Mathematica Pannonica
2/1 (1990), 95 – 104

DREHZYKLIDEN DES GALILEISCHEN RAUMES G_3

Dominik **Palman**

Mathem. Institut der Universität, Marulićev trg 19, YU-41001 Zagreb, Jugoslawien.

Received October 1990

AMS Subject Classification: 51 N 25

Keywords: Cyclides of revolution, Galileian space.

Abstract: A Galilean space G_3 is a three-dimensional affine space with an absolute $\{\omega, f, J\}$, where f is a line in the plane of infinity ω and J an elliptic involution on f. A cyclide in G_3 is an algebraic surface of order 4 that has f as double-line. In this paper we investigate all cyclides, generated by an euclidean rotation in G_3.

Zykliden des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 sind nach G. Darboux [1] algebraische Flächen 4. Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt als Doppelkurve enthalten. Analog definiert man Zykliden des einfach isotropen Raumes I_3 als algebraische Flächen 4. Ordnung, welche das absolute Geradenpaar dieses Raumes als Doppelgeraden besitzen (H. Sachs [11] – [14]; D. Palman [2] – [6]).

Im galileischen Raum G_3 können wir analog *Zykliden als jene algebraischen Flächen 4. Ordnung definieren, welche die absolute Gerade f als Doppelgerade enthalten und keine weiteren Fernpunkte besitzen.*

In dieser Arbeit werden wir jene Zykliden des galileischen Raumes G_3 betrachten, die durch eine euklidische Drehung erzeugt werden können.

1. Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum $P_3(\mathrm{R})$, in dem wir die Punkte wie üblich durch reelle homogene Koordinaten

$$(1) \qquad (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0:0:0:0)$$

beschreiben, zeichnen wir eine reelle Ebene $\omega(x_0 = 0)$ und in dieser Ebene ω eine reelle Gerade $f(x_0 = x_1 = 0)$ aus. Außerdem definieren wir auf der Geraden f durch

$$(2) \qquad J: \quad (0:0:x_2:x_3) \rightarrow (0:0:x_3:-x_2)$$

eine elliptische Involution J.

Mit der so definierten Absolutfigur $[\omega, f, J]$ wird auf bekannte Weise ein galileischer Raum G_3 eingeführt (O. Röschel [9]). Die projektive Automorphismengruppe von $[\omega, f, J]$ ist achtparametrig und enthält eine ausgezeichnete sechsparametrige Untergruppe B_6, die man als *Bewegungsgruppe des galileischen Raumes* bezeichnet ([9,6]). Alle i.f. benützten Resultate aus der Geometrie des galileischen Raumes G_3 können in [9] nachgelesen werden.
Hier sei nun angemerkt, daß man in G_3 zwei Typen eigentlicher Ebenen unterscheidet: *Euklidische Ebenen* (dies sind Ebenen, die f enthalten) und *isotrope Ebenen* (dies sind Ebenen, die f nicht enthalten). Die von B_6 in einer euklidischen Ebene induzierte *Metrik* ist *euklidisch*, die in einer isotropen Ebene induzierte *Geometrie* ist *isotrop* (H. Sachs [11]). Als *Punktkugeln* des galileischen Raumes G_3 bezeichnen wir jene parabolischen Zylinder, welche die Fernebene längs der absoluten Geraden f berühren. Die Gleichung dieser Kugeln ist von der Form

$$(3) \qquad Ax^2 + Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0, \qquad (A \neq 0,\ C^2 + D^2 \neq 0).$$

Die *Spitze* einer solchen Punktkugel liegt im Punkt $S(0:0:D:$ $:-C)$ auf der absoluten Geraden f.

Im galileischen Raum G_3 existieren zwei verschiedene Arten von *Kreisen*:

1. *Euklidische Kreise:* Das sind Kegelschnitte, die in euklidischen Ebenen liegen und die beiden konjugiert-komplexen Doppelpunkte $(0:$ $:0:1:\pm i)$ der absoluten Involution J enthalten.

2. *Isotrope Kreise:* Dies sind Parabeln in isotropen Ebenen. Die isotropen Kreise berühren die Fernebene in einem Punkt der absoluten Geraden f.

Die Gruppe B_6 enthält 2 Typen von Drehungsgruppen als Untergruppen:

1. *Euklidische Drehungen* mit der Normalform

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 \cos t + z_0 \sin t \\ z(t) &= -y_0 \sin t + z_0 \cos t. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die Drehachse ist hier die x-Achse (Fixpunktgerade). Die Bahnkurven sind euklidische Kreise in euklidischen Ebenen.

2. *Isotrope Drehungen* mit der Normalform

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + bt \\ y(t) &= y_0 + x_0 t + b\tfrac{t}{2}^2 \\ z(t) &= z_0 . \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die Bahnkurven dieser Gruppe sind isotrope Kreise vom Radius b in isotropen Ebenen.

2. In dieser Arbeit werden wir nur jene Flächen untersuchen, die sich durch euklidische Drehung (4) eines isotropen Kreises κ um die x-Achse erzeugen lassen. Je nach der Lage von κ können wir einige Fälle unterscheiden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn κ ein Kreis in einer *Meridianebene*, d.h. einer Ebene durch die x-Achse ist. Man kann dann κ ohne Einschränkung der Allgemeinheit in $z = 0$ mittels

$$\kappa \ \ldots \qquad \begin{aligned} x &= v \\ y &= 2pv^2 + A \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

ansetzen. Unterwirft man ihn der euklidischen Drehung (4), so erhält man eine Fläche 4. Ordnung der Gestalt

$$y^2 + z^2 = (2px^2 + A)^2. \tag{7}$$

Dies ist offensichtlich eine Zyklide, deren Meridiankurven isotrope Kreise sind, also eine *Torusfläche* des galileischen Raumes G_3. Solche Torusflächen wurden von O. Röschel in [10] ausführlich untersucht.

3. Wir betrachten weiter einen isotropen Kreis mit der Parameterdarstellung

$$(8) \qquad \kappa \ldots \qquad \begin{aligned} x &= v \\ y &= 2pv^2 + A \\ z &= kv. \end{aligned}$$

Dieser isotrope Kreis liegt in der Ebene

$$(9) \qquad \rho \ldots z = kx,$$

die ersichtlich keine Meridianebene ist.

Unterwirft man den Kreis κ (8) der euklidischen Drehung (4), so erhält man eine Fläche Φ mit der Gleichung

$$(10) \qquad \Phi \ldots y^2 + z^2 = (2px^2 + A)^2 + k^2x^2.$$

Das ist offensichtlich eine Drehzyklide Φ. *Die Zyklide* Φ (10) *besitzt die absolute Gerade f als Doppelgerade und die konjugiert komplexen absoluten Punkte* $(0:0:1:\pm i)$ *als uniplanare Knotenpunkte.*

Die Meridiankurve in der Meridianebenen $z = 0$ ist durch

$$(11) \qquad \mu \ldots y^2 = (2px^2 + A)^2 + k^2x^2 \quad \text{bzw.}$$

$$(12) \qquad 4p^2x^4 + (k^2 + 4pA)x^2 - y^2 + A^2 = 0$$

gegeben. Dies ist eine (bezüglich der x-Achse) axialsymmetrische, vollständig zirkuläre Kurve 4. Ordnung in der isotropen Ebenen $z = 0$ vom Typus (2,2) (vgl. [8]). Die Gleichung (12) läßt sich auch in der Form

$$(13) \qquad \begin{aligned} &(2px^2 - y + \tfrac{k^2+4pA}{4p})(2px^2 + y + \tfrac{k^2+4pA}{4p}) - \\ &\quad - \tfrac{(k^2+4pA)^2}{16p^2} + A^2 = 0 \end{aligned}$$

schreiben. Die Meridiankurve (13) hat daher zwei isotrope asymptotische Kreise

$$(14) \qquad \kappa_1, \kappa_2 \ldots 2px^2 \pm y + \tfrac{k^2+4pA}{4p} = 0,$$

die keinen eigentlichen Punkt mit der Kurve (13) gemeinsam haben. Die Radien der asymptotischen Kreise sind p bzw. $-p$. Die Kreise liegen symmetrisch bezüglich der x-Achse. Weiters hat die Meridiankurve (13) einen Selbstberührungspunkt im absoluten Punkt.

Da die Zyklide Φ (10) auch durch Drehung der Meridiankurve (13) erzeugt werden kann, folgt, daß die *Drehzyklide* Φ (10) *sich längs* *der absoluten Geraden f selbst berührt und gleichzeitig die Fernebene ω berührt.*

Nach (13) läßt sich die Gleichung der Zyklide (10) in der Form

$$y^2 + z^2 = (2px^2 + \tfrac{k^2+4pA}{4p})^2 - (\tfrac{k^2+4pA}{4p})^2 + A^2 \tag{15}$$

schreiben. Andererseits erhält man durch Drehung der asymptotischen Kreise (14) der Meridiankurve (13) eine galileische Torusfläche τ mit der Gleichung

$$\tau \ \dots \ y^2 + z^2 = (2px^2 + \tfrac{k^2+4pA}{4p})^2. \tag{16}$$

Aus (15) ist ersichtlich, daß die Torusfläche τ (16) keinen eigentlichen Punkt mit der Drehzyklide Φ (10) gemeinsam hat, d.h. wir können die Torusfläche τ (16) als *asymptotischen Torus der Drehzyklide* Φ (10) bezeichnen.

4. Wir wollen nun untersuchen, welche Kreise auf der Drehzyklide Φ (10) liegen.

Betrachten wir zunächst den erzeugenden isotropen Kreis κ (8) in der Ebene ρ (9). Die Ebene ρ schneidet die Drehzyklide Φ (10) in noch einem weiteren isotropen Kreis $\bar{\kappa}$, der zum Kreis κ bezüglich der xz-Ebene symmetrisch liegt. Bei Drehung der Ebene ρ umhüllen diese Ebenen einen Drehkegel und die Kreise κ und $\bar{\kappa}$ beschreiben zwei Systeme von isotropen Kreisen der Drehzyklide Φ (10). *Diese beiden Systeme bezeichnen wir mit K_1 und K_2.* Die Kreise der beiden Systeme liegen in den Tangentialebenen des erwähnten Drehkegels.

Man sieht leicht, daß *durch jeden Punkt der Zyklide Φ je ein isotroper Kreis beider Systeme K_1 und K_2 hindurchgeht.*

Betrachten wir weiter die Ebene

$$\sigma \ \dots \ y = \sqrt{k^2 + 8pA}\; x \tag{17}$$

und schneiden wir die Drehzyklide Φ (10) mit dieser Ebene. Durch Einsetzen von (17) in (10) erhalten wir die Projektion der Schnittkurve auf die xz-Ebene in der Form

$$z^2 = (2px^2 + A)^2. \tag{18}$$

Das sind zwei isotrope Kreise, und die Ebene σ ist eine Doppeltangentialebene der Zyklide Φ. Durch Drehung der Ebene σ um die x-Achse erhalten wir zwei Systeme von isotropen Kreisen in Ebenen, die wieder einen Kegel umhüllen. Dieser Kegel berührt die Drehzyklide Φ (10) längs zweier euklidischer Parallelkreise. *Diese beiden Kreissysteme bezeichnen wir mit L_1 und L_2.* Daraus schließt man leicht, daß durch jeden Punkt der Zyklide je ein Kreis beider Systeme L_1 und L_2 hindurchgeht. Die isotropen Kreise der beiden Systeme L_1 und L_2 der Drehzyklide Φ (10) sind das Analogon zu den *Villarceauschen Kreisen* der Torusfläche (vgl. [10]). Zusammenfassend gilt der

Satz 1. *Durch einen allgemeinen Punkt P der Drehzyklide Φ (10) des galileischen Raumes G_3 geht ein euklidischer Kreis (Parallelkreis der Drehzyklide Φ) und je ein isotroper Kreis der vier Kreissysteme K_1, K_2, L_1* und *L_2.*

5. Die Kreise der betrachteten Kreissysteme können auch nicht reell sein. Wir betrachten im folgenden verschiedene Fälle betreffend die Realität der erzeugenden Kreise der Zyklide Φ (10). Dabei werden die Koeffizienten p, A und k stets als reell vorausgesetzt.

1. Bei der Drehzyklide Φ mit der Gleichung (10) handelt es sich um eine Fläche, bei der alle vier Kreissysteme K_1, K_2, L_1, L_2 reell sind. Die asymptotische Torusfläche ist ebenfalls reell.

2. Bei der durch

$$y^2 + z^2 = 4p^2x^2 - (k^2 - 4pA)x^2 \tag{19}$$

gegebenen Drehzyklide sind die Kreise der Systeme K_1 und K_2 imaginär. Diese Kreise haben reelle Projektionen in die xy-Ebene, liegen aber in imaginären Ebenen.

3. Bei der durch

$$4p^2x^4 - (k^2 - 4pA)x^2 + y^2 + A^2 = 0 \tag{20}$$

gegebenen Drehzyklide sind die Kreise der Systeme K_1 und K_2 konjugiert-komplex, liegen aber stets in reellen Ebenen.

6. Bei unseren bisherigen Betrachtungen war die Lage des erzeugenden Kreises κ (8) nicht ganz allgemein. Man kann leicht beweisen, daß ein isotroper Kreis des galileischen Raumes, der allgemeine Lage besitzt, sich stets in der Normalform

$$\kappa \ \ldots \quad \begin{aligned} x &= v \\ y &= 2pv + A \\ z &= kv + 1 \end{aligned} \tag{21}$$

darstellen läßt. Dies gelingt stets durch Anwendung einer geeigneten euklidischen Drehung (4). Unterwirft man den Kreis κ (21) der euklidischen Drehung (4), so erhält man wieder eine Drehzyklide, deren Gleichung

$$\Phi \ \dots \ y^2 + z^2 = (2px^2 + A)^2 + (kx + 1)^2 \tag{22}$$

lautet. Die Gleichung einer allgemeinen Drehzyklide des galileischen Raumes, die durch euklidische Drehung eines isotropen Kreises entsteht, kann man somit immer auf die Form (22) transformieren. Was die Kreissysteme einer solchen Fläche betrifft, gilt der Satz 1 in analoger Weise.

7. Es liegt nun die Frage nahe, ob durch (22) alle euklidischen Drehzykliden des galileischen Raumes erfaßt werden, oder ob es noch andere gibt. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir die Gleichung einer allgemeinen Zyklide Φ des galileischen Raumes G_3 betrachten. Dabei muß man, bezugnehmend auf die Definition einer Zyklide des G_3, die drei folgenden Punkte beachten:

1. Die Zyklide Φ besitzt außer der absoluten Ferngeraden f (Ferngerade der Ebene $x = 0$) keine weiteren Fernpunkt, d.h. die Gleichung der Zyklide Φ kann nur ein Glied vierten Grades nämlich x^4 enthalten.

2. Da die Ferngerade f Doppelgerade der Fläche Φ ist, schneidet jede Ebene $x = const.$ die Zyklide Φ (außer in f) nach einer Kurve 2. Ordnung, d.h., wenn man in der Gleichung der Zyklide $x = const.$ setzt, so muß eine Gleichung zweiten Grades in y und z übrig bleiben.

Zieht man dies alles in Betracht, so lautet die Gleichung einer allgemeinen Zyklide

$$x^4 + \alpha x^3 + x^2 p_1^1(y,z) + x p_2^2(y,z) + p_3^2(y,z) = 0, \tag{23}$$

wo die p_i^n Polynome n-ten Grades bezeichnen und $\alpha \in \mathrm{R}$ gilt. Sucht man nun die Gleichung einer allgemeinen *euklidischen Drehzyklide* Φ des galileischen Raumes G_3, d.h. einer Zyklide, die durch euklidische Drehung um die x-Achse entsteht, so muß man noch folgendes beachten:

3. Schneidet man eine solche Drehzyklide Φ mit einer Ebene σ mit der Gleichung $x = const.$, so ist der Schnitt ein euklidischer Kreis mit dem Mittelpunkt im Schnittpunkt der x-Achse mit der Ebene σ. Hieraus folgt durch eine einfache Rechnung, daß sich die euklidischen Drehzykliden des G_3 in der Gestalt

$$(24) \qquad \Phi \ \ldots \ (Ax + B)(y^2 + z^2) + q^4(x) = 0$$

schreiben lassen.

Man kann hier zwei Typen von euklidischen Drehzykliden unterscheiden:

Typ I: $A = 0$

Die Gleichung der euklidischen Drehzyklide lautet dann

$$(25) \qquad \Phi_I \ \ldots \ y^2 + z^2 + r^4(x) = 0.$$

Durch Vergleich mit der Gleichung (22) und nach den bisherigen Betrachtungen erkennt man, daß die Drehzykliden Φ_I (25) alle jene Drehzykliden sind, die durch euklidische Drehung eines isotropen Kreises um x-Achse erzeugbar sind.

Die Drehzykliden Φ_I besitzen eine Selbsberührung längs der absoluten Geraden f und haben in den absoluten Punkten I_1, I_2 zwei uniplanare Knotenpunkte.

Typ II: $A \neq 0$

Die Gleichung (24) kann man dann in der Form

$$(26) \qquad \Phi_{II} \ \ldots \ (Ax + B)(y^2 + z^2) + g^3(x) + S = 0$$

schreiben. Daraus entnimmt man unmittelbar, daß zur Drehzyklide Φ_{II} eine euklidische Ebene τ mit der Gleichung

$$(27) \qquad \tau \ \ldots \ Ax + B = 0,$$

existiert, die keinen eigentlichen Punkt mit der Drehzyklide Φ_{II} (26) gemeinsam hat. τ könnte man als *asymptotische Ebene* bezeichnen. Man erhält (27) auch dadurch, daß man die Flächengleichung (26) partiell nach z differenziert, und die entstehende Gleichung gleich Null setzt. Somit ist (27) die zu (26) gehörige Hauptachsenfläche Σ^*, wie sie von H. SACHS in [14] eingeführt wurde und bei der Klassifikation der Zykliden des Flaggenraumes benützt wurde.

Es existiert hier weiter eine Fläche 3. Ordnung mit der Gleichung

$$(28) \qquad \Sigma \ \ldots \ y^2 + z^2 + g^3(x) = 0,$$

welche die absolute Gerade f als einfache Gerade enthält, und außerdem keine weiteren uneigentlichen Punkte trägt. Man kann diese Fläche Σ als euklidische Drehzyklide 3. Ordnung bezeichnen. Die Fläche Σ berührt und schneidet gleichzeitig die Fernebene längs der absoluten Geraden f. Wir bezeichnen diese Fläche Σ (28) als *asymptotische*

Fläche der Drehzyklide Σ (26). Die Zykliden 3. Ordnung des Flaggenraumes wurden von H. SACHS in [15] vollständig klassifiziert. Gemäß dieser Klassifikation gehört (28) zum ersten Haupttyp, Unterklasse IA, elliptischer Fall.

Die Fläche Σ (28) ist eine Drehfläche (euklidische Drehung um x-Achse) mit der Meridiankurve

$$y^2 + g^3(x) = 0 \tag{29}$$

in der xy-Ebene. Dies ist eine divergente Parabel (vgl. [7]). Die asymptotische Drehfläche Σ entsteht somit durch euklidische Drehung einer divergenten Parabel um x-Achse.

Die Meridiankurve

$$(Ax + B)[y^2 + q^3(x)] + S = 0 \tag{30}$$

der Drehzyklide Φ_{II} (26) ist eine vollständig zirkuläre Kurve 4. Ordnung; sie besitzt eine asymptotische Gerade ($Ax + B = 0$) und eine asymptotische, divergente Parabel. Demnach ist sie vom Typus $(1,3)_1$ (vgl. [8]).

Die Drehzyklide Φ_{II} (26) berührt und schneidet die Fernebene ω längs der absoluten Geraden f, und schneidet die Fernebene ω nochmals längs f. Wir fassen zusammen im

SATZ 2. *Im galileischen Raum G_3 existieren 2 Typen von euklidischen Drehzykliden, die sich durch die Normalformen (25) bzw. (26) beschreiben lassen. Die Drehzykliden vom Typ II (26) besitzen eine euklidische Drehzyklide 3. Ordnung als asymptotische Fläche. Auf den Drehzykliden (26) existieren außer den euklidischen Parallelkreisen keine weiteren Kreise.*

Literatur

[1] DARBOUX, G.: Sur une classe remarquable des courbes et des surfaces algebriques et sur la théorie des imaginaires, Paris 1873, I – VIII, 1 – 340.

[2] PALMAN, D.: Drehzykliden 4. Ordnung (Typus I) des einfach isotropen Raumes, *Glasnik Mat.* **15** (35) (1980), 133 – 148.

[3] PALMAN, D.: Dupinsche Zykliden des einfach isotropen Raumes, *Sitzungsber. der Österr. Akademie der Wiss.* **190** (1982), 427 – 443.

[4] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus II), *Rad JAZU* **408** (1984), 51 – 59.

[5] PALMAN, D.: Drehzykliden im einfach isotropen Raum (Typus III), *Rad JAZU* **421** (1986), 9 – 25.

[6] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus IV), *Rad JAZU* (im Druck).

[7] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, *Rad JAZU* **444** (1989), 36 – 46.

[8] PALMAN, D.: Vollständig zirkuläre Kurven 4. Ordnung in der isotropen Ebene, *Rad JAZU* (im Druck).

[9] RÖSCHEL, O.: Die Geometrie des galileischen Raumes, *Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz* **256** (1985), 1 – 120.

[10] RÖSCHEL, O.: Torusflächen des galileischen Raumes G_3, *Studia Scientiarum Mathematikarum Hungarica* **23** (1988), 401 – 410.

[11] SACHS, H.: Isotrope Raumgeometrie – einfach isotrope Geometrie, Braunschweig-Wiesbaden, 1990.

[12] SACHS, H.: Zur Theorie der Zykliden des einfach isotropen Raumes $I_3^{(1)}$, *Glasnik mat.* **24** (1989), 561 – 582.

[13] SACHS, H.: Parabolische Schiebzykliden des einfach isotropen Raumes, *Geometriae Dedicata* **31** (1989), 301 – 320.

[14] SACHS, H.: Allgemeine Theorie der Zykliden des Flaggenraumes, *Glasnik mat.* (eingereicht).

[15] SACHS, H.: Die Zykliden 3. Ordnung des Flaggenraumes, *Geometriae Dedicata* (in Vorbereitung).