

ZWANGLÄUFIG BEWEGLICHE POLYEDERMODELLE III

Otto Röschel

*Institut für Geometrie, Technische Universität Graz, Kopernikus-
gasse 24, A-8010 Graz, Austria*

Meinem verehrten Lehrer, Herrn O. Univ. Prof. Dr. Hans Vogler,
zum 65. Geburtstag gewidmet

Received: April 2000

MSC 2000: 53 A 17

Keywords: Kinematics, overconstrained mechanisms, Heureka-mechanism,
generalised Heureka-mechanisms.

Abstract: The paper gives a construction of a new series of overconstrained spatial mechanisms with systems connected via spherical 2R- or 1R-joints. The mechanisms are designed by means of plane equiform motions. The generalisation of the procedure published in [6] gives rise to some interesting new mechanisms, still being overconstrained. We design overconstrained mechanisms with a twodimensional array of systems. Closure conditions are formulated and used in order to generate onesided or twosided closed rectangular arrangements. We investigate the general degree of freedom of these mechanisms depending of their topological structure. Some special examples being studied in detail.

0. Einleitung

In den Arbeiten [5] und [6] ist es dem Autor gelungen, Verallgemeinerungen des sogenannten "Heureka-Mechanismus" (vgl. H. Stachel [9] bzw. K. Wohlhart [14]-[16], [18]) anzugeben. Die Überlegungen

aus [6] sollen hier eine weitere Verallgemeinerung finden. In Abschnitt 1 konstruieren wir ein eindimensionales Feld gekoppelter äquiformer ebener Zwangläufe, die sogar kongruent parametrisiert sind. In Abschnitt 2 erweitern wir diese Untersuchungen auf zweidimensionale Felder äquiformer Zwangläufe. In Abschnitt 3 werden die zugehörigen übergeschlossenen Mechanismen (verallgemeinerte Heureka-Mechanismen) vorgestellt. Nach dem Studium der Relativzwangläufe werden in Abschnitt 4 einseitig bzw. zweiseitig geschlossene Mechanismen dieser Art angegeben. Für den theoretischen Freiheitsgrad werden die entsprechenden Werte aufgelistet. In Abschnitt 5 werden einige Beispiele solcher Mechanismen vorgestellt.

1. m gekoppelte lineare äquiforme ebene Zwangläufe

Wir definieren in der euklidischen Ebene τ_1^* einen ebenen äquiformen Zwanglauf $\zeta_1^* := \zeta_1^*(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$) mit globalem Fixpunkt A_1^* , bei dem ein Punkt P_1 der Gangebene ε_1 auf einer A_1^* nicht enthaltenden Geraden s_{12}^* geführt wird. ζ_1^* führt dann alle Punkte von ε_1 auf Geraden von τ_1^* (vgl. I.M. Yaglom [20]). Bei Verwendung kartesischer Normalkoordinaten $\{A_1^*, x^*, y^*\}$ in τ_1^* und $\{A, x, y\}$ in ε_1 zur Beschreibung der Punkte können wir $\zeta_1^*(t)$ etwa durch

$$\begin{aligned} \zeta_1^* : \quad & (x, y) \longrightarrow (x^*, y^*) \\ (1) \quad & x^*(t, x, y) := (x \cos t - y \sin t) / \cos t \text{ mit } t \in (-\pi/2, +\pi/2) \\ & y^*(t, x, y) := (x \sin t + y \cos t) / \cos t \end{aligned}$$

beschreiben. Dieser äquiforme Zwanglauf wird durch Überlagerung einer Drehung um A_1^* (Winkel t) mit einer Ähnlichkeit (Zentrum A^* und Ähnlichkeitsfaktor $1/\cos t$) gewonnen. Der Zwanglauf ζ_1^* ist für einen Beobachter im Rastsystem τ_1^* drehsymmetrisch bezüglich des Zentrums A_1^* . Bei der Parametrisierung (1) befinden sich die Punkte von ε_1 zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade in den Fußpunkten der Lote aus A_1^* auf die entsprechenden Bahngeraden. Abb. 1 zeigt rechts unten die Position $t = 0$ — die Pfeile deuten die Fortschreitrichtung für $t \leq 0$ an.

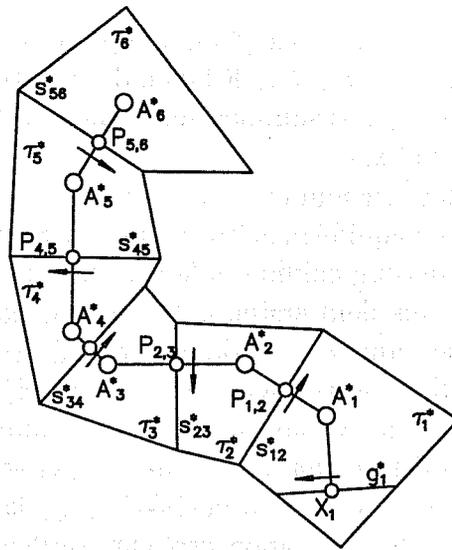


Abb.1: 6 gekoppelte lineare äquiforme Zwangsläufe

Jede Gerade g_1^* von τ_1^* , die A_1^* nicht enthält, tritt als Bahngerade genau eines Punktes $X_1 \in \epsilon_1$ auf¹.

Nun drehen wir τ_1^* samt dem darin ablaufenden äquiformen Zwangslauf ζ_1^* um die Gerade s_{12}^* (Drehwinkel δ_{12}) in eine Position τ_2^* (vgl. Abb. 1). Der Punkt A_1^* gelangt in eine Position $A_2^* \in \tau_2^*$. Aus $\zeta_1^*(t)$ entsteht der lineare äquiforme Zwangslauf $\zeta_2^*(t)$ einer Gangebene ϵ_2 gegenüber der Rastebene τ_2^* mit dem globalen Fixpunkt A_2^* . In ϵ_2 gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt P_{21} , der von ζ_2^* auf der Drehachse s_{12}^* geführt wird. Analog existiert in ϵ_1 ein eindeutig bestimmter Punkt P_{12} , der bei ζ_1^* auf dieser Drehachse s_{12}^* geführt wird. Zu jedem Zeitpunkt $t \in I \subset \mathbb{R}$ fallen die Positionen von P_{12} unter ζ_1^* und P_{21} unter ζ_2^* zusammen - eine Koppelung der Zwangsläufe ζ_1^* und ζ_2^* läßt sich über diese gemeinsame Punktbahn realisieren.

Diese Vorgangsweise iterieren wir nun: Durch Drehung der Ebene τ_i^* ($i = 2, \dots, m - 1$) um die den Punkt A_i^* nicht enthaltende Gerade $s_{i,i+1}^* \in \tau_i^*$ (Drehwinkel $\delta_{i,i+1}$) entstehe eine Position τ_{i+1}^* : Dort läuft ein aus ζ_i^* gewonnener ebener linearer äquiformer Zwangslauf $\zeta_{i+1}^* := \epsilon_{i+1} / \tau_{i+1}^*$ mit dem globalen Fixpunkt $A_{i+1}^* \in \tau_{i+1}^*$ ab. Wieder gibt es in ϵ_{i+1} einen eindeutig bestimmten Punkt $P_{i+1,i}$, der von ζ_{i+1}^* auf der Drehachse $s_{i,i+1}^*$ geführt wird. Genauso existiert in ϵ_i ein eindeutig

¹Eine Konstruktion ist zum Zeitpunkt $t = 0$ leicht möglich (Ermittlung des Lotfußpunktes für das Lot aus A_1^* !).

bestimmter Punkt $P_{i,i+1}$, der bei ζ_i^* auf dieser Drehachse $s_{i,i+1}^*$ geführt wird. Zu jedem Zeitpunkt $t \in I \subset \mathbb{R}$ fallen die Positionen dieser beiden Punkte unter ζ_i^* und ζ_{i+1}^* zusammen und erlauben so eine Koppelung der Gangebene ε_i und ε_{i+1} .

Insgesamt haben wir nun ein eindimensionales Feld von m gekoppelten ebenen linearen äquiformen Zwangsläufen. Sie sind untereinander inklusive Parametrisierung euklidisch kongruent, da sie alle durch fortgesetzte Drehungen aus dem ersten $\zeta_1^*(t)$ hervorgegangen sind. Äquivalent zu Drehungen um $s_{i,i+1}^*$ können wir $\zeta_{i+1}^*(t)$ aus $\zeta_i^*(t)$ durch Spiegelung an der Symmetrieebene der Punkte A_i^* und A_{i+1}^* gewinnen². Abb. 1 zeigt diese Situation für $m = 6$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Dabei wurden alle auftretenden Drehwinkel $\delta_{i,i+1} = \pi$ gesetzt.

Durch geeignete Wahl der Drehwinkel $\delta_{i,i+1}$ kann unter Umständen eine geschlossene Konfiguration erreicht werden. Dazu fügen wir an das letzte System m noch ein weiteres $(m + 1)$ -tes in einer Ebene τ_{m+1}^* an. Wir wollen dabei dann von einer *geschlossenen Konfiguration* sprechen, wenn folgende drei Forderungen erfüllt sind:

- (G1) Es gilt $\tau_{m+1}^* = \tau_1^*$
- (G2) Es gilt $A_{m+1}^* = A_1^*$
- (G3) Der Zwangslauf $\zeta_{m+1}^*(t)$ in der Ebene τ_{m+1}^* stimmt mit $\zeta_1^*(t)$ überein (inklusive Drehsinn!).

Beispiele für solcherart geschlossene Konfigurationen stellen sich in Spezialfällen dann ein³, wenn wir m als gerade Zahl wählen und τ_i^* als Tangentialebenen einer fest gewählten Kugel mit Berührungspunkten A_i^* ansetzen. Die Geraden $s_{i,i+1}^*$ sind dann die Schnittgeraden $\tau_i^* \cap \tau_{i+1}^*$.

Diese Beispiele sind aber nicht die einzigen. Jede der oben gefundenen geschlossenen Konfigurationen aus Tangentialebenen einer Kugel kann als geschlossene Kette von m Systemen aufgefasst werden, die über m Scharniere (1R- Gelenke) $s_{i,i+1}^*$ gekoppelt sind. Bei allgemeinen Abmessungen wäre der Freiheitsgrad dieser Gelenkskette $F = 6 * (m - 1) - 5 * m = m - 6$; ab $m = 7$ liegt daher zumindest einparametrische Beweglichkeit vor. Wenn dies der Fall ist, oder andere Möglichkeiten des Zusammenbaues existieren, haben wir neue geschlossene Konfigurationen gefunden, wenn sie nur unseren Bedingungen (G1), (G2) und (G3) genügen.

²Die Schnittgerade $s_{i,i+1}^*$ ist in dieser Symmetrieebene enthalten.

³vgl. die Überlegungen aus [6].

2. Ein zweidimensionales Feld gekoppelter Systeme

Wir werden unsere Systeme nun doppelt indizieren: Gegeben sei das vorhin konstruierte eindimensionale Feld gekoppelter äquiformer Zwangläufe $\zeta_{i,1}^*(t)$ von Gangebene $\varepsilon_{i,1}$ in Ebenen $\tau_{i,1}^*$ mit Fixpunkten $A_{i,1}^*$ ($i = 1, \dots, m$). Nun wählen wir eine von $s_{1,2}^*$ verschiedene Gerade v_1^* in $\tau_{1,1}^*$, die $A_{1,1}^*$ nicht enthält.

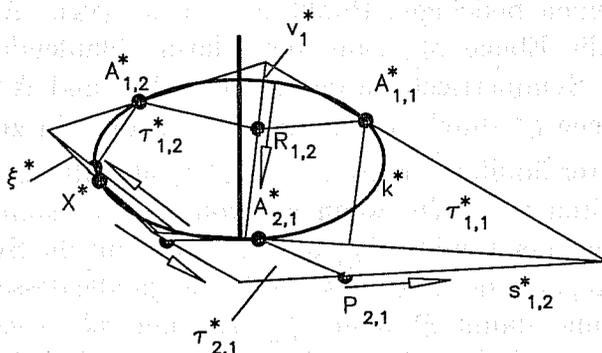


Abb.2: Schließungsbedingung für 4 gekoppelte lineare äquiforme Zwangläufe

Durch Drehung von $\tau_{1,1}^*$ samt dem darin ablaufenden äquiformen Zwanglauf $\zeta_{1,1}^*$ um v_1^* (Drehwinkel $\beta_{1,1}$) erhalten wir eine Position $\tau_{1,2}^*$ (vgl. Abb. 2); der Punkt $A_{1,1}^*$ gelangt in eine Position $A_{1,2}^* \in \tau_{1,2}^*$. Aus $\zeta_{1,1}^*(t)$ entsteht der lineare äquiforme Zwanglauf $\zeta_{1,2}^*(t)$ einer Gangebene $\varepsilon_{1,2}$ gegenüber der Rastebene $\tau_{1,2}^*$ mit dem globalen Fixpunkt $A_{1,2}^*$. In $\varepsilon_{1,2}$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $R_{2,1}$, der von $\zeta_{1,2}^*$ auf der Drehachse v_1^* geführt wird. Analog existiert in $\varepsilon_{1,1}$ ein eindeutig bestimmter Punkt $R_{1,2}$, der bei $\zeta_{1,1}^*$ auf dieser Drehachse v_1^* läuft. Zu jedem Zeitpunkt $t \in I \subset \mathbb{R}$ fallen die Positionen dieser beiden Punkte unter $\zeta_{1,1}^*$ und $\zeta_{1,2}^*$ zusammen. Die Situation in $\tau_{1,2}^*$ entsteht durch Spiegelung an der Symmetrieebene ρ_1^* der Punkte $A_{1,1}^*$ und $A_{1,2}^*$ aus der in der Ausgangsebene $\tau_{1,1}^*$.

Wir wollen nun überlegen, ob nach obigen Überlegungen eine Koppelung zwischen den Zwangläufen $\zeta_{1,2}^*(t)$ und $\zeta_{2,1}^*(t)$ über ein Zwischenstück $\zeta_{2,2}^*(t)$ in einer Zwischenebene $\tau_{2,2}^*$ hergestellt werden kann. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

FALL A: Die Punkte und Ebenen $(A_{1,1}^*, \tau_{1,1}^*)$, $(A_{2,1}^*, \tau_{2,1}^*)$ sowie $(A_{1,2}^*, \tau_{1,2}^*)$ sind Flächenelemente einer gemeinsamen Kugel κ^* , oder es gilt $\tau_{1,1}^* = \tau_{2,1}^* = \tau_{1,2}^*$. In diesem Fall dürfen wir mit [6] einen beliebigen weiteren Punkt $A_{2,2}^*$ dieser Kugel (bzw. Ebene) und $\tau_{2,2}^*$ als

zugehörige Tangentialebene wählen. In dieser Ebene kann nach [6] ein zu $\zeta_{1,1}^*(t)$ (inklusive Parametrisierung) kongruenter ebener äquiformer Zwanglauf $\zeta_{2,2}^*(t)$ mit globalem Fixpunkt $A_{2,2}^*$ definiert werden, der die gewünschten Eigenschaften besitzt.

FALL B: Die drei Flächenelemente passen nicht zu einer Kugel (bzw. Ebene)⁴. Dann bestimmen die drei Punkte $A_{1,1}^*$, $A_{2,1}^*$ und $A_{1,2}^*$ einen eindeutig bestimmten Kreis k^* (der zu einer Geraden entarten kann). Wir wählen einen beliebigen Punkt X^* auf k^* (vgl. Abb. 2). Nun spiegeln wir die Ebene $\tau_{2,1}^*$ samt dem darin ablaufenden Zwanglauf $\zeta_{2,1}^*(t)$ an der Symmetrieebene der Punkte $A_{2,1}^*$ und X^* und gewinnen: eine Ebene ξ^* durch den Punkt X^* , in der ein zu $\zeta_{2,1}^*(t)$ kongruenter linearer äquiformer Zwanglauf $\hat{\zeta}^*(t)$ abläuft. Genau dasselbe Resultat erhalten wir auch, wenn wir von $\tau_{2,1}^*$ her kommend an der Symmetrieebene der Punkte $A_{2,1}^*$ und X^* spiegeln: die Symmetrieebenen der Punktepaare des Kreises k^* enthalten ja alle dessen Drehachse. Um von X^* und damit ξ^* über $\tau_{1,2}^*$, $\tau_{1,1}^*$ und $\tau_{2,1}^*$ wieder nach X^* zurückzukommen, sind 4 solche Spiegelungen erforderlich. Die Zusammensetzung dieser 4 Spiegelungen ist eine Drehung um die Drehachse des Kreises k^* , die den Punkt X^* in sich überführt — es handelt sich somit um die Identität⁵. Wir haben damit ein mögliches Zwischenstück gefunden und setzen $A_{2,2}^* := X^*$, $\tau_{2,2}^* := \xi^*$ sowie $\zeta_{2,2}^*(t) := \hat{\zeta}^*(t)$. Dieser Zwanglauf erlaubt eine Koppelung über die auf den Schnittgeraden der Ebenen $\tau_{1,2}^*$ und $\tau_{2,1}^*$ mit $\tau_{2,2}^*$ laufenden Punkte der jeweiligen Gangebene.

Durch Iteration dieses Verfahrens läßt sich entweder nach A oder nach B ein zweidimensionales Feld von ebenen linearen äquiformen Zwangläufen $\zeta_{i,j}^*(t) := \varepsilon_{i,j}/\tau_{i,j}^*$ mit globalen Fixpunkten $A_{i,j}^* \in \tau_{i,j}^*$ definieren, die sogar inklusive Parametrisierung euklidisch kongruent sind ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). Dabei sind die Gangebene $\varepsilon_{i,j}$ mit den benachbarten $\varepsilon_{i\pm 1,j}$ und $\varepsilon_{i,j\pm 1}$ über gemeinsame geradlinige Punktbahnen gekoppelt ($i = 2, \dots, m-1; j = 2, \dots, n-1$).

Insgesamt haben wir so ein zweidimensionales Feld von $m \times n$ linearen ebenen äquiformen Zwangläufen $\zeta_{i,j}^*(t)$ gewonnen, deren Gangsysteme $\varepsilon_{i,j}$ durch zumindest $2 \times m \times n - m - n$ Punktbahnen gekoppelt sind. Abb. 3 zeigt zur Verdeutlichung einen Graphen der Situation,

⁴Diese Fälle sind in den bisherigen Arbeiten noch nicht untersucht.

⁵Sollte k^* eine Gerade sein, liegen Schiebungen in Richtung dieser Geraden vor, die zusammen ebenfalls die Identität ergeben.

in der Systeme durch Knoten (i, j) und Verbindungen durch Kanten angedeutet sind. Pfeile geben die jeweilige Orientierung der Zwangläufe $\zeta_{i,j}^*(t)$ an. Die in den Gangebene $\varepsilon_{i,j}$ zur Koppelung mit den Nachbarbenen verwendeten Punkte definieren im allgemeinen ein Viereck, das mit Nachbarvierecken in den Ebenen $\varepsilon_{i\pm 1, j}$ und $\varepsilon_{i, j\pm 1}$ gekoppelt bleibt (vgl. auch Abb. 5). Nur für Randsysteme $\varepsilon_{0, j}$ und $\varepsilon_{i, 0}$ bilden diese Punkte Strecken bzw. Dreiecke (vgl. Abb. 4).

Wir fassen zusammen:

Satz 1. *Die unter Fall A bzw. B vorgenommene Konstruktion erlaubt es, insgesamt ein zweidimensionales Feld von $m \times n$ ebenen linearen äquiformen Zwangläufen $\zeta_{i,j}^*(t)$ mit globalen Fixpunkten $A_{i,j}^*$ zu definieren. Diese Zwangläufe sind inklusive Parametrisierung alle untereinander euklidisch kongruent und lassen sich über die insgesamt $2 \times m \times n - m - n$ geradlinigen Punktbahnen mit den oben beschriebenen Nachbarsystemen so koppeln, daß die Beweglichkeit nicht gestört wird.*

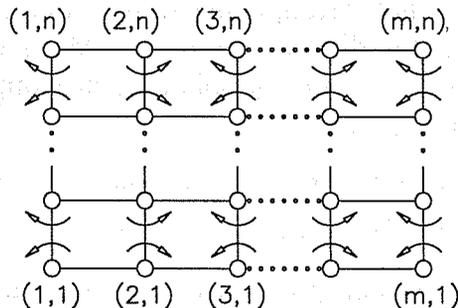


Abb.3: Graph des 2-dim. Feldes gekoppelter linearer äquiformer Zwangläufe

3. Ein zweidimensionales Feld von gekoppelten Zwangläufen im Sinne der euklidischen Bewegungsgruppe

Die oben definierten ebenen äquiformen Zwangläufe $\zeta_{i,j}^*(t)$ sind inklusive Parametrisierung euklidisch kongruent mit dem gemeinsamen Skalierungsfaktor $1/\cos t$. Einer Idee von H. Stachel [9] folgend überlagern wir diese äquiformen Zwangläufe mit einer von der Zeit abhängigen zentrischen Streckung oder Stauchung aus einem festen Punkt O^* mit Faktor $\cos t$. Die ebenen äquiformen Zwangläufe werden dabei zu räumlichen Zwangläufen hinsichtlich der Gruppe der euklidischen Kongruenztransformationen, die nun alle untereinander kongruent sind. Mit [7]

handelt es sich dabei um euklidisch kongruente Darboux-Zwangläufe, die sogar kongruent parametrisiert sind und t als gemeinsamen Drehwinkel besitzen.

Die Koppelung der Punkte zweier Systeme, die ehemals auf einer gemeinsamen Bahngeraden geführt wurden, bleibt aufrecht. Da der Winkel zwischen den ehemaligen Gangebenen bei unserer Streckung nicht verändert wird, kann die Koppelung nach der Skalierung durch sphärische Doppelscharniere (Drehachsen normal zu den ehemaligen Gangebenen) realisiert werden. Sollten benachbarte Ebenen zusammenfallen, kann sogar ein gewöhnliches Scharnier (1R-Gelenk) zur Koppelung verwendet werden.

Zur Realisierung der Gangsysteme eignen sich daher gerade Prismen gut, die über den zu koppelnden Punkten der ehemaligen Gangebenen errichtet werden. Ihre Kanten stellen dann bereits Scharniere (1R-Gelenke) unserer Mechanismen dar (vgl. Abb. 4).

Im allgemeinen Fall (Koppelung durch sphärische Doppelscharniere) berechnen wir für die so gewonnenen Mechanismen aus $m \times n$ Systemen und $2 \times m \times n - m - n$ sphärischen Doppelscharnieren den theoretischen Freiheitsgrad zu

$$(2) \quad \begin{aligned} F &= 6 \times (m \times n - 1) - 4 \times (2 \times m \times n - m - n) = \\ &= 4 \times (m + n) - 2 \times m \times n - 6. \end{aligned}$$

Nach unserer Konstruktion gestattet der Mechanismus zumindest eine einparametrische nichttriviale Beweglichkeit, die von unserem Drehwinkel $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ herrührt. Für geeignete Wahl von m und n wird der theoretische Freiheitsgrad $F \leq 0$ — der zugehörige Mechanismus ist dann übergeschlossen. Wir notieren

Satz 2. *Die nach den obigen Prinzipien konstruierten Mechanismen bestehen aus einem zweidimensionalen Feld von $m \times n$ Systemen, die über $2 \times m \times n - m - n$ sphärische Doppelscharniere so gekoppelt werden können, daß der Mechanismus zumindest einparametrische Beweglichkeit gestattet. Für den theoretischen Freiheitsgrad errechnen wir $F = 4 \times (m + n) - 2 \times m \times n - 6$.*

Die Relativzwangläufe je zweier Systeme unseres Mechanismus gegeneinander entstehen durch Koppelung zweier kongruenter (und sogar kongruent parametrisierter) Darboux-Zwangläufe. Sie sind daher als Spezialfälle der in [7] beschriebenen Zwangläufe, die allgemeine Punkte auf rationalen Kurven 4. Ordnung führen, erkannt.

4. Schließen des zweidimensionalen Feldes

Mit den Bedingungen (G1) - (G3) können wir unter Umständen ein Schließen des zweidimensionalen (rechteckigen) Feldes erreichen. Dies soll in der vorliegenden Note auf eine der folgenden beiden Arten geschehen⁶:

TYP I.: Die Systeme $(m+1, j) := (1, j)$ werden für alle $j = 1, \dots, n$ zusammengefügt (Orientierung der zusammengefügtten Ränder bleibt erhalten).

TYP II.: Die Systeme $(m+1, j) := (1, n-j)$ werden für alle $j = 1, \dots, n$ zusammengefügt (Orientierung der zusammengefügtten Ränder kehrt sich um).

Analoges läßt sich das Schließen der anderen beiden Ränder definieren.

Wenn wir einen bzw. beide Ränder unseres Rechtecksfeldes mit dem gegenüberliegenden koppeln, wollen wir von einem *einseitig bzw. zweiseitig geschlossenen Mechanismus des jeweiligen Typs* sprechen.

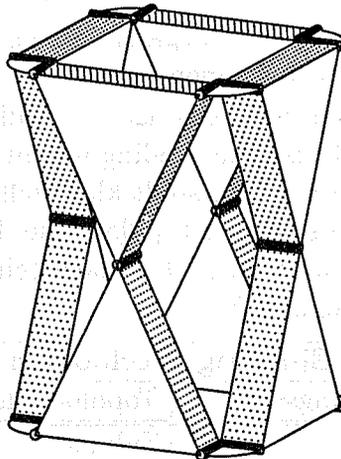


Abb.4: Spezieller verallgemeinerter Heureka-Mechanismus vom Typ I

Für einseitig geschlossene Mechanismen vom Typ I oder II — Schließen im Bereich der Indizes m vorausgesetzt — kommen noch n neue sphärische Doppelscharniere dazu. Der theoretische Freiheitsgrad des Mechanismus errechnet sich dann zu

⁶Werden nur Teilstücke der Ränder unserer Rechtecksanordnung geschlossen, so erhalten wir weitere Möglichkeiten und andere topologische Strukturen. Sie sind nicht Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

$$(3) \quad \begin{aligned} F &= 6 \times (m \times n - 1) - 4 \times (2 \times m \times n - m - n + n) = \\ &= 4 \times m - 2 \times m \times n - 6. \end{aligned}$$

Zum einseitig geschlossenen Typ I gehört das bekannte Heureka-Polyeder ($m = 4$, $n = 2$) sowie die meisten der von K. Wohlhart [13]–[16] und [18] beschriebenen Verallgemeinerungen. Als hübsche Sonderform sei in Abb. 4 ein Beispiel dieses Typs mit $m = 4$, $n = 2$ vorgestellt, bei dem zusätzlich die Paare von Ebenen $\tau_{i,1}^*$ und $\tau_{i,2}^*$ zusammenfallen. Vier unserer Doppelscharniere entarten dabei zu einfachen Scharnieren, wodurch sich der theoretische Freiheitsgrad weiter vermindert:

$$(4) \quad F = 4 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 - 6 - 4 = -10.$$

Für zweiseitig geschlossene Mechanismen erhalten wir insgesamt $m \times n$ Systeme, die über $2 \times m \times n$ sphärische Doppelscharniere gekoppelt sind. Für sie nimmt der theoretische Freiheitsgrad den Wert

$$(5) \quad \begin{aligned} F &= 6 \times (m \times n - 1) - 4 \times 2 \times m \times n = \\ &= -2 \times m \times n - 6. \end{aligned}$$

an, ist also für $m, n \in \mathbb{N}$ stets negativ. Es entstehen somit in jedem Fall übergeschlossene Mechanismen.

Bemerkung. Bei diesem Schließen ist stets auf die Bedingungen (G1) bis (G3) zu achten. (G3) ist eine Bedingung an die Orientierungen der zusammengefügt Systeme und stellt klar, daß je nach Vorgangsweise (Typ I oder Typ II) verschieden topologische Typen eines Rechteckes mit verklebten Rändern auftreten. Die nachstehende Tabelle listet die dabei entstehenden Typen auf:

Einseitig geschlossen	
Schließungstyp	Topologischer Typ
I	Zylinder
II	Möbiusband

Zweiseitig geschlossen		
Schließungstyp m	Schließungstyp n	Topologischer Typ
I	I	Torus
I	II	Kleinsche Flasche
II	I	Kleinsche Flasche
II	II	Projektive Ebene

Wir fassen zusammen:

Satz 3. *Die nach den obigen Prinzipien konstruierten Mechanismen bestehen aus einem zweidimensionalen Feld von $m \times n$ Systemen, die im einseitig bzw. zweiseitig geschlossenen Fall über sphärische Doppelscharniere so gekoppelt werden können, daß der Mechanismus zumindest einparametrische Beweglichkeit gestattet. Der theoretische Freiheitsgrad errechnet sich im einseitig bzw. zweiseitig geschlossenen Fall nach Formel (3) bzw. (5).*

Die so gefundenen zweifach geschlossenen Anordnungen bleiben sogar dann übergeschlossen, wenn statt der sphärischen Doppelscharniere Kugelgelenke zur Verbindung benachbarter Systeme verwendet werden: Der zugehörige theoretische Freiheitsgrad errechnet sich in diesem Fall zu

$$(6) \quad F = 6 \times (m \times n - 1) - 3 \times 2 \times m \times n = -6,$$

ist also von m und n unabhängig. Dies ergibt den folgenden

Satz 4. *Die nach den obigen Prinzipien konstruierten zweiseitig geschlossenen Mechanismen bestehen aus einem zweidimensionalen Feld von $m \times n$ Systemen, die über $2 \times m \times n$ Kugelgelenke so gekoppelt werden können, daß der Mechanismus zumindest einparametrische Beweglichkeit gestattet. Da sich für den theoretischen Freiheitsgrad unabhängig von m und n stets der Wert $F = -6$ einstellt, handelt es sich bei diesen zweiseitig geschlossenen Mechanismen mit Kugelgelenken um übergeschlossene Gelenksketten.*

5. Beispiele für zweiseitig geschlossene Mechanismen

Neben Beispielen für den topologischen Typ eines Zylinders sind solche für Möbiusbänder bekannt: In [8] ist es gelungen, einen übergeschlossenen Mechanismus dieses Typs zu realisieren - er wurde *Möbius-Mechanismus* genannt. Da sich Kleinsche Flasche und projektive Ebene im euklidischen Dreiraum nicht ohne Selbstdurchdringungen realisieren lassen, ist eine Realisierung der entsprechenden Mechanismen ohne Selbstschnitte ebenfalls nicht zu erwarten.

Als Beispiel für den topologischen Typ des Torus sei zuerst eine Konfiguration vom Typ $m = 4$ und $n = 4$ angegeben, deren theoretischer Freiheitsgrad sich bei Ausführung mit sphärischen Doppelscharnieren mit (5) zu $F = -38$ errechnet. Dieses hochgradig übergeschlos-

sene System ist nach unserer Konstruktion zumindest zwangsläufig beweglich. Abb. 5 zeigt die Ausführung mit Kugelgelenken, die nach Satz 4 auf theoretischen Freiheitsgrad $F = -6$ führt, in zwei Ansichten.

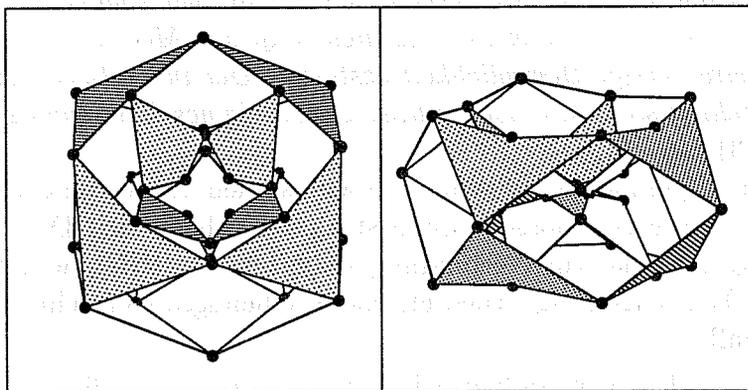


Abb.5: Zweifach geschlossener verallgemeinerter Heureka-Mechanismus für $m = 4$, $n = 4$ (Gelenke durch Kugeln angedeutet)

Abb. 6 zeigt eine weitere Version vom Torustyp mit $m = 4$, $n = 6$, für deren theoretischen Freiheitsgrad wir unter Verwendung von sphärischen Doppelscharnieren mit (5) $F = -54$ errechnen. Wenn wir zusätzlich durch spezielle Anordnung — wie in Abb. 6 angedeutet — zwei Serien von sphärischen Doppelscharnieren durch gewöhnliche Scharniere ersetzen können, haben wir eine übergeschlossene kinematische Kette mit dem theoretischen Freiheitsgrad $F = -66$ gefunden.

6. Zusammenfassung

Durch Verallgemeinerung der in [6] angegebenen Überlegungen gelingt es, ein zweidimensionales Feld ebener äquiformer Zwangsläufe mit geradlinigen Bahnen zu konstruieren, bei dem Nachbarsysteme über gemeinsame Punktbahnen gekoppelt werden können. Diese äquiformen Zwangsläufe sind inklusive Bewegungsparameter euklidisch kongruent und lassen sich daher durch gemeinsame (von der Zeit t abhängige) Streckung bzw. Stauchung aus einem festen Zentrum zu räumlichen euklidischen Bewegungsvorgängen fortsetzen, die die Ausgangskoppelung widerspiegeln. Sie bilden eine übergeschlossene kinematische Kette, die als *verallgemeinerter Heureka-Mechanismus* angesprochen wird. Die Relativzwangsläufe der Systeme untereinander sind im allgemeinen rationale räumliche Zwangsläufe 4. Ordnung. Danach haben wir Schlies-

sungsbedingungen für diese Rechtecksanordnung von Systemen angegeben. Sie führen zu verschiedenen topologischen Typen von übergeschlossenen Mechanismen, deren Systeme durch sphärische Doppelscharniere gekoppelt sind.

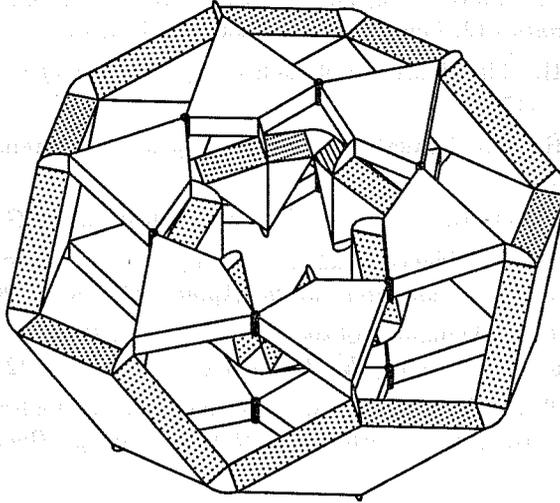


Abb.6: Zweifach geschlossener verallgemeinerter Heureka-Mechanismus für $m = 4$ und $n = 6$ (Koppelung durch zwölf 2R- und zwölf 1R-Gelenke)

Eine andere Art der Verallgemeinerung verwendet A. Buzzi in [2] zur Konstruktion von übergeschlossenen kinematischen Ketten, die aus unendlich vielen Teilsystemen zusammengesetzt sind. Seine Konstruktion wendet das angegebene Prinzip auf ein spezielles verallgemeinertes reguläres Polyeder an, das von J. Petrie und H.S.M. Coxeter entdeckt wurde.

Literatur

- [1] BOTTEMA, O. and ROTH, B.: Theoretical Kinematics, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.
- [2] BUZZI, A.: Aus unendlich vielen Teilsystemen zusammengesetzte übergeschlossene kinematische Ketten, Diplomarbeit, TU Graz, 1999.
- [3] KRAUSE, M.: Zur Theorie der ebenen ähnlich veränderlichen Systeme, *Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **19** (1910), 327–329.
- [4] RÖSCHEL, O.: Rationale Zwangläufe vierter Ordnung, *Sber. d. Österr. Akad. Wiss.* **194** (1985), 185–202.
- [5] RÖSCHEL, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle I. *Math. Pannonica* **6/1** (1995), 267–284.

- [6] RÖSCHEL, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle II, *Studia Sci. Math. Hung.* **32** (1996), 383–393.
- [7] RÖSCHEL, O.: Linked Darboux motions, *Math. Pannonica* **7/2** (1996), 291–301.
- [8] RÖSCHEL, O.: Möbius mechanisms, *Proc. 7th Int. Symp. on Advances in Robot Kinematics* (J. Lenarcic ed.), 2000, (im Druck).
- [9] STACHEL, H.: The Heureka-Polyhedron, *Proceedings of Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 1991, 447–459.
- [10] STACHEL, H.: Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen, *Journ. of Geom.* **43** (1992), 14–21.
- [11] STACHEL, H.: On the tetrahedra in a dodekahedron, *KoG* **4** (1999), 5–10.
- [12] VERHEYEN, H.F.: The complete set of Jitterbug transformers and the analysis of their motion, *Computers Math. Applic.* **17** (1989), 203–250.
- [13] WOHLHART, K.: Dynamics of the Turning Tower, *Proc. d. IV. Ogólnopolska Konf. Maszyn Włokiennicznych i Dzwigowych*, 1993 325–332.
- [14] WOHLHART, K.: Heureka Octahedron and Brussels folding cube as special cases of the turning tower, *Proc. 6th IFToMM Symp. București*, 1993, 303–312.
- [15] WOHLHART, K.: Das dreifach plansymmetrische Oktoid und seine Punktbahnen, *Math. Pannonica* **6/2** (1995), 243–265.
- [16] WOHLHART, K.: New Overconstrained Spheroidal Linkages, *Proc. 9th World Congr. on the Theory of the Machines and Mechanisms Milano*, 1995, 149–155.
- [17] WOHLHART, K.: Kinematotropic Linkages, In: *Recent Advances in Robot Kinematics* (J. Lenarcic-V. Parenti-Castelli, eds.), Kluwer Acad. Pbl., Netherlands 1996, 357–368.
- [18] WOHLHART, K.: The kinematics of Röschel polyhedra, In: *Advances in Robot Kinematics* (J. Lenarcic-M. Husty, eds.), Kluwer Acad. Pbl., Netherlands 1998, 277–286.
- [19] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik, *Bibliograph. Inst. Mannheim*, Vol. 447/447a, 1973.
- [20] YAGLOM, I. M.: Geometric transformations II, Random House, Washington 1968.