等比数列の小数部分の分布論

この発表では、数列の小数部分がどのように分布しているかについて扱う。Weyl の判定法によれば等差数列の小数部分が一様分布する必要十分条件は、その公差が無理数となることである。次に、1 より大きい任意の実数 α が与えられたときに、公比 α の等比数列を考える。このとき、ほとんど全ての実数 ξ に対して、初項 ξ 公比 α の等比数列の小数部分は一様分布することが Koksma によって示されている。逆に、0 でない初項 ξ が与えられたとき、ほとんど全ての 1 より大きい α について公比 α の等比数列の小数部分も一様分布することが知られている。

ところが、具体的に与えられた等比数列に対して小数部分が一様に分布しているか否かを判定する方法は発見されていない。さらに、小数部分が商空間 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上に稠密に分布しているかどうかも一般には知られていない。例えば、等比数列 $\pi 10^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の小数部分を評価することは π の 10 進展開を計算することと同値であり、極限点の稠密性についてほとんど未解決である。今回の発表では、代数的数を公比とする数列の小数部分が持つ極限点の性質についての結果を紹介する。