吉田塾演習問題 (2004年9月実施)

作成者：有木進・鈴木武史

1 $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ $(d \geq 2)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}G$ と $\mathbb{C}[X]/(X^d - 1)$ は $\mathbb{C}$-代数として同じであることを示せ．すなわち，全単射線形写像 $\Phi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}[X]/(X^d - 1)$ が存在して，$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ をみたすことを示せ．

(2) $\mathbb{C}[\mathrm{G}] = \{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid f(x + d) = f(x) \}$ に

$$f * g(x) = \sum_{a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} f(a)g(x - a)$$

により積を定義するとき，$\mathbb{C}\mathrm{G}$ と $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ は $\mathbb{C}$-代数として同じであることを示せ．

2 $G = SL(2, \mathbb{R})$，$\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$，$z \in \mathcal{H}$ に対して $gz = \dfrac{az + b}{cz + d} \in \mathcal{H}$ を示せ．

(2) $g\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ であるための必要十分条件は $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の形であることを示せ．

(3) $z \in \mathcal{H}$ に対し，ある $0 \leq \varphi < 2\pi, a > 0$ が存在して

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} z = a\sqrt{-1}$$

とできることを示せ．

(4) G の部分群 K，A を次のように定めると $G = KAK$ であることを示せ．

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

3 $G = SL(2, \mathbb{R})$ の座標を

$$g(\theta, t, n) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) $a > 0$ に対し，$\theta"$, $t"$, $n"$ を次式で定める．

$$\cos\theta" = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}, \quad \sin\theta" = \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}},$$
$$t" = \log(\frac{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a}), \quad n" = \frac{(1-a^2)\cos\theta\sin\theta}{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}.$$

このとき，

$$\begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta" & -\sin\theta" \\ \sin\theta" & \cos\theta" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(t"/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t"/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n" \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(2) $dg = \frac{1}{2\pi}e^t d\theta dt dn$ が左 Haar 測度であることを示せ．
(ヒント：$k \in K$，$a \in A$ のそれぞれに対する左平行移動による座標の変化 $g(\theta, t, n) \mapsto g(\theta', t', n')$ を求め，積分の変数変換の公式を用いて $d(kg) = dg$，$d(ag) = dg$ を示せ．)

4 次の関数は無限回微分可能だが実解析的でないことを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

5 $U(2) = \{\, g \in M(2,2,\mathbb{C}) \mid g^*g = I_2 \,\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $U(2)$ の元を

$$g = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}y_1 & x_2 + \sqrt{-1}y_2 \\ x_3 + \sqrt{-1}y_3 & x_4 + \sqrt{-1}y_4 \end{pmatrix}$$

と書いたとき，$\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ の部分集合を単位元 I_2 の回りの座標系にとれることを示せ．
(ヒント：陰関数の定理を用いよ．
定理 (陰関数の定理)　$m \leq n$ とし，$\mathbb{R}^n$ の開集合 D 上で定義された連続微分可能な関数 $F : D \to \mathbb{R}^m$ が

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

で与えられているとする．$p \in D$ に対して $F(p) = 0$ かつ

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(p) \neq 0$$

が成り立つならば，原点を含む $\mathbb{R}^{n-m}$ の開集合 U 上で定義された関数 $g_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_{m+1},\ldots,x_n)$ と，$p\in D'\subset D$ をみたす $\mathbb{R}^n$ の開集合 D' が存在して，$z=(x_{m+1},\ldots,x_n)\mapsto(g_1(z),\ldots,g_m(z),z)$ により定めた写像 $\Phi: U\to F^{-1}(0)\cap D'$ は，p の回りでの $F^{-1}(0)$ の座標系を与える .)

(2) 上記の結果を用いて $U(2)$ がリー群であることを示せ．

6 $G=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ $(d\geq 2)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\zeta=\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{d})$ とおく．$V_n=\mathbb{C}$ $(n\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ は $a\in G$, $v\in V_n$ に対して $av=\zeta^{-na}v$ と定めることにより G-加群であることを示せ．

(2) $\mathbb{C}[G]=\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\mid f(x+d)=f(x)\}$ と考え，$f\in\mathbb{C}[G]$ に対して $\hat{f}\in\mathbb{C}[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}]$ を

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{d}\sum_{a\in G}f(a)\zeta^{-na}$$

と定める．このとき，$\mathbb{C}[G]=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}V_n$，より具体的には，次の Planchrel の公式 (離散フーリエ変換の公式) が成り立つことを示せ．

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\zeta^{nx}$$

(これが画像データ圧縮の原理である．2 次元で離散フーリエ変換を実行し，高周波成分をカットすれば画質の劣化が少ないが他方記憶しておくデータは少なくてすむ .)

7 次の問いに答えよ．

(1) 複素数のなす数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2<\infty,\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2<\infty$$

をみたすならば，$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_nb_n|<\infty$ であることを示せ．

(2) $f(t)$ が周期 2π の周期関数で連続微分可能とする．このとき

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\sqrt{-1}nt}dt$$

とおくと，$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{\sqrt{-1}nt}$ であることを示せ．

(ヒント：連続関数のなす関数列が一様収束すれば極限として得られる関数も連続関数である .)

8　$G = S_3$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $s_1 = \binom{123}{213}$，$s_2 = \binom{123}{132}$ とおく．このとき，

(i) $s_1^2 = 1,\ s_2^2 = 1,\ s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2.$

(ii) $G = \{1, s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1\}$

を示せ．

(2) $\rho_1 : G \to GL(1,\mathbb{C})$，$\rho_2 : G \to GL(1,\mathbb{C})$，$\rho_3 : G \to GL(2,\mathbb{C})$ を次式により定義すれば $V_1 = \mathbb{C}$，$V_2 = \mathbb{C}$，$V_3 = \mathbb{C}^2$ が既約 G-加群になることを示せ．

$$\rho_1(s_1) = 1,\ \rho_1(s_2) = 1, \quad \rho_2(s_1) = -1,\ \rho_2(s_2) = -1$$
$$\rho_3(s_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho_3(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $\mathrm{Tr}\,\rho_i(f) = \frac{1}{6}\sum_{g\in G} f(g)\mathrm{Tr}\,\rho_i(g)$ により $\mathrm{Tr}\,\rho_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$ を定めると

$$\delta = \sum_{i=1}^{3} (\dim V_i)\mathrm{Tr}\,\rho_i \quad \text{つまり} \quad f(1) = \sum_{i=1}^{3} (\dim V_i)\mathrm{Tr}\,\rho_i(f)$$

が成り立つことを示せ．

(有限群の場合の Peter-Weyl の定理を Planchrel の公式の形で述べたものを $G = S_3$ の場合に確かめる問題である .)

9　次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を求めよ．　(ヒント：$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le \pi) \\ 0 & (-\pi \le t \le 0) \end{cases}$)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\lambda}{\lambda^2} d\lambda$ を求めよ．　(ヒント：$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \le \pi) \\ 0 & (|t| \ge \pi) \end{cases}$)

10　Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$e^{\sqrt{-1}t\sigma_i} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}z & \sqrt{-1}x + y \\ \sqrt{-1}x - y & -\sqrt{-1}z \end{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}t\sigma_i} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}z' & \sqrt{-1}x' + y' \\ \sqrt{-1}x' - y' & -\sqrt{-1}z' \end{pmatrix}$$

とし，これを $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_i(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と書くとき，$R_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

11　σ_i $(i=1,2,3)$ が次式で与えられるとする．

$$\frac{\sqrt{-1}\sigma_1}{2}=-z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\sqrt{-1}\sigma_2}{2}=-x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\sqrt{-1}\sigma_3}{2}=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

このとき，$E=\dfrac{\sigma_1+\sqrt{-1}\sigma_2}{2}$，$F=\dfrac{\sigma_1-\sqrt{-1}\sigma_2}{2}$，$H=\sigma_3$ を極座標 (r,θ,ϕ)

（直交座標との関係は，$\begin{cases} x= & r\sin\theta\cos\phi \\ y= & r\sin\theta\sin\phi \\ z= & r\cos\theta \end{cases}$ である．）

を用いて表示せよ．

12　$C=\dfrac{FE+EF}{2}+\left(\dfrac{H}{2}\right)^2\in U(sl_2)$ が E，F，H と可換であることを示せ．

13　R を $\mathbb{C}$-代数，V を有限次元既約 R-加群とする．次を示せ．

$\rho: R\to \mathrm{End}(V)$ を R の表現とする．$c\in\mathrm{End}(V)$ が $\rho(r)c=c\rho(r)$ $(\forall r\in R)$ をみたすならば，$c=\lambda\,\mathrm{Id}_V$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ と書ける．

（これは Schur の補題とよばれる．）

14　$A\in M(n,n,\mathbb{R})$，$b\in\mathbb{R}^n$ に対し，$\{b,Ab,\ldots,A^{n-1}b\}$ が 1 次独立とする．

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i},\quad g=\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{g}=\mathbb{R}f\oplus\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_n}$ とおくと，$\mathfrak{g}$ はリー環である，すなわち $X\in\mathfrak{g}$，$Y\in\mathfrak{g}$ ならば $[X,Y]=XY-YX\in\mathfrak{g}$ であることを示せ．

(2) $\mathfrak{g}$ の部分リー環の中で f と g を含むものは $\mathfrak{g}$ 自身に限ることを示せ．

（このリー環は制御理論に現れる制御リー環の一番簡単な例である．）

15

(1) $V=\mathbb{C}v$ が 1 次元 $U(sl_2)$-加群ならば，$X\in\{E,\ F,\ H\}$ に対して $Xv=0$ であることを示せ.

(2) V を有限次元 $U(sl_2)$-加群とし，$v\in V$ が H の固有値 λ の固有ベクトルであるとする．このとき $\lambda\in\mathbb{Z}$ であることを示せ.

16　$A \in M(m,m,\mathbb{C})$，$B \in M(n,n,\mathbb{C})$ に対し，

$$\begin{pmatrix} A+b_{11}I_m & b_{12}I_m & \cdots & \cdots & b_{1n}I_m \\ b_{21}I_m & A+b_{22}I_m & b_{23}I_m & \cdots & b_{2n}I_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}I_m & b_{n2}I_m & \cdots & \cdots & A+b_{nn}I_m \end{pmatrix} \in M(mn,mn,\mathbb{C})$$

を $A \otimes B$ と書く．$\rho_i : U(sl_2) \to M(n_i,n_i,\mathbb{C})$ により $\mathbb{C}^{n_i}$ が $U(sl_2)$-加群 $(i=1,2)$ ならば，$\mathbb{C}^{n_1 n_2}$ は

$$E \mapsto \rho_1(E) \otimes \rho_2(E),\ \ F \mapsto \rho_1(F) \otimes \rho_2(F),\ \ H \mapsto \rho_1(H) \otimes \rho_2(H)$$

で定めた $\rho_1 \otimes \rho_2 : U(sl_2) \to M(n_1 n_2, n_1 n_2, \mathbb{C})$ により $U(sl_2)$-加群になることを示せ．

17　$\rho : U(sl_2) \to M(4,4,\mathbb{C})$ を

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定めることにより，$V = \mathbb{C}^4$ は $U(sl_2)$-加群である．次の問いに答えよ．

(1) V の 1 次元部分 $U(sl_2)$-加群を求めよ．

(2) V は 3 次元既約 $U(sl_2)$-加群と 1 次元 $U(sl_2)$-加群の直和に分解することを示せ.

18　ルジャンドル多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n (x^2-1)^n$ に対し次の問いに答えよ．

(1) $n-1$ 次以下の任意の多項式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) の性質を持つ n 次多項式はルジャンドル多項式の定数倍に限ることを示せ．

19　$\mathbb{C}[x,y]$ 上の線形作用素 E, F, q^H を

$$(Ef)(x,y) = \frac{x(f(x,qy) - f(x,q^{-1}y))}{(q-q^{-1})y},\ \ (Ff)(x,y) = \frac{y(f(qx,y) - f(q^{-1}x,y))}{(q-q^{-1})x},$$

$$(q^H f)(x,y) = f(qx, q^{-1}y)$$

で定義すれば，$\mathbb{C}[x,y]$ が $U_q(sl_2)$-加群になることを示せ．

20　$\rho : U_q(sl_2) \to M(4,4,\mathbb{C})$ を

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho(q^H) = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix}$$

で定めると $\mathbb{C}^4$ は $U_q(sl_2)$-加群になる．この加群を既約加群の直和に分解せよ.

21　V を有限次元 $U_q(sl_2)$-加群とする．次の問いに答えよ．

(1) V の双対空間 V^* は，$\varphi \in V^*$ に対し $E\varphi$, $F\varphi$, $q^H\varphi$ を

$$\langle E\varphi, v\rangle = -\langle \varphi, q^{-H}Ev\rangle,\ \ \langle F\varphi, v\rangle = -\langle \varphi, Fq^H v\rangle,\ \ \langle q^H\varphi, v\rangle = \langle \varphi, q^{-H}v\rangle$$

と定めることにより $U_q(sl_2)$-加群になることを示せ．

(2) V^* が既約 $U_q(sl_2)$-加群であるための必要十分条件は V が既約 $U_q(sl_2)$-加群であることを示せ．

22　$U(sl_2)$ を $U_q(sl_2)$ に変えてルジャンドル多項式の理論の類似を考えてみよ．

(実際の研究活動ではこういう無邪気な発想をもとに計算をはじめてみる，ということから研究が始まることが多い．もちろんそうした計算がどう評価されるかはその後の研究の広がり具合によるが，まずは研究をはじめてみるのが重要である．
　とはいえ，苦労しないとおもしろいものには出会わないし，またおもしろいものに出会ってもそれを発展させられるだけの準備ができていないと何も新しいものは生まれない．今はそのような準備をする時期であるが，将来の諸君の健闘を祈る .)