Mathematica Pannonica
5/2 (1994), 169 – 175

ÜBER DERIVATIONEN AUF GEWISSEN FUNKTIONENRÄUMEN UND DEREN BEZIEHUNG ZUM DIFFERENTIATIONSOPERATOR

Zbigniew **POWĄZKA**

Poland, PL-30-612 Kraków, ul. W. Witosa 33/99

Michael **ROSE**

Germany, 38678 Clausthal-Zellerfeld, Am Schlagbaum 24

Received October 1993

AMS Subject Classification: 39 B 52, 39 B 62, 16 W 25

Keywords: Derivations, set of infinitely differentiable functions.

Abstract: In this paper we consider derivations on special sets of functions, mainly on the set of infinitely differentiable functions. We will be able to characterize the derivations on this set in such a way that the problem is reduced to that of determining the derivations on the real field, which is already done in the literature. Finally we characterize the differentiation operator as a derivation with some additional properties.

Der erste Autor hat auf der vierten „International Conference on Functional Equations and Inequalities" im Februar 1993 einen Vortrag mit dem Titel „Über ein Funktionalgleichungssystem des Differentiationsoperators" gehalten. Der zweite Autor hat dort darauf hingewiesen, daß das vorgestellte Funktionalgleichungssystem, welches Endomorphismen auf der Menge der stetigen Funktionen beschreibt, die zusätzlich noch die Produktregel und Kettenregel erfüllen, nur die triviale Lösung (den Nulloperator) besitzt. Durch gewisse Modifikationen konnte er

Die Autoren danken dem Referenten für einige hilfreiche Bemerkungen.

jedoch sämtliche Derivationen auf der Menge der auf einem Intervall beliebig oft differenzierbaren Funktionen beschreiben.

1. Vorbemerkungen

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein fest gewähltes Intervall. Gehören Randpunkte zum Intervall dazu, so sind unter Ableitungen in diesen Punkten im folgenden stets Einseitige zu verstehen. Die uns interessierenden Funktionenräume sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \{f\colon I \to \mathbb{R}\} \text{ die Menge der reellwertigen Funktionen auf } I,\\
\mathcal{F}_k &:= \{f \in F;\ f \text{ konstant}\},\\
\mathcal{P} &:= \{p \in F;\ p \text{ Polynom}\},\\
\mathcal{C} &:= \{f \in F;\ f \text{ stetig}\},\\
\mathcal{A}^n &:= \{f \in F;\ f \text{ n-mal differenzierbar}\}(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}).
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ ist bzgl. der punktweise erklärten Addition und (Skalar-)Multiplikation eine kommutative Algebra mit Einselement τ_0; $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}^n$ sind Teilalgebren. Dabei wird das n-te Monom für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\tau_n\colon I \ni t \to t^n \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Alle Ergebnisse gelten sinngemäß auch dann, wenn man komplexwertige Funktionen betrachtet.

1.1. Definition. Wir sagen die Transformation $T\colon \mathcal{D}(T) \to \mathcal{F}$ erfülle (D) dann und nur dann, wenn gilt:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{D}(T) \text{ ist Algebra, } T\colon \mathcal{D}(T) \to \mathcal{F}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&T(f+g) = Tf + tg && (2)\\
&T(f \cdot g) = fTg + gTf && (3)
\end{aligned}\right\} \text{ für alle } f, g \in \mathcal{D}(T).$$

Die Transformation $T\colon \mathcal{D}(T) \to \mathcal{F}$ ist also eine Derivation, an deren Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ gewisse Anforderungen gestellt werden.

Derivationen sind schon von vielen Autoren ausgiebig untersucht worden. Das Buch [4] gibt einen guten Überblick über die gängigen algebraischen Strukturen; Derivationen werden dort auf Seite 120 eingeführt. Die hier zugrundeliegende Menge, auf der die Derivationen erklärt werden, hat jedoch eine vergleichsweise reiche Struktur; es werden algebraische und analytische Eigenschaften zusammen betrachtet.

1.2. Definition. Die Transformation $T\colon \mathcal{D}(T) \to \mathcal{F}$ erfülle (D$'$) dann und nur dann, wenn sie (D) erfüllt und zusätzlich gilt:

$$(4) \qquad T_{\tau_1} = \tau_0, \quad T\phi = \Theta \text{ für } \phi \in \mathcal{F}_k,$$

wobei $\Theta \in \mathcal{F}$ die Nullfunktion bezeichnet.

Die letzte Bedingung dient als Normierung; sie liefert im Satz (2.5) die Übereinstimmung der betrachteten Derivation mit dem Differentiationsoperator, der natürlich (D′) erfüllt.

1.3. Bemerkung. *T erfülle* (D) *und zusätzlich*

(4a) $\mathcal{D}(T)$ *ist* $\circ$*-abgeschlossen, d.h.:* $f, g \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{D}(T)$,

(4b) $T(f \circ g) = (Tf \circ g) \cdot Tg$, *für alle* $f, g \in \mathcal{D}(T)$,

(4c) *zu jedem* $t \in I$ *existiert ein* $f \in \mathcal{D}(T)$ *mit* $(Tf)(t) \neq 0$.

Dann erfüllt T such (D′); *es gibt also* (4). Dies sieht man so:

$$T\phi = T(\phi \circ \Theta) \overset{(4b)}{=} (T\phi \circ \Theta) \cdot T\Theta \overset{(2)}{=} \Theta \qquad \text{für } \phi \in \mathcal{F}_k,$$

$$Tf = T(f \circ \tau_1) \overset{(4b)}{=} (Tf \circ \tau_1) \cdot T\tau_1 = Tf \cdot T\tau_1 \text{ für } f \in \mathcal{D}(T),$$

und weiter

$$Tf \cdot (T\tau_1 - \tau_0) = \Theta \qquad \text{für } f \in \mathcal{D}(T).$$

Wegen (4c) erhalten wir daraus $T\tau_1 = \tau_0$, also insgesamt die Bedingung (4). ◊

Die Normierungsbedingung (4) kann also durch die Kettenregel (4a, 4b) und eine weitere relativ schwache Bedingung (4c) ersetzt werden:

$$\text{(D),(4a-c)} \Rightarrow \text{(D}'\text{)}.$$

Der Sinn der Bemerkung (1.3) liegt einzig und allein in dem Nachweis, daß die im weiteren Verlauf ausschließlich benutzten Bedingungen (D′) wirklich weniger fordern, als die im anfangs erwähnten Vortrag von Z. Powązka.

Vorab wird nun noch der für die weiteren Untersuchungen wesentliche stetig fortgesetzte Differenzenquotient einer differenzierbaren Funktion betrachtet:

1.4. Definition und Lemma. Zu $f \in \mathcal{F}$, f differenzierbar im Punkt $t_0 \in I$ sei

$$(5) \qquad r(t) := r_{f,t_0}(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} & \text{für } t \neq t_0, \\ f'(t_0) & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

der an der Stelle t_0 stetig fortgesetzte Differenzquotient von f. Damit gilt:

(6) *Für $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{A}^{n+1}$ und $t_0 \in I$ ist $r_{f,t_0} \in \mathcal{A}^n$.*

Beweis. Seien $f \in \mathcal{A}^{n+1}$ und $t_0 \in I$ gewählt. Definiere $R \in \mathcal{A}^{n+1}$ durch

$$f(t) =: \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} \cdot (t-t_0)^k + R(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus dieser Gleichheit folgt durch sukzessive Differentiation für $m \in \{0, \ldots, n+1\}$

$$f^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{n+1-m} \frac{f^{(m+k)}(t_0)}{k!} \cdot (t-t_0)^k + R^{(m)}(t).$$

Weil $R^{(m)}(t)$ das Restglied zum $(n+1-m)$-ten Taylorpolynom von $f^{(m)}(t)$ ist, gilt für $0 \le m \le n$ (vergleiche etwa [3], Seite 239):

(7) $$R^{(m)}(t) = o\big((t-t_0)^{n+1-m}\big) \qquad (t \to t_0).$$

Definiere $S \in \mathcal{F}$ durch

$$r(t) =: \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!} \cdot (t-t_0)^k + S(t), \qquad t \in I.$$

Daraus ergibt sich:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{R(t)}{t-t_0}, & t \neq t_0 \\ 0, & t = t_0 \end{cases}$$

Zu zeigen bleibt, daß S n-mal auf I differenzierbar ist, denn dann gilt dies auch für r. Für $t \notin t_0$ ist $S(t)$ sogar $(n+1)$-mal differenzierbar. Mit Hilfe der Leibnizschen Regel für die mehrfache Differentiation von Produkten erhält man für $0 \le m \le n+1$, $t \neq t_0$:

$$S^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} R^{(k)}(t) \cdot \frac{(-1)^{m-k}(m-k)!}{(t-t_0)^{m-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{k!} \cdot (t-t_0)^{n-m} \cdot \frac{R^{(k)}(t)}{(t-t_0)^{n+1-k}}.$$

Mit (7) bekommt man hiermit für $0 \le m \le n-1$ schließlich $\frac{S^{(m)}(t)}{t-t_0} \xrightarrow{t \to t_0} 0$, woraus weiter $S'(t_0) = \ldots = S^{(n)}(t_0) = 0$, also insgesamt die n-malige Differenzierbarkeit von S im Punkt t_0 folgt. $\Diamond$

Das Beispiel $f(t) := \operatorname{sgn} t \cdot t^2$, $r_{f,0}(t) = |t|$ zeigt übrigens schnell, daß es Fälle gibt, in denen r in $\mathcal{A}^n \setminus \mathcal{A}^{n+1}$ liegt $(n \in \mathbb{N}_0)$.

2. Folgerungen

Ohne die Bedingung (4) wird man erwarten, daß es auf den Funktionenräumen $\mathcal{A}^n$ eine Fülle von Derivationen geben wird. Das folgende Lemma gibt eine Schar davon an, die sich im Falle des Raumes $\mathcal{A}^\infty$ als erschöpfend erweisen wird:

2.1. Definition und Lemma. Es sei $\alpha \in \mathcal{F}$ und B: $\mathcal{F}_k \mapsto \mathcal{F}$ eine Derivation. Definiere für $f \in \mathcal{A}^1$

$$(K_B f)(t) := \big(B(f(t)\tau_0) - f' \cdot B(t\tau_0)\big)(t), \quad t \in I,$$
$$Tf := \alpha \cdot f' + K_B f.$$

Dann sind K_B und T zwei Derivationen (D) *auf $\mathcal{A}^1$.* Dies kann durch direktes Nachrechnen der Bedingungen (2) und (3) eingesehen werden.

Das nächste Lemma zeigt nun, daß sich jede Derivation nach (D) wenigstens auf einem Teilbereich in dieser Form darstellen läßt:

2.2. Lemma. *T erfülle* (D), *und es sei $\alpha := T\tau_1$ und $B := T|_{\mathcal{F}_k}$. Dann gilt:*

Für $f \in \mathcal{A}^1 \cap \mathcal{D}(T)$ und $t_0 \in I$ mit $r_{f,t_0} \in \mathcal{D}(T)$ ist $(Tf)(t_0) = = (\alpha \cdot f' + K_B f)(t_0)$.

Beweis. Unter den Voraussetzungen an f und $r = r_{f,t_0}$ folgt:

$$\begin{aligned} f &= f(t_0)\tau_0 + (\tau_1 - t_0\tau_0) \cdot r, \\ Tf &= B(f(t_0)\tau_0) + (\alpha - B(t_0\tau_0)) \cdot r + (\tau_1 - t_0\tau_0) \cdot Tr, \\ (Tf)(t_0) &= (\alpha f')(t_0) + (B(f(t_0)\tau_0) - f' \cdot B(t_0\tau_0))(t_0) \\ &= (\alpha f' + K_B f)(t_0). \ \Diamond \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, daß die Forderung $r_{f,t_0} \in \mathcal{D}(T)$ für $f \in \mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{D}(T)$ immer erfüllt ist.

Wir kommen nun zu den abschließenden Sätzen, die das Wesentliche noch einmal zusammenfassen:

2.3. Satz. *T erfülle* (D), *es sei $\alpha := T\tau_1$, $B := T|_{\mathcal{F}_k}$, und für $f \in \mathcal{A}^1$ sei $\tilde{T}f := \alpha f' + K_B f$. Dann ist $\tilde{T}$ eine Derivation, und es gilt:*

a) $$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow T|_{\mathcal{A}^1} = \tilde{T},\ T(\mathcal{C}) \overset{\neq}{\supset} \mathcal{C},$$

b) $$n \in \mathbb{N} \text{ und } \mathcal{A}^n \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow T|_{\mathcal{A}^{n+1}} = \tilde{T}|_{\mathcal{A}^{n+1}},$$

c) $$\mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow T|_{\mathcal{A}^\infty} = \tilde{T}|_{\mathcal{A}^\infty}.$$

Zu beweisen bleibt nur Punkt a): $\mathcal{C}$ ist eine echte Teilmenge der Menge aller f' mit $f \in \mathcal{A}^1$; die Letztere ist wiederum wegen $Tf = f'$ in $T(\mathcal{C})$ enthalten. $\Diamond$

Ist T zusätzlich linear, so ist B wegen $B\tau_0 = B(\tau_0 \cdot \tau_0) = 2\tau_0 \cdot \cdot B\tau_0 = 2B\tau_0$ notwendig das Nullfunktional, und es ergibt sich:

2.4. Satz. *T erfülle* (D)*, sei linear, und es sei $\alpha := T\tau_1$. Dann gilt:*

a) $$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^1 \textit{ ist } Tf = \alpha f',$$

b) $$n \in \mathbb{N} \textit{ und } \mathcal{A}^n \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^{n+1} \textit{ ist } Tf = \alpha f',$$

c) $$\mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^\infty \textit{ ist } Tf = \alpha f',$$

d) $$\textit{für } f \in \mathcal{P} \textit{ ist } Tf = \alpha f'.$$

Zu beweisen bleibt nur Punkt d): Wegen der Linearität reicht es, für $n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen, daß $T\tau_n = n\alpha\tau_{n-1}$ gilt. Letzteres zeigt man induktiv. $\Diamond$

2.5. Satz. *T erfülle* (D$'$)*. Dann gilt:*

a) $$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^1 \textit{ ist } Tf = f',$$

b) $$n \in \mathbb{N} \textit{ und } \mathcal{A}^n \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^{n+1} \textit{ ist } Tf = f',$$

c) $$\mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{D}(T) \Rightarrow \textit{für } f \in \mathcal{A}^\infty \textit{ ist } Tf = f',$$

d) $$\textit{für } f \in \mathcal{P} \textit{ ist } Tf = f'.$$

3. Schlußbemerkung

Die Frage, ob es überhaupt Derivationen gibt, die auf ganz $\mathcal{C}$ definiert sind, konnte nicht beantwortet werden. Es hat sich hier jedoch gezeigt, daß sämtliche Derivationen von $\mathcal{A}^\infty$ Restriktionen der in Lemma 2.1 definierten Derivationen auf $\mathcal{A}^1$ sind und der Differentiationsoperator die einzige Derivation auf $\mathcal{A}^\infty$ ist, die zusätzlich noch die Normierungsbedingung (4), also insgesamt (D$'$) erfüllt.

Die Derivationen auf $\mathcal{A}^\infty$ hängen von einer Derivation $B\colon \mathcal{F}_k \mapsto \mathcal{F}$ und einer „Steigungsfunktion" α ab. B ist jedoch genau dann eine Derivation, wenn für jedes $t \in I$ die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto B(x\tau_0)(t) \in \mathbb{R}$ eine Derivation auf $\mathbb{R}$ ist; da es eine Fülle unstetiger Derivationen in $\mathbb{R}$ gibt, erkennt man, was für eine Vielzahl von Derivationen auf $\mathcal{A}^\infty$ existieren. Speziell die Derivationen auf dem Körper $\mathbb{R}$ werden relativ ausführlich in [1], Kapitel XIV, Seite 346–355 abgehandelt. Dort wird auch deutlich, daß sämtliche von Θ verschiedenen Derivationen auf $\mathbb{R}$ nicht meßbar, also ziemlich exotisch sind.

Literatur

[1] KUCZMA, M.: An introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[2] KUCZMA, M.: Functional Equations in a Single Variable, Warszawa, 1968.

[3] BLATTER, C.: Analysis I. (4. Auflage), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1991.

[4] ZARISKI, O. und SAMUEL, P.: Commutative Algebra (Volume I), New York, 1958.