Euler 型積分——twisted (co)homology 理論, Hadamard の有限部分 (正則化) についての徒然

COE tea time , 2008.3.7 , 伊藤公毅

受験数学でも知られている積分

$$\int_a^b (t-a)^m (b-t)^n dt = B \cdot (b-a)^{m+n+1}$$

に現れる係数 B がかの Beta 函数である:

$$B = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt =: B(m+1, n+1).$$

この積分—Euler 型積分と称する—に於いて, その路 $(0,1)$ の端点 $t=0,1$ で $t^m(1-t)^n$ は消えている. そういうわけで, $(0,1)$ 区間は**サイクル**と見做せそうである. ここで, m, n は最早整数である必要はない. この際, $t^m(1-t)^n$ は多価解析函数であり, その多価性の定める局所系を $\mathcal{L}$ としよう. すると, Euler 型積分は, $\mathcal{L}$ 係数 homology 群 (twisted homology) と $\mathcal{L}$ 係数 cohomology 群 (twisted de Rham cohomology) の pair と解釈される. (**青本理論**)

一般に, Euler 型積分は広義積分であり, $\Re m > -1$, $\Re n > -1$ の下に収束する. この収束条件を外す為に, 路の**正則化** (これは積分路の端点での発散寄与を棄てる操作で, 矢張り $(0,1)$ 区間を**サイクル**上の積分と見做そうという哲学) が現れる.

今回の talk では, この辺の事情について徒然なるままに考察してきたことを, 矢張り, 徒然に語ろうと思う. (*tea time* なのだから…) 具体的には, 以下の項目について喋れるだけ (或いは聴き手が厭にならぬだけ) 喋る:

1. 青本理論の概説 : Euler 型積分の twisted homology, twisted de Rham cohomology の pair としての定式化
2. twisted Poincaré lemma と路の正則化 : **定数変化法**で微分方程式を解く際に正則化を発見してみせる. それが, 純粋に *topological* に定義されることをみる.
3. 共鳴の問題 : m, n が整数の時に惹き起こす困った状況を, $\mathcal{L}$ の**無限小変形**で解決する.
4. (時間が許せば…) 広義積分の収束性と twisted de Rham cohomology の filtration
5. (時間が許せば…) 収束性を加味した twisted de Rham cohomology を, $\mathbb{P}^1$ の $t = 0, 1, \infty$ の real blow up の空間上に導入し, その dual の相手として, 路の正則化が現れることをみる.