で表されるスクリーニングカレントをもっており, この点において, 本稿の代数はそれらの代数とは異なっている.

Remark 5.4. q -変形 Virasoro 代数のスクリーニングカレントは, 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のレベルが 1 の場合における生成元 ([19] の $E(z), F(z)$) に一致することが知られている. さらに, [19, 20] では, $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のレベル 2 の場合における生成元をスクリーニングカレントとするような代数が, SVir の q -変形になることが示唆されている. しかし本稿の $S^{\pm}(z)$ は, 演算子積の構造などから, それとは直接的には一致しないものになっている.

6 Kac 行列式

第3節の二次関係式を用いて, $W_i(z)$ の成す代数の最高ウェイト表現を構成し, Kac 行列式の予想を立てることもできる. $W_1(z), W_2(z), \mathcal{T}(q_1; z)$ の3種類の生成元のみで閉じた関係式を成すため, 以下, 生成元 $\mathcal{T}(\xi; z)$ は $\xi = q_1$ のときのみを考える.

まず, 第3節の二次関係式は, 次のように, 各生成元のフーリエ成分を用いて書くこともできる.

Definition 6.1. 作用素 $W_{1,\mu}, W_{2,\mu}, \mathcal{T}_n$ と定数 f_ℓ, g_ℓ ($\mu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を

$$\begin{aligned} W_i(z) &= \sum_{\mu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} W_{i,\mu} z^{-\mu - \frac{1}{2}}, & \mathcal{T}(q_1; z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_n z^{-n}, \\ f(q_1; z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell z^\ell, & g^{(1)}(z) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} g_\ell z^\ell \end{aligned}$$

によって定義する.

Proposition 6.2. 二次関係式 (3.1), (3.2), (3.4) は

$$\begin{aligned} [W_{i,r}, W_{i,s}]_+ &= (q_2^r + q_2^{-r}) \delta_{r+s,0}, \\ q_1 W_{1,\mu} W_{2,\nu} + W_{2,\nu} W_{1,\mu} &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} (q_1 f_\ell W_{1,\mu-\ell} W_{2,\nu+\ell} + f_\ell W_{2,\nu-\ell} W_{1,\mu+\ell}) \\ &\quad + q_1^{\mu+\frac{1}{2}} \mathcal{T}_{\mu+\nu}, \\ [\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_m] &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} (g_\ell \mathcal{T}_{n-\ell} \mathcal{T}_{m+\ell} + g_\ell \mathcal{T}_{m-\ell} \mathcal{T}_{n+\ell}) + \mathcal{C}^{(q_1)} (q_2^n - q_2^{-n}) \delta_{n+m,0} \end{aligned}$$

と同値である.

$W_{i,\mu}$ と $\mathcal{T}_n$ の関係式については省略するが, これらの関係式は生成元 $W_{i,\mu}, \mathcal{T}_n$ の正規順序化を実行可能にする.

Remark 6.3. 本稿では Neveu–Schwarz セクターのみを考える. 式 (2.23), (2.24) の記号で, $\mathcal{F}_u^{(0)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(2k, u)$, $\mathcal{F}_u^{(1)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(2k+1, u)$ とおくと, $\mathcal{E}_2$ はこれらの上にも閉じて作用し, $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_u^{(0)} \oplus \mathcal{F}_u^{(1)}$ となっている. $W_i(z)$ の定義に含まれる $e^{Q_i^\perp}$ は,

$$\begin{aligned} |v\rangle \in \mathcal{F}_{u_1}^{(0)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(0)} &\quad \text{ならば} \quad e^{Q_i^\perp} |v\rangle \in \mathcal{F}_{u_1}^{(1)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(1)}, \\ |v\rangle \in \mathcal{F}_{u_1}^{(1)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(1)} &\quad \text{ならば} \quad e^{Q_i^\perp} |v\rangle \in \mathcal{F}_{u_1}^{(0)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(0)} \end{aligned}$$

のように作用する. よって, テンソル積表現を考える場合には, $\mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2}$ を $(\mathcal{F}_{u_1}^{(0)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(0)}) \oplus (\mathcal{F}_{u_1}^{(1)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(1)})$ 上に制限すれば, $h_{i,0}^\perp$ が作用したときに常に整数となるため, $W_i(z)$ の定義に含まれる $z^{h_{i,0}^\perp}$ が整数べきとなる. 本稿の Fock 空間の定義で Neveu–Schwarz セクターを考えるには, 厳密には Fock 空間にこの制限を入れる必要がある. 一方, $(\mathcal{F}_{u_1}^{(0)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(1)}) \oplus (\mathcal{F}_{u_1}^{(1)} \otimes \mathcal{F}_{u_2}^{(0)})$ 上に制限すれば, $h_{i,0}^\perp$ が半整数として作用するため, Ramond セクターの定式化が期待できる.

次に, $|h\rangle$ を

$$W_{i,\mu}|h\rangle = \mathcal{T}_n|h\rangle = 0 \quad (\mu, n > 0, i = 1, 2), \quad \mathcal{T}_0|h\rangle = h|h\rangle$$

を満たす最高ウェイトベクトルとし, $|h\rangle$ から生成される最高ウェイト表現を考える. さらに,

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > 0, \quad \nu_1 > \nu_2 > \cdots > 0, \quad n_1 \geq n_2 \geq \cdots > 0$$

を満たす半整数の有限列 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ と整数の有限列 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots)$ に対して,

$$|h; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{n}\rangle = W_{1,-\mu_1} W_{1,-\mu_2} \cdots W_{2,-\nu_1} W_{2,-\nu_2} \cdots \mathcal{T}_{-n_1} \mathcal{T}_{-n_2} \cdots |h\rangle$$

と定義する. 同様に, 双対空間において, $\langle h; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{n}|$ を定める.

Definition 6.4. 整数または半整数 $N \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$ に対して, Kac 行列式 $\det K_N$ を

$$\det K_N = \det \left(\langle h; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\nu}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(1)} | h; \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\nu}^{(2)}, \boldsymbol{n}^{(2)} \rangle \right)_{\substack{|\boldsymbol{\mu}^{(1)}| + |\boldsymbol{\nu}^{(1)}| + |\boldsymbol{n}^{(1)}| \\ = |\boldsymbol{\mu}^{(2)}| + |\boldsymbol{\nu}^{(2)}| + |\boldsymbol{n}^{(2)}| = N}}.$$

と定義する. ここで, $|\boldsymbol{\mu}| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots$ とおいた.

この Kac 行列式は次のような形になることが予想される.

Conjecture 6.5. Kac 行列式は

$$\det K_N = (\text{const.}) \times \prod_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_{>1} \\ rs \leq 2N \\ r-s = \text{even}}} (h^2 - h_{r,s}^2)^{\tilde{P}(N - \frac{rs}{2})},$$

$$h_{r,s} = q_1^{\frac{r}{2}} q_3^{\frac{s}{2}} + q_1^{-\frac{r}{2}} q_3^{-\frac{s}{2}}$$

となる. ここで $\tilde{P}(N)$ は $\sum_{N \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{P}(N) z^N = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + z^{k-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$ によって定まる定数とし, (const.) は h と独立な定数とした.

謝辞

著者の研究は JSPS 科研費 (21K13803) の助成を受けています.

参考文献

- [1] Y. Ohkubo, “Direct sum structure of the super Virasoro algebra and a Fermion algebra arising from the quantum toroidal $\mathfrak{gl}_2$,” *Lett. Math. Phys.* **115** no. 5, (2025) 107 arXiv:2505.02926 [math.QA].
- [2] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida, “Kernel function and quantum algebra,” *RIMS kokyuroku* **1689** (2010) 133–152 arXiv:1002.2485 [math.QA].

- [3] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolskiy, “On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture,” *Lett. Math. Phys.* **98** (2011) 33–64 [arXiv:1012.1312](#) [hep-th].
- [4] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, “Integrable structure, W-symmetry and AGT relation,” *JHEP* **01** (2012) 051 [arXiv:1109.4042](#) [hep-th].
- [5] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, B. L. Feigin, A. V. Litvinov, and G. M. Tarnopolsky, “Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory,” *Comm. Math. Phys.* **319** (2013) 269–301 [arXiv:1111.2803](#) [hep-th].
- [6] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, and S. Yanagida, “Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture,” *RIMS kokyuroku* **1765** (2011) 12–32 [arXiv:1106.4088](#) [math-ph].
- [7] M. Fukuda, Y. Ohkubo, and J. Shiraishi, “Generalized Macdonald Functions on Fock Tensor Spaces and Duality Formula for Changing Preferred Direction,” *Commun. Math. Phys.* **380** no. 1, (2020) 1–70 [arXiv:1903.05905](#) [math.QA].
- [8] H. Awata, B. Feigin, and J. Shiraishi, “Quantum Algebraic Approach to Refined Topological Vertex,” *JHEP* **03** (2012) 041 [arXiv:1112.6074](#) [hep-th].
- [9] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, K. Suetake, and Y. Zenkevich, “ (q, t) -KZ equations for quantum toroidal algebra and Nekrasov partition functions on ALE spaces,” *JHEP* **03** (2018) 192 [arXiv:1712.08016](#) [hep-th].
- [10] Y. Saito, K. Takemura, and D. Uglov, “Toroidal actions on level 1 modules of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$,” *Transformation Groups* **3** no. 1, (1998) 75–102 [arXiv:q-alg/9702024](#) [math.QA].
- [11] Y. Saito, “Quantum toroidal algebras and their vertex representations,” *Publ. RIMS* **34** no. 2, (1998) 155–177 [arXiv:9611030](#) [q-alg].
- [12] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, “Branching rules for quantum toroidal $\mathfrak{gl}_n$,” *Adv. Math.* **300** (2016) 229–274 [arXiv:1309.2147](#) [math.QA].
- [13] Y. Zenkevich, “ $\mathfrak{gl}_N$ Higgsed networks,” *JHEP* **12** (2021) 034 [arXiv:1912.13372](#) [hep-th].
- [14] B. Feigin, M. Jimbo, E. Mukhin, and I. Vilkoviskiy, “Deformations of $\mathcal{W}$ algebras via quantum toroidal algebras,” *Selecta Math.* **27** no. 4, (2021) 52 [arXiv:2003.04234](#) [math.QA].
- [15] B. Feigin, M. Jimbo, and E. Mukhin, “Towards trigonometric deformation of $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ coset VOA,” *J. Math. Phys.* **60** no. 7, (2019) 073507 [arXiv:1811.02056](#) [math.QA].
- [16] K. Harada, “Quantum deformation of Feigin-Semikhatov’s W-algebras and 5d AGT correspondence with a simple surface operator,” [arXiv:2005.14174](#) [hep-th].

- [17] K. Harada, Y. Matsuo, G. Noshita, and A. Watanabe, “ q -deformation of corner vertex operator algebras by Miura transformation,” *JHEP* **04** (2021) 202 [arXiv:2101.03953 \[hep-th\]](#).
- [18] H. Awata, K. Harada, H. Kanno, and J. Shiraishi, “A quantum deformation of the $\mathcal{N} = 2$ superconformal algebra,” [arXiv:2407.00901 \[math.QA\]](#).
- [19] H. Konno, “An elliptic algebra $U_{q,p}(\widehat{sl_2})$ and the fusion RSOS model,” *Communications in mathematical physics* **195** no. 2, (1998) 373–403 [arXiv:q-alg/9709013](#).
- [20] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, and J. Shiraishi, “Elliptic algebra $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$: Drinfeld currents and vertex operators,” *Commun. Math. Phys.* **199** (1999) 605–647 [arXiv:math/9802002 \[math.QA\]](#).