Mathematica Pannonica
7/1 (1996), 23 – 31

EIN KUGELPROBLEM IM FLAGGENRAUM

Ferenc **Mészáros**

Lehrstuhl für Mathematik, BDTF, H–9701 Szombathely, Pf. 170, Ungarn

Herrn O. Prof. Dr. H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received January 1995

MSC 1991: 51 N 25

Keywords: Double isotropic space, spheres.

Abstract: In the Euclidean space M. Husty and H. Sachs solved the problem to determine all spheres in the threedimensional space, that touch 4 given lines $g_1, \dots, g_4$; this question plays an important role in robotics. In this paper we consider the analogue question in the banner space (double isotropic space).

1. Einleitung

In [4] lösten M. Husty und H. Sachs die Aufgabe, alle Kugeln des dreidimensionalen Raumes zu bestimmen, die 4 vorgegebene Geraden $g_1, \dots, g_4$ berühren; diese Aufgabe spielt eine wichtige Rolle in der Robotik. Im einfach isotropen Raum wurde dieselbe Fragestellung gelöst in [5] von F. Mészáros und H. Sachs. Die vorliegende Abhandlung ist der analogen Fragestellung im Flaggenraum gewidmet.

Es bezeichne P_3 den dreidimensionalen reellen projektiven Raum, ω eine Ebene in P_3 und $A_3 := P_3 \setminus \omega$ den zugeordneten affinen Raum. Ein affiner Raum A_3 heißt *Flaggenraum (zweifach isotroper Raum)* $I_3^{(2)}$, wenn er über eine Absolutfigur $\{\omega, f, F\}$ metrisiert wird, wobei f eine Gerade in ω und F einen Punkt auf f bezeichnet.

Die Geometrie dieses Raumes wurde erstmals von H. Brauner in der grundlegenden Arbeit [1]–[3] studiert.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\{x, y, z\}$ affine Koordinaten in $I_3^{(2)}$

und mit $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ die zugehörigen projektiven Koordinaten. Es ist dann üblich, die Absolutfigur $\{\omega, f, F\}$ durch

$$\omega \ldots x_0 = 0, \quad f \ldots x_0 = x_1 = 0, \quad F(0:0:0:1) \tag{1.1}$$

festzulegen. Die allgemeine projektive Automorphismengruppe von $\{\omega, f, F\}$ ist neunparametrig und läßt sich bezüglich (1.1) durch

$$\begin{cases} \bar{x} = b_1 + b_2 x \\ \bar{y} = b_3 + b_4 x + b_5 y \\ \bar{z} = b_6 + b_7 x + b_8 y + b_9 z \end{cases} \tag{1.2}$$

beschreiben (vgl. [1,119]). Diese Gruppe enthält als Normalteiler die sechsparametrige Untergruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$

$$\begin{cases} \bar{x} = c_1 + x \\ \bar{y} = c_2 + c_3 x + y \\ \bar{z} = c_4 + c_5 x + c_6 y + z\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

die man als zweifach isotrope Bewegungsgruppe bezeichnet (vgl. [1, 120]). Sie liegt auch dieser Arbeit zu Grunde. Die Geometrie $\{I_3^{(2)}, \mathcal{B}_6^{(2)}\}$ heißt *zweifach isotrope Bewegungsgeometrie.* Alle diesbezüglichen Begriffe und Sätze, die i.f. benutzt werden, können in [1]-[3] bzw. in der geplanten Monographie [6] von H. Sachs nachgelesen werden. Hier sei nur erwähnt, daß man die Gerade f als absolute Gerade und den Punkt P als absoluten Punkt bezeichnet. Ebenen ε, welche f enthalten, heißen *vollisotrop.* Ebenen durch F mit $f \not\subset \varepsilon$ heißen *isotrop* und Ebenen ε mit $F \notin \varepsilon$ heißen *nichtisotrop.* Geraden g mit $F \in g$ heißen *vollisotrop.* Geraden, die f in einem von F verschiedenen Fernpunkt schneiden, heißen *isotrop.* Geraden, die f nicht schneiden, heißen *nichtisotrop.* Im Flaggenraum existieren zwei Klassen von Kugeln, nämlich die Punktkugeln bzw. Punktgrenzkugeln mit der Darstellung

$$z = Rx^2 + Ax + By + C \quad \text{bzw.} \tag{1.4}$$

$$y = rx^2 + Ax + C\,, \tag{1.5}$$

wobei R bzw. r eine $\mathcal{B}_6^{(2)}$-Invariante ist, die Radius der Punktkugel bzw. Punktgrenzkugel genannt wird. Die Flächen (1.5) sollen i.f. nicht betrachtet werden. Die Kugeln (1.4) sind — euklidisch betrachtet — parabolische Zylinder, deren Erzeugenden mit der $[xy]$-Ebene $z = 0$ den isotropen Winkel $B =: \psi$ einschließen. Die Ebene $z = 0$ schneidet (1.4) (im allgemeinen Fall) nach einem isotropen Kreis k

$$y = -\frac{R}{B}x^2 - \frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{1.6}$$

vom Radius $\rho := -\frac{R}{B}$ ($B \neq 0$). In $z = 0$ herrscht je eine ebene isotrope Geometrie (vgl. [7]). Im Sinne der ebenen isotropen Geometrie sind alle Punkte von k gleichberechtigt. Denken wir uns die Ebene $z = 0$ jedoch gleichzeitig euklidisch metrisiert, so ist der Scheitelpunkt H von k ein ausgezeichneter Punkt.

Die Erzeugende h der Kugel durch H heiße *Scheitelerzeugende.* Nach einer kurzen Rechnung gewinnt man die Koordinaten von

$$H\left(\xi = -\frac{A}{2R}, \eta = \frac{A^2 - 4RC}{4RB}\right) \tag{1.7}$$

Hilfssatz: *Kennt man die Scheitelerzeugende einer Punktkugel Σ und den Radius ρ von k, dann ist Σ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ist h samt H gegeben, so kennt man die Neigung $\psi = B$. Aus $\rho = -\frac{R}{B}$ erhält man somit R. Aus $\xi = -\frac{A}{2R}$ gewinnt man A und aus $\eta = \frac{A^2-4RC}{4BR}$ schließlich C. $\Diamond$

2. Ein Berührproblem für Punktkugeln des $\mathbf{I}_3^{(2)}$

In Analogie zu [4] bzw. [5] untersuchen wir im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ die Frage, ob zu vorgegebenen Geraden $g_1, \ldots, g_4$ Punktkugeln Σ existieren, die $g_1, \ldots, g_4$ berühren. Tangenten von Σ sind niemals vollisotrop und isotrop nur, wenn sie ganz auf Σ liegen, d.h. Erzeugende sind. Sind $g_1, \ldots, g_4$ als nichtisotrope Geraden vorauszusetzen. Wir legen eine Gerade g in der vektoriellen Darstellung

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{e} \tag{2.1}$$

fest, wobei wir $\vec{e}$ normieren können, d.h. $\vec{e} = (1, e_2, e_3)$ setzen und weiter o.B.d.A $\vec{a} = (0, a_2, a_3)$ wählen. Werden die Komponenten von (2.1) in (1.4) eingesetzt, so ergibt sich nach kurzer Rechnung für λ die quadratische Gleichung

$$R\lambda^2 + (A + Be_2 - e_3)\lambda + (Ba_2 + C - a_3) = 0\,, \tag{2.2}$$

deren Nullstellen die Schnittpunkte von g mit Σ festlegen. Das Verschwinden der Diskriminante von (2.2) liefert als Berührbedingung von g mit Σ

$$(A + Be_2 - e_3)^2 = 4R(Ba_2 + C - a_3)\,. \tag{2.3}$$

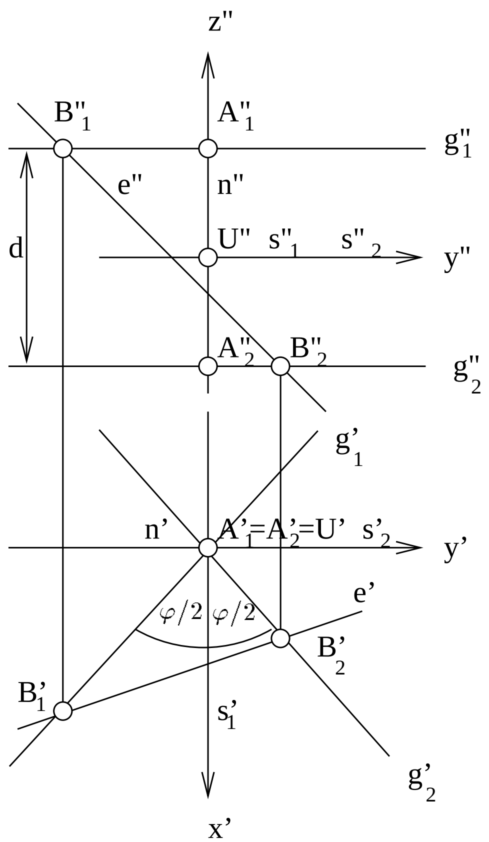

Abbildung 1

Wir setzen i.f. voraus, daß zwei windschiefe, nichtisotrope Geraden g_1, g_2 gegeben seien. Die beiden Geraden bestimmen dann eine eindeutige vollisotrope Gemeinnormale n, die g_1 in A_1 und g_2 in A_2 schneiden möge. Legt man die z-Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems in die Gerade n und den Koordinatenursprung U in den Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1A_2}$, so gilt (vgl. Abbildung 1)

$$A_1\left(0, 0, \frac{1}{2}d\right), \quad A_2\left(0, 0, -\frac{1}{2}d\right) \tag{2.4}$$

und man kann durch eine zweifach isotrope Bewegung (1.3) erreichen, daß die Einheitsvektoren von g_1 und g_2 die Komponenten

$$\vec{e}_1 = (1, -\varphi, 0), \quad \vec{e}_2 = (1, \varphi, 0) \tag{2.5a,b}$$

besitzen.

Die entsprechenden Berührbedingungen (2.3) vereinfachen sich dann zu

$$AB\varphi = Rd, \quad A^2 + B^2\varphi^2 = 4RC\,. \tag{2.6a,b}$$

Aus (1.7) und (2.6a,b) erhält man noch die wichtigen Formeln

$$\xi = -\frac{d}{2\varphi}\cdot\frac{1}{B}, \quad \eta = -\frac{\varphi^2}{4R}B\,. \tag{2.7}$$

Satz 1. *Alle Punktkugeln Σ von festem Radius R_0, die zwei windschiefe nichtisotrope Geraden berühren, bilden eine einparametrige Schar $\{\Sigma\}$.*

Die Menge der Scheitelpunkte von $\{\Sigma\}$ liegen auf einer speziellen Hyperbel mit der Gleichung

$$\xi \cdot \eta = \frac{d\varphi}{8R_0}\,. \tag{2.8}$$

Die Scheitelerzeugenden bilden eine konoidale Regelfläche 3. Ordnung mit der Darstellung

$$\frac{2\varphi}{d}x^2 z + xy - \frac{d\varphi}{8R_0} = 0\,. \tag{2.9}$$

Beweis. Aus (2.6a,b) folgt: $A = \frac{R_0 d}{B\varphi}$ und $C = \frac{R_0 d^2}{4B^2\varphi^2} + \frac{B^2\varphi^2}{4R_0}$; somit hängen A und C von Parameter B ab, d.h. $\{\Sigma\}$ ist eine einparametrige Schar. Aus (2.7) folgt: $\xi \cdot \eta = \frac{d\varphi}{8R_0}$. Die Scheitelerzeugenden obiger einparametriger Kugelschar ist somit wegen (2.7) durch

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta + \mu \\ z &= \mu B \end{aligned} \tag{2.10a–c}$$

gegeben, wobei $\vec{v} = (0, 1, B)$ der Richtungsvektor ist. Aus (2.7) und (2.10c) folgt: $\mu = -\frac{2\varphi x z}{d}$. Setzt man μ in (2.10b) ein, dann werden (2.10a) und (2.10b) multipliziert, so entsteht (2.9). Da alle Erzeugenden zur Ebene $x = 0$ parallel sind, ist die Regelfläche konoidal. $\Diamond$

Wir untersuchen als nächstes, ob es Kugeln vom festen Radius R_0 gibt, die drei vorgegebene paarweise windschiefe Geraden berühren.

Die Gerade g_3 wird durch $\vec{e}_3 = (1, e_{32}, e_{33})$ und $A_3(0, a_{32}, a_{33})$ festgelegt. Aus (2.3) und (2.6a,b) folgen die Bedingungen

$$\begin{aligned} AB\varphi &= R_0 d \\ A^2 + B^2\varphi^2 &= 4R_0 C \\ (A + Be_{32} - e_{33})^2 &= 4R_0(Ba_{32} + C - a_{33})\,. \end{aligned} \tag{2.11a–c}$$

Aus (2.11a) und (2.11b) folgt $A = \frac{R_0 d}{B\varphi}$ und $C = \frac{R_0^2 d^2 + B^4\varphi^4}{4R_0 B^2\varphi^2}$. Wird A und C in (2.11c) eingesetzt, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} &\varphi(e_{32}^2 - \varphi^2)B^3 - \varphi(2e_{32}e_{33} + 4R_0 a_{32})B^2 + \\ &+ (2R_0 d e_{32} + \varphi e_{33}^2 + 4R_0\varphi a_{33})B - 2R_0 d e_{33} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Gilt $e_{33} = 0$ in (2.12), dann sind die Geraden g_1, g_2, g_3 zur Ebene $[xy]$ parallel. Gilt $e_{32} = \pm\varphi$ in (2.12), dann liegen die Endpunkte der Richtungsvektoren von g_1 und g_3 bzw. g_2 und g_3 auf einer vollisotropen

Geraden. Gilt gleichzeitig $e_{33} = 0$ und $e_{32} = \pm\varphi$, dann sind g_1, g_2, g_3 keine paarweise windschiefen Geraden. Gilt $e_{33} \neq 0$ und $e_{32} \neq \pm\varphi$, dann ist die Gleichung (2.12) kubisch und liefert drei Lösungen für B im algebraischen Sinn. Durch Einsetzen dieser Werte in (2.11a) bzw. (2.11b) können die noch fehlenden Werte A_i bzw. C_i $(i = 1, 2, 3)$ der gesuchten Berührkugeln bestimmt werden. Damit liegen nach (1.4) die Berührkugeln $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ eindeutig fest. Wir definieren: g_1, g_2, g_3 sind von *allgemeiner Lage*, wenn $e_{32} \neq \pm\varphi$ und $e_{33} \neq 0$ gelten.

Wir fassen zusammen im

Satz 2. *Sind g_1, g_2, g_3 drei paarweise windschiefe nichtisotrope Geraden allgemeiner Lage, dann existieren zu vorgegebenem Radius R_0 im algebraischen Sinn genau drei Punktkugeln, die g_1, g_2 und g_3 berühren.*

Weiterhin folgert man leicht den

Satz 3. *Alle Punktkugeln Σ, die drei paarweise windschiefe nichtisotrope Geraden g_1, g_2, g_3 von allgemeiner Lage berühren, bilden eine einparametrige Schar $\{\Sigma\}$. Die Scheitelpunkte liegen auf der Kurve* 3. *Ordnung*

$$\begin{aligned} &4\varphi^2 d e_{33}^2 \xi^2 \eta + 2d^2\varphi^3 e_{33}\xi^2 + 4\varphi d^2 e_{32} e_{33} \xi\eta + \\ &+ d^2\varphi^2(de_{32} + 2\varphi a_{33})\xi + d^3(e_{32}^2 - \varphi^2)\eta + \\ &+ d^3\varphi^2 a_{32} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Scheitelerzeugenden bilden die konoidale Regelfläche 4. *Ordnung*

$$\begin{aligned} &8\varphi^3 e_{33}^2 x^3 z + 4\varphi^2 d e_{33}^2 x^2 y + 8\varphi^2 d e_{32} e_{33} x^2 z + \\ &+ 2d^2\varphi^3 e_{33} x^2 + 4\varphi d^2 e_{32} e_{33} xy + 2d^2\varphi(e_{32}^2 - \varphi^2)xz + \\ &+ d^2\varphi^2(de_{32} + 2\varphi a_{33})x + d^3(e_{32}^2 - \varphi^2)y + d^3\varphi^2 a_{32} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Beweis. Wird im Beweis des letzten Satzes R_0 durch R ersetzt, so erkennt man, daß eine einparametrige Schar von Punktkugeln entsteht — R ist der Scharparameter —. $B = B(R)$ aus (2.12). Benütze weiter (2.7): $B = -\frac{d}{2\varphi} \cdot \frac{1}{\xi}$ sowie (2.8) $R = \frac{d\varphi}{8\xi\eta}$. Setze dies in (2.12) ein, so entsteht (2.13). Bestimmung der Regelfläche ist analog wie in Satz 1. Setzt man $\xi = x, \eta = y + \frac{2\varphi xz}{d}$ in (2.13) ein, dies liefert die Gleichung (2.14). $\Diamond$

Nun kommen wir zur Lösung des allgemeinen Problems. Gegeben seien vier paarweise windschiefe nichtisotrope Geraden g_1, g_2, g_3, g_4. Wir legen g_1 und g_2 in der Normaldarstellung fest, wie sie schon im Satz 1 verwendet wurde und beschreiben g_3 und g_4 durch ihre normierten

Richtungsvektoren $\vec{e}_i(1, e_{i2}, e_{i3})$ und ihre Aufpunkte $A_i(0, a_{i2}, a_{i3})$ ($i = 3, 4$). Um alle Punktkugeln zu bestimmen, die $g_1, \ldots, g_4$ berühren, sind dann nach (2.3) und (2.6a,b) aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} AB\varphi &= Rd \\ A^2 + B^2\varphi^2 &= 4RC \\ (A + Be_{32} - e_{33})^2 &= 4R(Ba_{32} + C - a_{33}) \\ (A + Be_{42} - e_{43})^2 &= 4R(Ba_{42} + C - a_{43}) \end{aligned} \tag{2.15a–d}$$

die vier Unbekannten A, B, C und R zu bestimmen. Setzt man abkürzend $\frac{\varphi}{d} =: q$, so lassen sich die Gleichungen (2.15c, d) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} Ap_2(B) + q_2(B) &= 0 \\ A\tilde{p}_2(B) + \tilde{q}_2(B) &= 0, \end{aligned} \tag{2.16c,d}$$

mit

$$\begin{aligned} p_2(B) &:= 2Be_{32} - 2e_{33} - 4B^2qa_{32} + 4Bqa_{33}\,, \\ q_2(B) &:= e_{33}^2 + B^2e_{32}^2 - 2Be_{32}e_{33} - B^2\varphi^2\,, \\ \tilde{p}_2(B) &:= 2Be_{42} - 2e_{43} - 4B^2qa_{42} + 4Bqa_{43}\,, \\ \tilde{q}_2(B) &:= e_{43}^2 + B^2e_{42}^2 - 2Be_{42}e_{43} - B^2\varphi^2\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man (2.16c) mit $\tilde{p}_2(B)$ bzw. (2.16d) mit $p_2(B)$, dann werden die Gleichungen subtrahiert, so entsteht

$$\tilde{p}_2(B)q_2(B) - p_2(B)\tilde{q}_2(B) = 0\,. \tag{2.17}$$

Dies liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} 4q\left[a_{42}(\varphi^2 - e_{32}^2) + a_{32}(e_{42}^2 - \varphi^2)\right] B^4 + \\ + \ldots + 2e_{33}e_{43}(e_{43} - e_{33}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Wir definieren: $g_1, \ldots, g_4$ sind von *allgemeiner Lage*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$e_{33}e_{43}(e_{43} - e_{33}) \neq 0\,,$$

$$a_{42}(\varphi^2 - e_{32}^2) + a_{32}(e_{42}^2 - \varphi^2) \neq 0\,.$$

In allgemeiner Lage ist (2.18) eine Gleichung 4. Grades und hat über $\mathbb{C}$ vier Lösungen $B_1, \ldots, B_4$. Aus (2.16c) folgt $A_1, \ldots, A_4$ und aus (2.15a) $R_1, \ldots, R_4$. Schließlich folgt $C_1, \ldots, C_4$ aus (2.15b). Damit haben wir den

Satz 4. *Zu vier paarweise windschiefen nichtisotropen Geraden* $g_1, \ldots$ $\ldots, g_4$ *allgemeiner Lage existieren im algebraischen Sinn stets* 4 *Berührkugeln.*

Geometrische Deutung der Bedingungen der allgemeinen Lage:

Fall 1: $e_{33} = 0$ oder $e_{43} = 0$, dann sind g_1, g_2, g_3 bzw. g_1, g_2, g_4 parallel zur $[xy]$-Ebene.

Fall 2: $e_{33} = e_{43}$, d.h. $\vec{e}_3 = (1 : e_{32} : e_{33})$, $\vec{e}_4 = (1 : e_{42} : e_{43})$. Die Normalprojektionen der Geraden g_3 und g_4 auf die $[xz]$-Ebene sind parallel. Die $[xz]$-Ebene ist die isotrope Winkelsymmetrieebene der windschiefen Geraden g_1 und g_2.

Man kann also den folgenden Satz formulieren:

Satz 5. *Genau dann gilt* $e_{33} \neq 0$ *oder* $e_{43} \neq 0$ *bzw.* $e_{33} \neq e_{43}$, *wenn* g_1, g_2, g_3 *oder* g_1, g_2, g_4 *nicht zu einer Ebene parallel sind bzw. wenn die Normalprojektionen von* g_3 *und* g_4 *auf die isotrope Winkelsymmetrieebene von* g_1 *und* g_2 *nicht parallel sind.*

Fall 3: $T := a_{42}(\varphi^2 - e_{32}^2) + a_{32}(e_{42}^2 - \varphi^2) = 0$.

Wir betrachten einen isotropen Kreis $k \ldots y = rx^2 + Dx + E$ der $[xy]$-Ebene und wir stellen zuerst folgende Frage: wann berührt der Kreis k die Grundrisse von g_1 und g_2? Die Grundrisse von g_1 und g_2 lauten $\tilde{g}_1 \ldots y = -\varphi x$, $\tilde{g}_2 \ldots y = \varphi x$, woraus $D = 0$ folgt und die Berührbedingung ist für $\tilde{g}_1$ und $\tilde{g}_2$ $r = \frac{\varphi^2}{4E}$. Erklären wir nun wann berührt dieser Kreis k auch die Grundrisse von g_3 und g_4?

Legt man die Grundrisse von g_3 und g_4 in der Darstellung

$$\tilde{g}_3 \ldots \begin{cases} x = \lambda \\ y = a_{32} + \lambda e_{32} \end{cases}, \quad \tilde{g}_4 \ldots \begin{cases} x = \lambda \\ y = a_{42} + \lambda e_{42} \end{cases},$$

so gewinnt man nach kurzer Rechnung die Berührbedingungen für $\tilde{g}_3$ und $\tilde{g}_4$

$$\begin{aligned} e_{32}^2 - \varphi^2 + \frac{\varphi^2}{E} a_{32} &= 0 \\ e_{42}^2 - \varphi^2 + \frac{\varphi^2}{E} a_{42} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aus (2.19) folgt $\frac{e_{32}^2 - \varphi^2}{e_{42}^2 - \varphi^2} = \frac{a_{32}}{a_{42}}$ und dies ist äquivalent mit T. Damit haben wir den

Satz 6. *Genau dann gilt* $T \neq 0$, *wenn* $g_1, \ldots, g_4$ *nicht Tangenten an eine Punktgrenzkugel sind.*

Also: *die allgemeine Lage heißt daß die Bedingungen der beiden letzten Sätze erfüllt sind.*

Literatur

[1] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, *J. reine angew. Math.* **224** (1966), 118–146.

[2] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, *J. reine angew. Math.* **226** (1967), 132–158.

[3] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, *J. reine angew. Math.* **228** (1967), 38–70.

[4] HUSTY, M. und Sachs, H.: Abstandsprobleme zu windschiefen Geraden I, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* 1994 (im Erscheinen).

[5] MÉSZÁROS, F. und SACHS, H.: Zur Kugelgeometrie des einfach isotropen Raumes, *Publ. Math. Debrecen*, 1995 (im Erscheinen).

[6] SACHS, H.: Zweifach isotrope Geometrie, Lehrbuch, Vieweg-Verlag Braunschweig/Wiesbaden.

[7] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.