Mathematica Pannonica
11/2 (2000), 165–186

ÜBER DIE ANWENDUNG DER THEORIE DER GLEICHVER - TEILUNG AUF DIE LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Edmund **Hlawka**

Institut für Analysis, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A–1040, Wien

Herrn Professor Ludwig Reich zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: April 2000

MSC 2000: 11K36; 34A45

Keywords: Differential equation, uniform distribution, Bernstein polynomials.

Abstract: We consider systems of ordinary differential equations and their set of initial conditions. The author showed in his papers about the so-called "willkürliche Funktionen von Poincaré" that it is only necessary to use a set of initial conditions having a tensity to construct numerical approximations for the whole set of the initial conditions. To make the calculation of the approximate solution simpler, e.g. for linear equations we use Bernstein polynomials. We construct further approximate tensities in the theory of uniform distributions in the general form. In the appendix we make further comments on this subject for general manifolds.

1. Es sei ein System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_s) \\ &\vdots \\ y_s' &= f_s(x, y_1, \dots, y_s), \end{aligned} \tag{1}$$

kurz

$$y' = f(x, y) \tag{1'}$$

gegeben.

Wir legen einen Quader Q:

$$\begin{aligned} a &< x < b \\ c_1 &< y_1 < d_1 \\ &\vdots \\ c_n &< y_n < d_n, \end{aligned} \tag{2}$$

kurz

$$a < x < b, \qquad c < y < d$$

zugrunde. Es seien weiters in Q alle f stetig mit

$$\mathrm{Max}(|f_1(x, y)|, \dots, |f_s(x, y)|) \leq A. \tag{3}$$

Wir können annehmen, daß das x-Intervall gerade

$$E: \ 0 < x < 1 \tag{4}$$

ist. Weiters wollen wir annehmen, daß auch die $y_1, \dots, y_s$ im s-dimensionalen Einheitsintervall E^s

$$E^s: \ 0 \leq y_j < 1 \tag{5}$$

für $j = 1, \dots, s$ liegen. Weiters sei eine Lipschitzbedingung mit M als Lipschitzkonstante in Q erfüllt für $j = 1, \dots, s$

$$|f_j(x, \hat{y}) - f_j(x, y)| \leq M \sum_{j=1}^{s} |\hat{y}_j - y_j|. \tag{6}$$

Es sei $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_s)$ ein Punkt in $E \times Q^s = Q^{s+1}$, dann gibt es bekanntlich eine eindeutig bestimmte Lösung von (1')

$$y = \varphi(x, \xi) \tag{7}$$

und $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ mit

$$\eta = \varphi(\xi, \xi) \tag{8}$$

als Grenzwert der Folge $\varphi(_n(x, \xi)$ gegeben, wobei

$$\varphi_{n+1}(x, \xi) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(\tau, \varphi_n(\tau, \xi)) d\tau \tag{9}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\varphi_0(x, \xi) = \eta. \tag{10}$$

Die Folge ist gleichmäßig konvergent in einem Intervall

$$(11) \qquad |x-\xi| \le \operatorname{Min}\left(\alpha, \frac{\beta}{A}\right),$$

vorausgesetzt, daß das Intervall in E liegt und im Quader Q:

$$(12) \qquad |y_1-\eta_1| < \beta, \ldots, |y_s-\eta_s| < \beta$$

und es gilt die Abschätzung

$$(13) \qquad |\varphi_n(x,\xi) - \varphi(x,\xi)| \le \frac{A}{s+1} \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{(sM(x-\xi))^l}{l!}.$$

Wir wählen nun eine gleichverteilte Folge $\omega = (\xi_k, \eta_{1,k}, \ldots, \eta_{sk})$ zur Dichte ρ in E^{s+1}. Für jede integrierbare Funktion F ist

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(\xi_k, \eta_{1k}, \ldots, \eta_{sk}) = \\ &= \int_{E^{s+1}} F(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s) \rho(\xi, \eta) d\xi, d\eta_1, \ldots, d\eta_s. \end{aligned}$$

Es sei jetzt $\hat{Q} = E^{s+1}$. Dabei ist ρ ist eine integrierbare Funktion in E^{s+1} mit

$$\int_{E^{s+1}} \rho(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s) d\xi d\eta_1, \ldots, d\eta_s = 1.$$

Es gilt sogar mehr: Es gibt stets eine sogenannte Diskrepanz D_N^ρ, die nur von der Dichte ρ und der Folge ω abhängt. Wenn F z.B. von beschränkter Variation $V(F)$ ist, dann gilt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(\xi_k, \eta_{1k}, \ldots, \eta_{sk}) - \int_{E^{s+1}} F(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s) \rho(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s) d\xi d\eta_1, \ldots, d\eta_s \right| \le D_N^\rho V(F).$$

Über Differentialgleichungen gilt nun folgender Satz (vgl. [4]): Sind $(\xi, \eta), (\xi', \eta')$ zwei verschiedene Punkte in E^s, dann gilt für die zugehörigen Lösungen der Differentialgleichung $(1')$

$$(15) \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x; \xi, \eta), \qquad \varphi_2(x) = \varphi(x; \xi', \eta')$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(16) \qquad \varphi_1(\xi) = \eta \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2(\xi') = \eta',$$

$$(17) \qquad |\varphi_1(x;\xi,\eta) - \varphi_2(x;\xi',\eta')| \leq (|\eta' - \eta|s + A|\xi' - \xi|)e^{M|x-\xi|}.$$

Wir wollen nun diesen Satz von Kamke anwenden. Es liege also eine gleichverteilte Folge ω vor und wir suchen eine Lösung $\varphi(x,\xi,\eta)$ für das System von Differentialgleichungen (1′), mit der Anfangsbedingung $\varphi(\xi,\xi,\eta) = \eta$. (Wir benutzen dabei wieder die vektorielle Schreibweise).

Es seien $\varphi_n(x,\xi_n,\eta_n)$ die Lösungen von (1′) mit den Anfangsbedingungen

$$(18) \qquad \varphi_n(\xi_n,\xi_n,\eta_n) = \eta_n,$$

wobei für $n = 1,2,\ldots,N$ die (ξ_n,η_n) die ersten N Glieder der Folge ω sind. Dabei nehmen wir an, daß die Diskrepanz D_N^ρ der Folge ω, wenn ρ die Dichte der Folge ω ist, $D_N^\rho < 1$ ist, also N genügend groß ist. Wir nehmen nun ein $\varepsilon > 0$ und betrachten jene (ξ_n,η_n) aus der Abschnittsfolge

$$(19) \qquad \omega_N: \quad (\xi_1,\eta_1),\ldots,(\xi_n,\eta_n),$$

für die[1]

$$(20) \qquad |\xi - \xi_n| < \varepsilon, \qquad \|\eta - \eta_n\| < \varepsilon$$

ist. Da die Folge gleichverteilt ist, gilt für die Häufigkeit $\frac{A(N)}{N}$ dieser Folge (20)

$$(21) \qquad \frac{A(N)}{N} = \int_W \rho(\xi,\eta)d\xi d\eta + \vartheta D_n^\rho,$$

wobei $|\vartheta| \leq 1$ und W der Würfel

$$(22) \qquad |\xi - \xi'| < \varepsilon, \qquad \|\eta - \eta'\| < \varepsilon$$

ist, dessen Volumen $(2\varepsilon)^{s+1}$ ist. Wir wollen nun annehmen, daß N so groß ist, daß

$$(23) \qquad D_n^\rho < \int_W \rho(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

ist, dann ist $A(N) > 0$, also gibt es solche (ξ_n,η_n), welche in W liegen, also (20) erfüllen. Ist $m(\rho)$ das Supremum von ρ in $\hat{Q} = E^{s+1}$, so ist

$$(24) \qquad \frac{A(N)}{N} \leq m(\rho)(2\varepsilon)^{s+1} + D_n^\rho, \quad \frac{A(N)}{N} \geq \hat{m}_W(\rho)(2\varepsilon)^{s+1} - D_n^\rho,$$

wenn $\hat{m}(\rho)$ das Minimum von ρ im Würfel W ist. Wir nehmen an, daß $\hat{m} > 0$ in W ist.

---

[1] $\|\eta - \eta'\| = \mathrm{Max}\,(|\eta_1 - \eta_1'|,\ldots,|\eta_s - \eta_s'|)$, wo die η_j bzw. η_j' die Koordinaten von η bzw. η' sind.

Wir setzen nun

$$\Delta_n(x,\xi_n,\eta_n) = \varphi_n(x,\xi_n,\eta_n) - \varphi(x,\xi,\eta). \tag{25}$$

Wir wenden nun den oben zitierten Satz von Kamke an, dann ist

$$|\Delta_n(x,\xi_n,\eta_n)| < \left| |\eta-\eta_n| s + A|\xi-\xi_n| e^{M(x-\xi)} \right|. \tag{26}$$

Wir bilden das arithmetische Mittel der $|\Delta_n|$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\Delta_n| \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left(s|\eta-\eta_n| + A|\xi-\xi_n| e^{M(x-\xi)} \right). \tag{27}$$

Es ist nun nach der Theorie der Gleichverteilung der Ausdruck der rechten Seite von (27) gleich

$$\int\limits_W (s|\eta-\eta'| + A|\xi-\xi'|)\,\rho(\xi',\eta')d\xi' d\eta' + \vartheta D_N^\rho \tag{28}$$

mit $|\vartheta| \le 1$. Nun ist das Integral in (28)

$$\le \varepsilon \left(s + A e^{M(x-\xi)} \right) m(\rho)(2\varepsilon)^{s+1}. \tag{29}$$

Wir haben also die grundlegende Formel[2]

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Delta_n \right| \le s + A e^{M(x-\xi)} m(\rho)(2\varepsilon)^{s+1} + D_N^\rho, \tag{30}$$

wobei Δ_n in (25) definiert ist.

Wählen wir

$$\varepsilon = (D_N^\rho)^{\frac{1}{s+2}}, \tag{31}$$

so erhalten wir

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Delta_n \right| \le \left(\left(s + A e^{M(x-\xi)} \right) m(\rho) + 1 \right) D_N^\rho. \tag{32}$$

Wir haben, wie schon vorher, das arithmetische Mittel der Folge $(|\Delta_n|)$ benützt. Schreiben wir die Glieder Δ_n mehrmals, z.B. so

$$\Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_1, \dots, \Delta_N.$$

Bezeichnen wir sie mit $\Delta_1', \Delta_2', \dots$ und bilden das arithmetische Mittel

[2] Formel (30) ist eine Annäherung an einen Laplaceschen Geist (vgl. [2] und [3]).

$$\begin{aligned}\frac{N|\Delta_1| + (N-1)|\Delta_2| + \ldots + |\Delta_N|}{\binom{N+1}{2}} &= \\ (33) \qquad = \frac{2}{N+1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)&\frac{|\Delta_1| + \ldots + |\Delta_{N-k}|}{N-k}.\end{aligned}$$

Man kann dieses Verfahren der Mittelbildung wiederholen. Diese Mittelbildungen gehören zu den gewichteten Mitteln von der Gestalt

$$\frac{\gamma_N|\Delta_1| + \ldots + \gamma_1|\Delta_N|}{\gamma_N + \gamma_{N-1} + \ldots + \gamma_1},$$

wobei die γ alle positiv sind und der Nenner für $N \to \infty$ ebenfalls gegen unendlich strebt. Die zugehörigen Diskrepanzen hängen von den Gewichten ab und werden im obigen Beispiel nicht schlechter sein als das arithmetische Mittel. Man kann auch andere Mittel, z.B. das Borelsche oder das Eulersche Mittel, nehmen.

2. Wir wollen nun die Bernsteinpolynome ins Spiel bringen.[3] Es sei f eine stetige Funktion im Einheitswürfel E^T (wir werden später T passend wählen) und wollen f durch ein Polynom approximieren. Zu diesem Zweck benützen wir die Bernsteinpolynome (n und k natürliche Zahlen mit $0 \leq k \leq n$)

$$(1) \qquad p_{nk}(\xi) = \binom{n}{k}\xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

in der Variablen ξ im Intervall $0 \leq \xi \leq 1$.

Es ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(\xi) = 1.$$

Wir nehmen nun natürliche Zahlen $n, k_1, \ldots, k_T$, wobei für alle j mit $1 \leq j \leq T$

$$(3) \qquad 0 \leq k_j \leq n$$

ist und bilden das Produkt

$$(4) \qquad P(n,k) = p_{nk_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot p_{nk_T}(x_T).$$

Dabei sei k der Vektor $(k_1, \ldots, k_T)$. Es sei weiter

[3] Professor R. Schnabl, dem ich herzlich danke, hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß in der Literatur schon Abschätzungen für den hier entwickelten Hilfssatz über Bernsteinpolynome vorliegen. Der Vollständigkeit halber gebe ich einen Beweis.

(5)
$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_T}{n}\right).$$

Dann sei, wobei über alle k summiert wird,

(6)
$$g = \Phi(f) = \sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k),$$

welches ein Polynom in $x = (x_1, \dots, x_T)$ ist.

Wir wollen nun für ein x in E^T die Differenz

(7)
$$\Sigma = g(x) - f(x) = \Phi(f) - f$$

abschätzen.

Wir setzen

$$\Sigma = \sum_k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(n,k) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Dabei ist für ein $\delta > 0$

$$\Sigma_1 = \sum_{k \in W(\delta)} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) P(n,k),$$

wobei sich die Summe über alle Punkte $\frac{k}{n}$ erstreckt, welche in dem Würfel $W(\delta)$

$$\left\| x - \frac{k}{n} \right\| \leq \delta$$

liegen. Dabei bedeutet

$$\left\| x - \frac{k}{n} \right\| = \operatorname{Max}\left(\left|x_1 - \frac{k_1}{n}\right|, \dots, \left|x_T - \frac{k_T}{n}\right|\right).$$

Ist $\sigma(f, \delta)$ die Schwankung von f im Würfel $W(\delta)$, so ist

$$|\Sigma_1| \leq \sigma(f,\delta) \sum_{k \in W(\delta)} P(n,k).$$

Es ist nun die Summe rechts $\leq \sum_k P(n,k)$ über alle k, also nach (2) gleich Eins. Es ist also

$$|\Sigma_1| \leq \sigma(f,\delta).$$

Betrachten wir nun Σ_2, so ist dies die Summe aller

$$\frac{1}{n} k = \frac{1}{n}(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots),$$

welche nicht in $W(\delta)$ liegen. Es gibt dann mindestens ein j mit $1 \leq$ $\leq j \leq T$ und ein $\hat{k}_j$, so daß

$$(8)\qquad \left|\frac{\hat{k}_j}{n} - x_j\right| > \delta$$

ist. Wir halten jetzt j fest und betrachten alle $\hat{k} = (\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_j, \dots, \hat{k}_T)$, für welche die j-te Komponente die Ungleichung (8) erfüllende $\hat{k}_j$ ist. Wir betrachten die Summe

$$\Sigma^* = \sum \left(\frac{\hat{k}_j}{n} - x_j\right)^2,$$

wo sich die Summe über alle $\hat{k}$ erstreckt und es ist

$$(*)\qquad \Sigma^* \geq \delta^2 \sum_{\hat{k}} P(n, \hat{k}).$$

Nun ist nach Bernstein

$$(**)\qquad \sum \left(\frac{k_j}{n} - x_j\right)^2 P(n, k_j) = \frac{1}{n} x_j(1 - x_j) \leq \frac{1}{n},$$

wo sich die Summe links über alle k_j erstreckt. Stellen wir $(*)$ und $(**)$ zusammen, so ist klarerweise

$$\Sigma^* \leq \sum \left(\frac{k_j}{n} - x_j\right)^2 P(n, k_j) \leq \frac{1}{n}.$$

Wir erhalten dann, wenn wir $(*)$ durch δ^2 dividieren

$$(9)\qquad \sum P(n, \hat{k}_j) \leq \frac{1}{n\delta^2}.$$

Jetzt können wir Σ_2 abschätzen. Es sei $M(f, E^T)$ das Supremum von f in E^T, dann ist

$$\Sigma_2 \leq 2M(f, E^T) \sum_{j=1}^{T} P(n, \hat{k}(j)),$$

wobei in $\hat{k}(j)$ die j-te Komponente ein $\hat{k}_j$ ist. Dabei können die anderen Komponenten ganz beliebig sein, d.h. sie können in W_δ oder nicht in W_δ liegen. Diese Komponenten, welche nichtnegativ sind, schätzen wir nach oben durch Eins ab. Die j-te Komponente schätzen wir durch (8) ab. Nun ist

$$P_n(n, \hat{k}) = p_{1\hat{k}_1} \cdot \dots \cdot p_{n\hat{k}_T}.$$

Wir nehmen für $\delta = n^{-\frac{1}{3}}$, also wird

$$\Sigma_2 \le 2M(f)Tn^{-\frac{1}{3}}.$$

Es ist also

$$|\Phi(f) - f| \le \sigma\left(f, n^{-\frac{1}{3}}\right) + 2M(f)n^{-\frac{1}{3}}. \tag{10}$$

Es liege nun wieder das System von s Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ vor, welches in **1** behandelt wurde. Es sei nun ein $\delta > 0$ gegeben. Das System enthält s Gleichungen

$$f = (f_1, \dots, f_s).$$

Wir nehmen nun $T = s + 1$ und setzen

$$x_1 = x,\ x_2 = y_1, \dots, x_{s+1} = y_s.$$

Liegt ein dynamisches System

$$y' = f(y)$$

vor, so können wir $T = s$ nehmen und

$$x_1 = y_1, \dots, x_s = y_s$$

setzen. Es ist also, wenn wir den Fall $T = s+1$ nehmen (der dynamische Fall wird analog behandelt) für $j = 1, \dots, s$

$$f_j(x_1, \dots, x_{s+1}) = f_j(x, y_1, \dots, y_s). \tag{11}$$

Wir nehmen nun die zugehörigen Bernsteinpolynome $\Phi(f_1), \dots, \Phi(f_s)$. Wir wählen dabei n so groß, daß für alle j

$$|\Phi(f_j) - f_j| \le \sigma\left(f_j, n^{-\frac{1}{3}}\right) + 2M(f_j)n^{-\frac{1}{3}} < S \tag{12}$$

wird. Wir betrachten dann das System

$$z_j' = \Phi(f_j(x, z_1, \dots, z_s)) \tag{13}$$

mit den Anfangsbedingungen $z_j(\xi) = \eta_j$ für $j = 1, \dots, s$. Nach einem weiteren Satz (vgl. [5], S. (53)) gilt dann

$$\sum_{j=1}^{s} |y_j(x) - z_j(x)| \le \frac{s}{M}\left(e^{sM|x-\xi|} - 1\right)$$

(M in der gleichen Bedeutung wie in **1**). Im System (13) sind dann nur mehr Polynome zu integrieren. Es ist

$$p_{nk}(u) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^l$$

mit $k + l = u$. Wir erhalten unmittelbar

$$\int_0^x p_{nk}(u)du = \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \binom{l}{r} \frac{x^{n-r+1}}{n-r+1}.$$

Anmerkung. Sollte f noch von Parametern $\mu_1, \dots, \mu_r$ in stetiger

Weise abhängen, so wird man $T = s + r + 1$ nehmen.

3. Wir betrachten jetzt die lineare Differentialgleichung

$$y' = A(x)y, \tag{1}$$

wobei $A(x) = (a_{ik}(x))$ eine s-zeilige Matrix von differenzierbaren Funktionen ist. Die zugehörige approximative Differentialgleichung lautet

$$z'(x) = \sum_{k=1}^{n} A\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)(x). \tag{2}$$

Wir bezeichnen

$$\int P(n,k)(x)dx = Q(n,k)(x),$$

dann ist also

$$Q'(n,k)(x) = P(n,k). \tag{3}$$

Die Differentialgleichung schreibt sich in der Gestalt

$$z'(x) = \sum A\left(\frac{k}{n}\right) Q'(n,k)(x)z(x). \tag{3'}$$

Wir wollen nun eine Lösung Φ finden mit

$$\Phi'(\xi,\xi) = \eta. \tag{4}$$

Wenden wir die Formeln **1** (9) an, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\Phi_0(x,\xi) = \eta, \quad \Phi_{n+1}(x,\xi) = \eta + \int_{\xi}^{x} \bar{A}(\tau)\Phi_n(\tau,\xi)d\xi, \tag{5}$$

wobei

$$\bar{A}(\tau) = \sum_{k=0}^{n} A\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)(\tau). \tag{6}$$

Es ist

$$\Phi(x,\xi) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x,\xi) \tag{7}$$

die Lösung. Die Φ_n können der Reihe nach leicht berechnet werden, da die $P(n,k)$ Polynome in τ sind. Es ist üblich und zweckmäßig, statt der Funktionen Φ die Matrizen Ψ, definiert durch die analogen Rekursionsformeln

$$\Psi_0(x,\xi) = E, \quad \Psi_{n+1}(x,\xi) = E + \int_\xi^x \bar{A}(\tau)\Psi_n(\tau,\xi)d\xi \tag{8}$$

einzuführen. Die Folge Ψ_n ist konvergent, ihren Limes $\Psi(x,\xi)$ nennt man die Übergangsmatrix und die Lösung $\Phi(x,\xi)$ schreibt sich dann

$$\Phi(x,\xi) = \Psi(x,\xi)y.$$

Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y(x) = \bar{A}(x)y + y_0(x), \tag{9}$$

wo

$$g_0(x) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)(x) \tag{10}$$

und $g(x)$ eine stetige Funktion für $0 < x < 1$ ist. Ihre Lösung lautet

$$X(x,\xi) = \Psi(x,\xi)\eta + \int_\xi 1x\Psi(x,\tau)g_0(\tau)d\tau \tag{11}$$

(vgl. dazu [4]). Wir können alle diese Integrale berechnen, da es sich nur um die Integration von Polynomen handelt.

In der Theorie der Regelung und Steuerung pflegt man bekanntlich im linearen Gleichungssystem

$$y' = Ay$$

zu A noch weitere Matrizen hinzuzufügen (man vergleiche [4] Kapitel III, §11, S. 174-183, ein Beispiel aus der Regelungstheorie). Wir wollen dies auch hier tun und zwar ordnen wir dem System

$$z' = \sum_k A\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)(x)z$$

das System

$$\begin{aligned} z' &= \sum_k A\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)(x) + Fu \\ v &= Cz \end{aligned} \tag{12}$$

zu, wobei F eine $s-m$-spaltige Matrix und u eine $m-s$-spaltige Matrix ist. Wir wollen gleich F in der Form

$$F = \sum_k F\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)$$

und

$$u = \sum_k u\left(\frac{k}{n}\right) P(n,k)$$

annehmen. Wir wollen auch statt x für die Variable nun t schreiben. Es ist weiter C eine k-l–zeilige Matrix und v eine l-s Matrix. Die Anfangsbedingung für die Lösung Ψ sei wieder (wir schreiben jetzt t_0 statt ξ):

$$\Psi(t_0) = \eta,$$

die man als Eingangsfunktion und u als Steuerungsfunktion bezeichnet.

Wir haben nun für z eine inhomogene Differentialgleichung mit $g = Fu$ zu lösen. Dies können wir sofort nach Formel (*)

$$\hat{X}(t,t_0) = \Psi(t,\xi)\eta + \int_{t_0}^{t} \Psi(t,\tau)F(\tau)u(\tau)d\tau \tag{13}$$

hinschreiben.

Gibt man $t = t_1$ vor, so sucht man eine Funktion u, so daß die obige Gleichung erfüllt ist. Man sagt dann, man habe das System gegeben durch A, F, u von t_0 nach t_1 gesteuert.

Wir wollen noch folgendes bemerken: Es kann A auch komplex sein

$$A = A_1 + iA_2,$$

dann muß man auch die Lösung y bzw. z komplex annehmen

$$y = y_1 + iy_2.$$

Es wird dieses System dann komplizierter. Haben wir nun das homogene System $y' = Ag$ im Auge, so wird es bekanntlich ersetzt durch Trennung in Real- und Imaginärteil

$$y_1' = A_1y_1 - A_2y_2, \quad y_2' = A_2y_1 - A_1y_2.$$

Das gleiche gilt dann für das approximative System

$$z = z_1 + iz_2.$$

4. Wir können noch eine weitere Anwendung von **2** geben. Es sei ρ eine Dichte auf E^s, also eine nichtnegative stetige Funktion auf E^s mit

$$\int_{E^s} \rho(x)dx = 1. \tag{1}$$

Es sei n eine natürliche Zahl, $k = (k_1, \dots, k_s)$ Gitterpunkte (also Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) mit $0 \le k_j \le n$ für $j = 1, \dots, n$, dann ist

$$\Phi(\rho) = \sum_k \rho\left(\frac{k}{n}\right) P_n(k,x), \tag{2}$$

wobei sich die Summation auf alle Gitterpunkte erstreckt. Es wurde in **2** gezeigt, daß

$$|\rho(x) - \Phi(\rho(x))| \leq \varepsilon(n)$$

ist, wo

$$\varepsilon(n) = \sigma\left(\rho, n^{-\frac{1}{3}}\right) + 2M(\rho)n^{-\frac{1}{3}}, \tag{3}$$

wobei σ die Schwankung von ρ mit der Feinheit $n^{-\frac{1}{3}}$ ist und $M(\rho)$ das Supremum von ρ auf E^s.

Wir setzen

$$\eta(x) = \rho(x) - \Phi(\rho(x)). \tag{4}$$

Dann ist

$$\rho(x) = \Phi(\rho(x)) + \eta(x), \tag{5}$$

wobei

$$|\eta(x)| \leq \varepsilon(n) \tag{6}$$

ist.

Wir wollen $\Phi(x)$ noch normieren. Es ist $p_{nk}(x)$ das Bernsteinsche Polynom

$$p_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-k)^{n-k}$$

und

$$\int_0^1 p_{nk}(x)dx = \frac{1}{n+1}. \tag{7}$$

Wir definieren als Dichten $\rho(n,k)$

$$\rho(n,k)(x) = (n+1)P_{nk}(x). \tag{8}$$

Dann schreibt sich, da $P_{nk}(x) = p_{nk_1}(x_1)\dots p_{nk_s}(x_s)$ ist,

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{(n+1)^s} \sum_k \rho(n,k_1)\rho(n,k_2)\dots\rho(n,k_s).$$

Wir definieren noch

$$\rho(n,k)(x) = \rho(n,k_1)\dots\rho(n,k_s). \tag{9}$$

Wir haben dann

$$\Phi(\rho) = \sum_k c(n,k)\rho(n,k), \tag{10}$$

wo

$$c(n,k) = \frac{1}{(n+1)^s} \tag{11}$$

ist. Die $c(n,k)$ sind von k unabhängig. Wir haben die Darstellung

$$\rho = \sum_k c(n,k)\rho(n,k) + \eta. \tag{12}$$

Wir bemerken nun, daß die Dichten $\rho(n,k)$ Produkte der eindimensionalen Dichten $\rho(n,k_j)$ für $j = 1, \dots, s$ sind.

Es ist nun nach (1), wenn wir in (5) über alle x im E^s integrieren, und nach (12)

$$1 = \sum_k c(n,k) + J_0, \tag{13}$$

wobei

$$J_0 = \int_{E^s} \eta(x)dx.$$

Es gibt nun zwei Fälle: Ist $J_0 = 0$, dann erhalten wir, wenn wir (11) benützen, die einfache Darstellung

$$\rho(x) = \frac{1}{(n+1)^s} \sum_k \rho(n,k)(x). \tag{14}$$

Wenn $J_0 \neq 0$, dann normieren wir die Funktion $\eta(x)$. Wir setzen

$$\eta(x) = |J_0|\tau(x)$$

und $|J_0| = a_0$. Dann erhalten wir die Darstellung

$$\rho(x) = \frac{1}{(n+1)^s} \sum_k \rho(n,k) + a_0\tau(x), \tag{15}$$

wobei nach (6) und (3)

$$|a_0, \tau(x)| \leq \varepsilon_n$$

ist, aber ε_n für großes n beliebig klein gemacht werden kann.

Wir konstruieren nun Folgen $Z(n,k) = (z(n,k;l))$ auf E^s, die auf E^s die Dichte $\rho(n,k)$ haben und deren Diskrepanz wir mit $D_N^{(nk)}$ bezeichnen. Nehmen wir an, wir hätten schon alle Folgen $Z(n,k)$ konstruiert, dann gilt für jede Funktion h auf E^s

$$\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} h(z(n,k;l)) = \int_{E^s} h(x)\rho(n,k;x)dx + \vartheta D_N^{(n,k)}.$$

Wir erhalten dann aus (13), (14)

$$\frac{1}{(n+1)^s N}\sum_{l=1}^{N} h(z(n,k;l)) = \frac{1}{(n+1)^s}\sum_k \int\limits_{E^s} h(x)\rho(x,k)dx + R,$$

wobei R der Fehler ist, ebenso R_1 und R_2. Wir haben dann

$$\frac{1}{(n+1)^s N}\sum_{l=1}^{N} h(z(n,k;l)) = \frac{1}{(n+1)^s}\sum_k \int\limits_{E^s} h(x)\rho(n,k;x)dx + R_1,$$

also ist

$$\frac{1}{(n+1)^s N}\sum_{l=1}^{N} h(z(n,k;l)) = \int\limits_{E^s} h(x)\rho(x)dx + R_2,$$

wobei

$$R_2 = \frac{1}{(n+1)^s}\sum_k D_N^{(n,k)} + \varepsilon_n$$

ist.

Wie man die Folge $((z(n,k;l))$ konstruiert, haben wir schon früher behandelt.

Schreiben wir kurz $(z(l)) = (z_1(l),\dots,z_s(l))$.

Wir nehmen eine gleichverteilte s-dimensionale Folge $(y(l)) = = (y_1(l),\dots,y_s(l))$ mit der Diskrepanz D_N. Da $\rho(n,k)$ eine Produktdichte von der Form

$$\rho_1\cdot\rho_2\cdot\ldots\cdot\rho_s$$

ist, bilden wir für $j=1,\dots,s$

$$z_j(l) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[1 + y_j(l) + \int\limits_0^{y_k}\rho_j(x)dx\right].$$

Die so konstruierte Folge ist gleichverteilt zur Dichte ρ und für die Diskrepanz gilt

$$D_N^{\rho} \le (s+1)D_N^{\frac{1}{s+1}}.$$

Damit ist die Konstruktion vollendet. Wenn man will, kann man zu jeder Folge $(z(n,k))$ eine andere gleichverteilte Folge im Weylschen Sinne, also von der Dichte 1, nehmen.

Wir können die Konstruktion der Dichte ρ verallgemeinern.

Es sei (a_k) eine unendliche Folge von nicht negativen Zahlen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Wir setzen für jedes r

$$1 - (a_1 + \ldots + a_r) = \varepsilon_r.$$

Weiters sei eine unendliche Folge von Produktdichten ρ im E^s gegeben, welche sich als Produkte von Dichten in E^1 darstellen lassen. Wir wollen noch annehmen, daß diese Dichten alle unter einer Schranke M liegen.

Es sei nun eine Dichte ρ in E^s gegeben. Wir sagen, ρ sei durch die Folge (ρ^j) bis auf einen beliebig kleinen Fehler dargestellt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein s gibt, so daß

$$|\rho - (a_1\rho_1 + \ldots + a_s\rho_s)| < M\varepsilon$$

gilt. Es ist dann für jede quadrierbare Funktion F

$$\left|\int F\rho - \left(a_1 \int F\rho_1 + \ldots + a_s \int F\rho_s\right)\right| \leq M\varepsilon \operatorname{Max}|F|.$$

Wir sehen leicht, daß eine endliche Summe von darstellbaren Dichten wieder eine solche ist. Wir müssen sie unter Umständen noch nachnormieren, indem wir das arithmetische Mittel dieser Dichten $\rho_1, \ldots, \rho_s$ mit eventuellen Gewichten versehen, also

$$\frac{b_1\rho_1 + \ldots + b_s\rho_s}{b_1 + \ldots + b_s}$$

bilden.

Anhang. Wir fügen als Anhang einen Paragraphen hinzu, der noch nicht im Detail ausgearbeitet ist.

Wir haben bis jetzt Dichten im E^s studiert. Es ist aber zweckmäßig, in einem höherdimensionalen Raum, sagen wir im R^m mit $s \leq$ $\leq m$, solche s-dimensionalen Dichten zu betrachten. Nehmen wir z.B. im R^m einen s-dimensionalen Unterraum U^s, aufgespannt von s Vektoren $e_1, \ldots, e_s$. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß sie ein normier-tes orthogonales System bilden. Dann läßt sich jeder Punkt x dieses Unterraums in der Form

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_s e_s$$

schreiben. Wir betrachten die Punkte des U^s mit

$$0 \leq \hat{\xi}_1 < 1, \ldots, 0 \leq \hat{\xi}_s < 1.$$

Wir nennen die Menge dieser Punkte $\hat{E}^s$.

Es sei nun $((\xi_1^k, \dots, \xi_s^k))$ eine gleichverteilte Folge im E^s mit der Dichte ρ, dann nennen wir die Folge (x^k) von U^s mit

$$x^k = \xi_1^k e_1 + \dots + \xi_s^k e_s$$

gleichverteilt im Würfel $\hat{E}^s$ mit der Dichte

$$\hat{\rho}(\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_s) = \rho(\xi_1, \dots, \xi_s).$$

Es ist dann, wenn F eine Funktion auf U^s ist,

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(x^k) = \int_{\hat{E}^s} F(\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_s) \hat{\rho}(\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_s) d\hat{\xi}_1 \dots d\hat{\xi}_s.$$

Wir können dies auch auf den Fall ausdehnen, daß wir statt U^s einen zu ihm parallelen Raum

$$U^s(a) : \; a + x$$

nehmen, wo x alle Punkte von U^s durchläuft und a ein fester Punkt im R^m ist. Nehmen wir nun an, daß wir als solchen Unterraum das Bündel der Tangentialebenen einer s-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^s mit der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(u_1, \dots, u_s) \\ &\vdots \\ x_m &= f_m(u_1, \dots, u_s), \end{aligned}$$

kurz

$$x = f(u_1, \dots, u_s) = f(u)$$

haben. Wir wollen annehmen, daß die f_j zweimal stetig differenzierbar sind. Die Tangentialräume können wir dann in der Gestalt schreiben

$$x\left(u_1^0, \dots, u_s^0\right) + \sum_{r=1}^{s} \eta_r T_r \left(u_1^0, \dots, u_s^0\right).$$

Wir werden die Tangentenvektoren orthogonalisieren und normieren, so daß wir ein s-Bein

$$E_s(u^0) = (e_1(u_1^0), \dots, e_s(u_s^0))$$

erhalten. Wir schreiben die Tangentialebene in der Form

$$x(u^0) + \sum_{r=1}^{s} \xi_r e_r(u^0).$$

Wir können nun auch in diesen Tangentialebenen gleichverteilte Folgen mit der Dichte ρ definieren, wobei jetzt die Folge an dem Punkt $x(u^0)$ von e_r, der Mannigfaltigkeit und den $E_s(u^0)$ abhängt.

Im allgemeinen werden wir nur Stücke der betreffenden Mannigfaltigkeiten bzw. Umgebungen von Punkten der Mannigfaltigkeiten betrachten. Ein Beispiel sind die Seitenflächen eines Würfels, allgemein die Oberfläche eines Körpers im dreidimensionalen Raum. Man vergleiche z.B. die Arbeit des Verfassers [1].

Wir wollen noch einen weiteren Gesichtspunkt heranziehen. Es ist nützlich, statt des s-dimensionalen Einheitswürfels E^s auch die Gleichverteilung in krummen Räumen zu betrachten.

Betrachten wir weiters eine s-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nehmen wir einen Punkt dieser Mannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_s^0)$. Es gibt dann eine Umgebung V dieses Punktes von der Gestalt

$$\operatorname{Max}\left|u_k^j - u_k^0\right| < \varepsilon.$$

Wir nehmen nun die eindeutig umkehrbare, stetig differenzierbare Parametertransformation

$$\xi_1 = w_1\left(u_1^1, \ldots, u_s^1\right)$$
$$\vdots$$
$$\xi_s = w_s\left(u_1^s, \ldots, u_s^s\right),$$

sodaß das Quadrat der Bogenlänge die Gestalt

$$\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_s)(d\xi_1^2 + \ldots + d\xi_s^2)$$

annimmt. D.h., daß die Mannigfaltigkeit in der ε-Umgebung auf den euklidischen Raum $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ konform abgebildet wird. Man nennt nun bekanntlich $\xi_1, \ldots, \xi_s$ isotherme Parameter von M^ε.

Eine solche Darstellung in isothermen Variablen gilt allgemein nur für Flächen im R^2. Darstellungen für Mannigfaltigkeit in höheren Dimensionen muß es nicht immer geben. Für $s \geq 3$ muß der Weylsche Tensor verschwinden.[4] Diese Bedingung ist auch hinreichend für $s = 3$ und $s = 4$. Dies ist auch von Bedeutung für die Kosmologie. Nach einer Hypothese von Penrose soll der Weylsche Tensor für das Weltall gegen Null streben.

Es sei $(\xi_1^k, \ldots, \xi_s^k)$ eine gleichverteilte Folge in E^s, $(u_1^k, \ldots, u_s^k)$ Bilder von $(\xi_1^k, \ldots, \xi_s^k)$. Es sei F eine quadrierbare Menge in der Umgebung V der Mannigfaltigkeiten M, dann existiert der

[4] Siehe [7].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}F\left(x_1^j,\dots,x_m^j\right)=$$
$$=\int\limits_V\!\dots\!\int F\left(f_1\left(u_1^s,\dots,u_s^s\right),\dots,f_m\left(u_1^s,\dots,u_s^s\right)\right)\rho dV.$$

Wir betrachten als Spezialfall $s=2$, also die komplexe Ebene M und in ihr einen einfach zusammenhängenden Bereich. Wir wollen in ihr Gleichverteilung betreiben. Dazu benützen wir zunächst die Abbildung der Quadrate E^2 auf dem Einheitskreis. Es sei (ξ_k,η_k) eine Folge im Quadrat $0\le\xi<1$, $0\le\eta<1$ mit der Dichte ρ, dann bilden wir uns die Folge (x_k,y_k), wobei

$$x_k=2\left(\xi_k+\eta_k-1\right),\qquad y_k=2\left(\xi_k-\eta_k\right).$$

Dann liegen die Punkte im Quadrat

$$Q^*:\quad |x|+|y|<1.$$

Es gilt dann für jede Funktion f in Q^*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\quad f\left(2(\xi_k+\eta_k-1),(\xi_k-\eta_k)\right)=$$
$$=\iint\limits_{Q^*}\quad f(x,y)\rho(x,y)dxdy+\sigma\left(f,D_N^s\right).$$

Wir bilden Q^* auf Q^{**} ab durch die Abbildung

$$x'=Kx,\qquad y'=Ky,$$

wobei

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

und erhalten mit $x_k'=Kx_k$, $y_k'=Ky_k$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\quad f\left(x_k',y_k'\right)=$$
$$=\iint\limits_{Q^{**}}\quad f\left(2K(\xi+\eta-1),(\xi-\eta)\right)\rho(\xi,\eta)d\xi d\eta+\text{Fehler}.$$

Wir betrachten nun die elliptischen Funktionen sinam u,[5] wobei $u=$

[5] bei Gauß sinlem.

$= x + iy$ in Q^{**} variiert.

Es gilt bekanntlich

$$x + iy = \int_0^w \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}.$$

Es variiert w im Einheitskreis

$$|w|^2 = u^2 + v^2 \leq 1.$$

Es wird also für jede integrierbare Funktion F

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(x'_k, y'_k) = \int \ldots \int_{|w| \leq 1} F(\operatorname{sinam} w) \rho^*(w) dw d\bar{w} + \text{Fehler}$$

mit

$$\rho^*(u) = \frac{\rho(w)}{\left|\sqrt{1 - w^4}\right|^2}.$$

Es sei nun G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand aus mehr als einem Punkt besteht, dann gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine Abbildung $\hat{w} = f(w)$, die das Innere von G bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises $|w| = 1$ abbildet. Die inverse Funktion von f wollen wir mit $g(\hat{w})$ bezeichnen. "Liegt G im Endlichen und besteht der Rand von G aus analytischen Kurven, so wird auch die Abbildung am Rande bijektiv und stetig und von etwaigen Ecken abgesehen konform sein" (Zitat aus [6], S. 717). Bildet man mit Hilfe der Abbildung $\hat{w} = f(w)$ eine gleichverteilte Folge in $|w| < 1$ mit der Dichte $\rho^*(w)$ ab, so erhält man eine gleichverteilte Folge in G mit der Dichte

$$\bar{\rho}(\hat{w}) = \rho^*(g(\hat{w})|g'(w)|).$$

Mit Hilfe der Uniformisierung kann man auch Gleichverteilung auf Riemannschen Flächen betreiben.

Nun hängt die Dichte $\bar{\rho}(\hat{w})$ und die zugehörige gleichverteilte Folge von dem verwendeten Parameter ab, wir wollen ihn kurz p nennen. Wir legen jetzt alle Parameterdarstellungen zugrunde, die aus einer bijektiven differenzierbaren Transformation T aus der Parameterdarstellung p hervorgehen. Wir nehmen eine Transformation der Form $\bar{p} = g(p)$ bzw. $p = f(\bar{p})$ schreiben können, wobei g die inverse Funktion von f ist. Dies wird im allgemeinen nur in einer Umgebung eines Punktes der Mannigfaltigkeit der Fall sein. Die Funktionaldeterminante $\left|\operatorname{Det} \frac{\partial f}{\partial \bar{p}}\right|$

bezeichnen wir kurz mit $D(\bar{p})$. Ist die Dichte $\bar{\rho}(p)$ bereits gegeben, so definieren wir als Dichte

$$\hat{\rho}(\bar{p}) = \rho(f(\bar{p}))\, D(\bar{p})$$

und die zugehörige gleichverteilte Folge $\hat{\xi}_j(\bar{p})$ durch die Festsetzung

$$\left(\hat{\xi}(\bar{p})\right) = (\xi_j(f(\bar{p})).$$

Wir werfen nun alle so definierten Dichten in eine Klasse $[\bar{\rho}]$ und die zugehörigen gleichverteilten Folgen in die Klasse $[(\xi_j)]$ und nennen die Klasse $[\rho]$ die skalare Dichte (vgl. dazu [7]) und die Folge $[(\xi_j)]$ skalare gleichverteilte Folge zur skalaren Dichte $[\rho]$. Wenn man diesen Standpunkt einnimmt, so kann man von der Einbettung der (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit in einem R^m absehen und braucht nur den Atlas der Parameterdarstellungen dieser Mannigfaltigkeit betrachten. Besonders gilt dies für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, wo eine invariante quadratische Form

$$\sum_{i,j=1}^{s} g_{ij}(p_1, \dots, p_s) dp_1 \dots dp_s$$

definiert ist. Die zugehörige Funktionaldeterminante ist $\sqrt{g}$, wo g die Diskriminante der quadratischen Form ist, wenn sie positiv definit ist. Man kann den ganzen Apparat der Riemannschen Geometrie, z.B. die Tensoren verwenden und Tensordichten und dazugehörige gleichverteilte Folgen konstruieren (siehe z.B. [7]). Diese ganze Betrachtung führt uns dazu, den Fall der Ebenen E wieder aufzunehmen, den wir vorher besprochen haben.

In diesem Fall sind die Transformationen T die Bewegungen, allgemeiner die affinen Abbildungen, welche die Ebenen in sich überführen. Man könnte sogar projektive Abbildungen oder noch allgemeinere Abbildungen von E betrachten.

Literatur

[1] HLAWKA, E.: Gleichverteilung und Simulation, *Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl.* **206** (1997), 183–216.

[2] Die Idee der "willkürlichen" Funktionen von Poincaré im Laufe eines Jahrhunderts, Festband zum 75. Geburtstag von Prof. K.-R. Biermann, *Acta Historica Leopoldina* **27** (1997), 189–200.

[3] HLAWKA, E.: Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré, *Math. Slovaca* **48**/5 (1998), 457–506.

[4] KNOBLOCH, H. W., KAPPEL, F.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, BG Teubner, Stuttgart, 1974.

[5] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.

[6] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie I, 5. Auflage, Verlag Teubner, Leipzig u. Berlin, 1928.

[7] WEITZENBÖCK, R.: Invariantentheorie, Noordhoff, Groningen, 1923.