吉田塾講義

第 1 回講義

目的：$\mathbb{C}$-代数の表現という概念，とくに G を群とするときの G-加群という概念を理解し，また群 G に位相が入っているときにどう定義が修正されるかを理解すること．

定義 1 R を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．積と呼ばれる $\mathbb{C}$-双線形写像 $R \times R \to R$ が与えられていて，

(1) 単位元 $1 \in R$ の存在．

(2) 結合法則 $(xy)z = x(yz)$.

をみたすとき R を $\mathbb{C}$-代数という．

定義 2 G が群であるとは，写像 $G \times G \to G$ が与えられていて，

(1) 単位元 $1 \in G$ の存在．

(2) 結合法則.

(3) 逆元の存在(各 g に対し，$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ をみたす g^{-1} がただ 1 つ存在 .)

をみたすときをいう．

定義 3 $\mathbb{R}^N$ の閉部分集合 M が実解析的多様体とは，次の条件をみたすときをいう．

(1) M は Hausdorff，つまり異なる 2 点 $x, y \in M$ に対し，開集合 U, V を $x \in U$，$y \in V$，$U \cap V = \emptyset$ ととることができる．

(2) M は座標近傍とよばれる高々可算個の開集合 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で覆われていて，各 α に対して連続写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ が存在し，

   (a) $\varphi_\alpha^{-1} : \operatorname{Im} \varphi_\alpha \to U_\alpha$ が存在して連続．

   (b) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ が実解析的．

   をみたす．

定義 4 $GL(N, \mathbb{R})$ または $GL(N, \mathbb{C})$ の閉部分集合 G が群かつ実解析的多様体であって，しかも写像 $G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ が実解析的写像のとき，G を線形 Lie 群とよぶ．

定義 **5** G を Lie 群とする．$C_c(G)$ を G 上の連続関数 f であって，集合 $\{\, x \in G \,|\, f(x) \neq 0 \,\}$ の閉包がコンパクトなものの全体とする．$C_c(G)$ を次の積により $\mathbb{C}$-代数とみなすことができる．

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}x) dg$$

ただし，dg は G の左 Haar 測度である．これを畳み込み積という．

定義 **6** R を $\mathbb{C}$-代数とする．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が R-加群とは，各 $r \in R$ に対し r 倍写像 $v \mapsto rv$ が定義されている，すなわち双線形写像 $R \times V \to V$ が定義されていて，次をみたすときをいう．

(1) $1v = v$.

(2) $(r_1 r_2)v = r_1(r_2 v)$ $(r_1, r_2 \in R)$.

r 倍写像の定める線形写像を $\rho(r) \in \mathrm{End}(V)$ とかき，写像 $\rho : R \to \mathrm{End}(V)$ を対応する R の表現という．

G が群のときは，写像 $G \times V \to V$ が与えられていて，

(1) $1v = v$.

(2) $(g_1 g_2)v = g_1(g_2 v)$ $(g_1, g_2 \in G)$.

をみたすとき，V を G-加群といい，写像 $\rho : G \to GL(V)$ を対応する G の表現という．V が既約 G-加群であるとは，G 倍で閉じている V の部分空間が 0 と V に限るときをいう．

定義 **7** G を Lie 群とする．$\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間 V に対し，写像 $G \times V \to V$ が連続のとき V を G-加群といい，写像 $\rho : G \to GL(V)$ を対応する G の表現，または連続表現という．V が既約 G-加群であるとは，G 倍で閉じている V の閉部分空間が 0 と V に限るときをいう．

第 2 回講義

目的：Fourier 解析を Planchrel の公式の特殊な場合と理解すること．「直和」という用語が位相のある場合にどういう意味で使われるかを理解すること．

定義 **8** $G \to GL(V)$ を G の既約表現とする．$f \in C_c(G)$ に対して，$\mathrm{Tr}\,\rho(f) = \int_G f(g)\mathrm{Tr}(\rho(g))dg$ とおくと，超関数として $\mathrm{Tr}\,\rho$ が定まる．これを ρ の既約指標という．また，$\delta(f) = f(1)$ により定まる超関数をデルタ関数という．

デルタ関数を種々の既約指標の和や積分で表わした公式を Planchrel の公式と総称する．

コンパクト Lie 群の場合の Planchrel の公式は Peter-Weyl の定理と同値である．

第 3 回講義

目的：球面調和解析を $\mathbb{C}$-代数 $U(sl_2)$ の表現論として理解すること．
　とくに，球面調和関数がどうして 2 階の微分方程式をみたすのか，その必然性を表現論的に理解すること．

定義 9 $M(N,N,\mathbb{R})$ または $M(N,N,\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が Lie 環とは，$X,Y\in\mathfrak{g}$ なら $[X,Y]=XY-YX\in\mathfrak{g}$ のときをいう．

定義 10 $GL(N,\mathbb{R})$ または $GL(N,\mathbb{C})$ の閉部分集合 G が Lie 群のとき，$e^{tX}\in G$ $(t\in\mathbb{R})$ をみたす行列 X の全体は Lie 環になる．これを G の Lie 環という．

定義 11 $\mathfrak{g}$ を Lie 環，$\{X_1,\dots,X_n\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底，$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}X_k$ とする．このとき，

$$U(\mathfrak{g})=\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle/(X_iX_j-X_jX_i-\sum c_{ij}^{k}X_k\,|\,1\le i,j\le n)$$

で定義される $\mathbb{C}$-代数を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環という．

定義 12 $U(sl_2)=\mathbb{C}\langle E,F,H\rangle/(EF-FE-H,HE-EH-2E,HF-FH+2F)$.
また，次で定義される $U(sl_2)$ の元を $U(sl_2)$ の Casimir 元という．

$$C=\frac{EF+FE}{2}+(\frac{H}{2})^2.$$

第 4 回講義

目的：球面調和解析を球関数の表現論の特殊な場合として理解すること．
　とくに，球面調和関数に現れるルジャンドル多項式を定義する微分方程式がどうしてそういう形をしているのかを表現論的に理解すること．
　さらに，$U(sl_2)$ の定義関係式を変形することにより量子群が導入され，その表現論が $U(sl_2)$ の場合と同様に進むことを理解すること．

定義 13 量子群 $U_q(sl_2)$ とは次で定義される $\mathbb{C}(q)$-代数のことである．

$$\mathbb{C}(q)\langle E,F,q^{\pm H}\rangle/(q^HEq^{-H}-q^2E,q^HFq^{-H}-q^{-2}F,EF-FE-\frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}})$$