Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 4, С. 86–96

УДК **519.6**

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ В НЕГЛАДКОМ СЛУЧАЕ

Р. А. Хачатрян

Рассматривается уравнение вида $F(x, y) = 0$, $x \in X$, $y \in M$, где M — некоторое множество. Методом шатров (касательных конусов), когда множество M задано негладким ограничением типа равенства, доказывается существование такой дифференцируемой функции y, что $F(x, y(x)) = 0$, $y(x) \in M$, $y(x_0) = y_0$. В частности, методом шатров исследуется вопрос существования гладких локальных селекторов для многозначных отображений вида $a(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f_i(x, y) = 0, i \in I, g(y) = 0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что функции f_i, $i \in I$, строго дифференцируемы, а функция g локально липшицева. При некоторых достаточных условиях доказано, что через любую точку графика многозначного отображения проходит дифференцируемый селектор этого отображения. Это утверждение можно интерпретировать как теорему о неявных функциях в негладком случае. В статье также построены строго дифференцируемые шатры В. Г. Болтянского для множеств, задаваемых негладкими ограничениями типа равенств. Приведено достаточное условие, при котором пересечение строго дифференцируемых шатров является строго дифференцируемым шатром. Показано, что касательные конусы Кларка являются шатрами Болтянскокого для множеств, задаваемых локально липшицевыми функциями.

Ключевые слова: многозначное отображение, субдифференциал, шатер, касательный конус.

1. Введение

Хорошо известна классическая конечномерная теорема о неявной функции, находящая большое количество различных приложений в современной математике. А именно, рассмотрим уравнения вида $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m, x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, y — неизвестная, а x — параметр. При условии гладкости функций f_i, $i = 1, \ldots, m$, и регулярности доказано существование гладкого решения системы вышеуказанных уравнений. В дальнейшем этот результат развивался в двух направлениях.

Во-первых, рассматривался тот же самый вопрос в бесконечномерных пространствах. Пусть X, Y и Z — банаховы пространства. Пусть даны отображение $F : X \times Y \to Z$ и точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, для которых $F(x_0, y_0) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

В литературе [8, с. 492], [3, 4] при тех или иных предположениях доказывается существование решения $y(x)$ уравнения (1.1) для всех x из некоторой окрестности точки x_0 и его непрерывность как функции от x. Так, например, в книге [8] доказана теорема о неявных отображениях, аналогичная конечномерной теореме. Затем в статье [4] доказывается теорема, обобщающая теорему о неявном отображении. Здесь производная $F'_y(x_0, y_0)$ отображения F является сюръективным непрерывным линейным оператором.

А в работе [3] доказана классическая теорема о неявной функции на конусе. Здесь, предполагая, что функция F строго дифференцируема и выполнено так называемое условие регулярности Робинсона.

Во-вторых, опубликованы многочисленные работы, в которых рассматривается вопрос существования непрерывных решений уравнения (1.1), когда функция F негладкая. Отметим лишь работы [9, 12, 13], где в конечномерном случае для липшицевой в окрестности точки (x_0, y_0) функции F приводятся достаточные условия, обеспечивающие существование такой липшицевой функции $y(x)$, что $F(x, y(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$. Наиболее общий результат в этом направлении получен в статье [1].

В настоящей статье рассматривается отображение F специального вида:

$$F(x, y) = 0 \iff f_i(x, y) = 0, \quad i \in I^0,\ g(y) = 0, \tag{1.2}$$

где I^0 — конечное множество индексов. Пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Предполагается, что функции f_i, $i \in I^0$, строго дифференцируемы по совокупности переменных в точке (x_0, y_0), а g — локально липшицева (возможно недифференцируемая). Приводятся достаточные условия, при которых существует решение уравнения (1.2), дифференцируемое в точке $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$.

Положим

$$a(x) := \big\{y \in Y :\ F(x, y) = 0,\ g(y) = 0\big\}, \quad x \in X.$$

Тогда вопрос существования решения уравнения (1.2) можно интерпретировать как вопрос существования селектора многозначного отображения a.

Отметим, что одной из важных проблем в теории многозначных отображений является вопрос существования однозначных аппроксимаций и селекторов с определенными свойствами. Весьма интересен и находит разнообразные приложения во многих областях математики вопрос существования селекторов, обладающих некоторыми топологическими свойствами. В частности, задача существования непрерывных селекций мультиотображения, восходящая к классической теореме Э. Майкла [14].

В статье приняты известные определения и понятия из выпуклого и нелинейного анализа [11]: $B_r(x)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Если $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество, то $\mathrm{cl}\{M\}$ — замыкание множества M,

$$\mathrm{con}(M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x :\ x = \lambda x_1,\ x_1 \in M,\ \lambda > 0\};$$

$$\mathrm{Lin}\, M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{cl}\{\mathrm{con}\, M - \mathrm{con}\, M\},$$

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$. Если $a\colon \mathbb{R}^n \to 2^Y$ — многозначное отображение, то

$$\mathrm{graf}(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) :\ y \in a(x)\}.$$

Однозначное отображение $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *локальным селектором* многозначного отображения $a : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$, проходящей через точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a)$ графика, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$y(x) \in a(x) \quad (\forall\, x \in \mathrm{dom}(a) \cap U(x_0)).$$

Определение 1 [5, с. 418]. Пусть $z_0 := (x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a)$, где $a : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ — многозначное отображение. Оно называется *псевдолипшицевым около точки* z_0, если существуют такие числа $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $L > 0$, что

$$a(x_1) \cap B_{\alpha_2}(y_0) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\| B_1(0) \quad (\forall\, x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)).$$

Если $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — конус, то

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \geqslant 0 \ \ (\forall\, x \in K)\}.$$

Определение 2 [5, с. 397]. *Касательным конусом Кларка* множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathrm{cl}\{M\}$ называется множество вида

$$C_M(x) \equiv \Big\{v \in \mathbb{R}^n : \lim_{\substack{\lambda\downarrow 0,\, x\in M \\ x\to x_0}} d\big(v, \lambda^{-1}(M-x)\big) = 0\Big\}.$$

Это означает, что $\overline{x} \in C_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любых последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящейся к нулю, и последовательности $\{x_k\} \subset M$, стремящейся к x_0, существует такая последовательность точек $\{\overline{x}_k\}$, сходящаяся к точке $\overline{x}$, что справедливо включение

$$x_0 + \lambda_k \overline{x}_k \in M \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}).$$

Имеет место следующий результат (см. [5, с. 430, следствие 5]).

Теорема 1. *Пусть M_1 и M_2 — непустые замкнутые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что если*

$$x_0 \in M_1 \cap M_2, \quad C_{M_1}(x_0) - C_{M_2}(x_0) = \mathbb{R}^n,$$

то

$$C_{M_1}(x_0) \cap C_{M_2}(x_0) \subseteq C_{M_1\cap M_2}(x_0).$$

Определение 3 [6, с. 278]. *Конус K называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существует такое отображение $r : U \to \mathbb{R}^n$, определенное в некоторой окрестности нуля U, что*

$$x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M, \quad \textit{если} \quad \overline{x} \in K \cap U \quad \textit{и} \quad \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0 \quad \textit{при} \quad \overline{x} \to 0.$$

Определение 4. Шатер K называется *непрерывным*, если r непрерывно. Шатер K называется *строго дифференцируемым*, если r строго дифференцируемо в нуле, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $\|r(\overline{x}_1) - r(\overline{x}_2)\| < \varepsilon\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|$ для $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B_\delta(0) \subseteq U$.

Определение 5 [9, с. 32]. Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ — липшицевая функция в окрестности U заданной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор. *Обобщенная производная Кларка* функции f в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_C(x_0, \overline{x})$, определяется формулой

$$f'_C(x_0, \overline{x}) = \lim\sup_{\substack{x\to x_0, \\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x+\lambda\overline{x}) - f(x)}{\lambda}.$$

Определение 6 [9]. *Субдифференциалом Кларка* локально липшицевой функции $f : \mathbb{R}^n \to R$ в точке x_0 называется множество

$$\partial_C f(x_0) = \big\{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_C(x_0, \overline{x}) \geqslant \langle x^*, \overline{x}\rangle \ \ (\forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n)\big\}.$$

Определение 7 [2, с. 139]. Функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строго дифференцируемой в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки x_0, что

$$\big|g(y) - g(z) - \langle g'(x_0), y - z\rangle\big| \leqslant \varepsilon\|y - z\| \quad (\forall\, y, z \in V),$$

где $g'(x_0) \in \mathbb{R}^n$ — градиент функции g в точке x_0.

2. Строго дифференцируемые шатры

В этом разделе построены строго дифференцируемые шатры для множеств, задаваемых негладкими ограничениями типа равенства. Приведено достаточное условие, при котором пересечение строго дифференцируемых шатров является строго дифференцируемым шатром.

Предложение 1. *Пусть* $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, *где* g *— строго дифференцируемая функция в точке* x_0, $g(x_0) = 0$ *и* $g'(x_0) \neq 0$. *Тогда подпространство* $H := \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g'(x_0), \overline{x}\rangle = 0\}$ *является строго дифференцируемым шатром для множества* M *в точке* x_0.

$\lhd$ Поскольку $g'(x_0) \neq 0$, то найдется такой вектор w, $\|w\| = 1$, что

$$\langle g'(x_0), w\rangle < 0.$$

Так как g строго дифференцируема, то существует такая функция $R(\overline{x}) = o(\overline{x})$, что

$$g(x_0 + \overline{x}) = g(x_0) + \langle g'(x_0), \overline{x}\rangle + R(\overline{x}). \tag{2.1}$$

Положим $\omega(\lambda) = \sup\{R(\overline{x}) : \|\overline{x}\| \leqslant \lambda\}$. Очевидно, что $\omega(\lambda)$ монотонно неубывает, $\omega(\lambda)/\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$ и $R(\overline{x}) \leqslant \omega(\|\overline{x}\|)$. Если $\overline{x} \in H$ и $\mu > 0$, то из (2.1) получим

$$\begin{gathered} g(x_0 + \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) = g(x_0) + \langle g'(x_0), \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w\rangle + R(\overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) \\ \leqslant \|\overline{x}\|\mu\langle g'(x_0), w\rangle + \omega(\|\overline{x}\|(1 + \mu\|w\|)) = \|\overline{x}\|\left[\mu\langle g'(x_0), w\rangle + \frac{\omega(\|\overline{x}\|(1 + \mu\|w\|))}{\|\overline{x}\|}\right]. \end{gathered}$$

Выберем $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы выражение в квадратных скобках стало меньше, чем $\frac{1}{2}\mu\langle g'(x_0), w\rangle$, когда $\|\overline{x}\| \leqslant \delta_1$. Тогда выполняются оценки

$$g(x_0 + \overline{x} + \mu\|\overline{x}\|w) \leqslant \frac{1}{2}\mu\|\overline{x}\|\langle g'(x_0), w\rangle < 0 \quad (\forall\, \overline{x} \in H \cap B_{\delta_1}(0),\ \overline{x} \neq 0). \tag{2.2}$$

Аналогично существует такое число $\delta_2 > 0$, что

$$g(x_0 + \overline{x} - \mu\|\overline{x}\|w) > 0, \quad \overline{x} \in H \cap B_{\delta_2}(0),\ \overline{x} \neq 0. \tag{2.3}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для фиксированного $\overline{x} \in H \cap B_\delta(0)$ рассмотрим функцию $q(\overline{x}, \beta) := g(x_0 + \overline{x} + \beta\|\overline{x}\|w)$ на сегменте $[-\mu, \mu]$. Из соотношений (2.2)–(2.3) следует, что $q(\overline{x}, \mu) < 0$, $q(\overline{x}, -\mu) > 0$. Следовательно, существует такая точка $\beta(\overline{x}) \in [-\mu, \mu]$, что $q(\overline{x}, \beta(\overline{x})) = 0$. Теперь покажем, что точка $\beta(\overline{x})$ определяется однозначно. Для этого сначала заметим, что для фиксированного $\overline{x}$ функция $q(\overline{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β. Действительно, поскольку g строго дифференцируема в x_0, то для заданного ε, $0 < \varepsilon < |\langle g'(x_0), w\rangle|$, и достаточно малых $\overline{x} \neq 0$ имеем

$$\begin{gathered} \limsup_{\tau\downarrow 0} \frac{q(\overline{x}, \beta + \tau) - q(\overline{x}, \beta)}{\tau} \\ = \limsup_{\tau\downarrow 0} \frac{g(x_0 + \overline{x} + (\beta + \tau)\|\overline{x}\|w) - g(x_0 + \overline{x} + \beta\|\overline{x}\|w)}{\tau} \\ \leqslant \|\overline{x}\|\big(\langle g'(x_0), w\rangle + \varepsilon\big) < 0. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что функция $q(\overline{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β и, следовательно, $\beta(\overline{x})$ определяется однозначно. Заметим также, что $\beta(\overline{x}) \to 0$ при $\overline{x} \to 0$. Теперь определим отображение r следующим образом: $r(\overline{x}) = \rho(\overline{x})w$ для любых $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, где $\rho(\overline{x}) = \beta(\mathrm{Pr}_H(\overline{x}))\|\mathrm{Pr}_H(\overline{x})\|$. Здесь Pr_H — оператор проектирования на подпространство H. По определению r для достаточно малых $\overline{x} \in H$ имеем $g(x_0 + \overline{x} + r(\overline{x})) = 0$. Нетрудно доказать также, что

$$\lim_{\overline{x}\to 0} \frac{\|r(\overline{x})\|}{\|\overline{x}\|} = 0.$$

Наконец докажем, что отображение r строго дифференцируемо в нуле. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in H \cap B_\delta(0)$ имеет место

$$\begin{aligned}&|\langle g'(x_0), (\rho(\overline{x}_1) - \rho(\overline{x}_2))w\rangle| \\ &= |g(x_0 + \overline{x}_1 + \rho(\overline{x}_1)w) - g(x_0 + \overline{x}_2 + \rho(\overline{x}_2)w) - \langle g'(x_0), \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + (\rho(\overline{x}_1) - \rho(\overline{x}_2))w\rangle| \\ &\leqslant \varepsilon(\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\| + \|w\||\rho(\overline{x}_1) - \rho(\overline{x}_2)|).\end{aligned}$$

Поскольку $\|w\| = 1$, то получим

$$|\rho(\overline{x}_1) - \rho(\overline{x}_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w\rangle| - \varepsilon}\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|.$$

Теперь, если $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in B_\delta(0)$, то

$$|\rho(\overline{x}_1) - \rho(\overline{x}_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w\rangle| - \varepsilon}\|\mathrm{Pr}_H(\overline{x}_1) - \mathrm{Pr}_H(\overline{x}_2)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w\rangle| - \varepsilon}\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|. \rhd$$

Предложение 2 (о пересечении строго дифференцируемых шатров). *Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 являются строго дифференцируемыми шатрами для множеств $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ и $M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ соответственно в точке $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Предположим также, что*

$$K_1 - K_2 = \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Тогда конус $Q := K_1 \cap K_2$ является строго дифференцируемым шатром ко множеству $M := M_1 \cap M_2$ в точке x_0.

$\lhd$ Сначала покажем, что существуют такие положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : \mathbb{R}^n \to K_1$, $P_2 : \mathbb{R}^n \to K_2$, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$x = P_1(x) - P_2(x). \tag{2.5}$$

Положим

$$a(x) := \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}.$$

Имея в виду соотношение (2.4), легко заметить, что a — многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и $\mathrm{dom}(a) = \mathbb{R}^n$. Следовательно, в силу [15, предложение 4.2] существует такое липшицево положительно однородное отображение P_1, что

$$P_1(x) \in a(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n).$$

Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$. Очевидно, что отображение P_2 липшицево и положительно однородно, и $P_2(x) \in K_2$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, соотношение (2.5) доказано. Итак, существуют такие числа $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, что

$$\|P_1(x_1) - P_1(x_2)\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\|, \quad \|P_2(x_1) - P_2(x_2)\| \leqslant L_2\|x_1 - x_2\| \quad (\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n).$$

Кроме того, поскольку конусы K_1 и K_2 являются шатрами, то существуют такие отображения $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$, где

$$\varphi_i(\overline{x}) := x_0 + \overline{x} + r_i(\overline{x}), \quad \frac{r_i(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0, \quad i = 1, 2$$

(отображения r_i, $i=1,2$, строго дифференцируемы в нуле) и число $\delta>0$, что $\varphi_i(\overline{x})\in M_i$ для любого $\overline{x}\in Q\cap B_\delta(0)$.

Теперь рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме

$$q(\overline{x},y):=\varphi_1(\overline{x}+P_1(y))-\varphi_2(\overline{x}+P_2(y))=0. \tag{2.6}$$

Учитывая соотношение (2.5), запишем уравнение (2.6) в виде

$$q(\overline{x},y)=y+r_1(\overline{x}+P_1(y))-r_2(\overline{x}+P_2(y))=0. \tag{2.7}$$

Покажем, что уравнение (2.7) удовлетворяет всем требованиям теоремы о неявных функциях из [2, с. 161]. Действительно, имеем

a) q — непрерывное отображение и $q(0,0)=0$;

b) для любого $\varepsilon>0$ найдутся число $\delta_1>0$ и окрестность нуля U такие, что если $\overline{x}\in U$ и $\|y'\|\leqslant\delta_1$, $\|y''\|\leqslant\delta_1$, то

$$\|q(\overline{x},y')-q(\overline{x},y'')-(y'-y'')\|\leqslant\varepsilon\|y'-y''\|.$$

Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существуют число $C>0$, окрестность нуля $\overline{V}$ и отображение $y(\cdot)$, определенное в этой окрестности, такие, что

$$q(\overline{x},y(\overline{x}))=0,\quad \|y(\overline{x})\|\leqslant Cq(\overline{x},0)\quad (\forall\,\overline{x}\in\overline{V}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\|y(\overline{x})\|}{\|\overline{x}\|}\to 0,\qquad \text{при }\ \overline{x}\to 0. \tag{2.8}$$

Положим теперь

$$\varphi(\overline{x}):=\varphi_1(\overline{x}+P_1(y(\overline{x})))=x_0+\overline{x}+P_1(y(\overline{x}))+r_1(\overline{x}+P_1(y(\overline{x})))=x_0+\overline{x}+r(\overline{x}),$$

где

$$r(\overline{x})=P_1(y(\overline{x}))+r_1(\overline{x}+P_1(y(\overline{x}))).$$

Из (2.8) и того, что $r_1(\overline{x})=o(\overline{x})$, следует, что $r(\overline{x})$ обладает тем же свойством. Так как K_1 и K_2 — выпуклые конусы, имеем

$$\overline{x}+P_1(y(\overline{x}))\in K_1,\quad \overline{x}+P_2(y(\overline{x}))\in K_2\quad (\forall\,\overline{x}\in Q).$$

Далее, поскольку конусы K_1 и K_2 являются шатрами соответственно для множеств M_1 и M_2, то при достаточно малых $\overline{x}\in Q$ имеем

$$\varphi(\overline{x})=\varphi_1(\overline{x}+P_1(y(\overline{x})))=\varphi_2(\overline{x}+P_2(y(\overline{x})))\in M_1\cap M_2.$$

Осталось доказать, что отображение r строго дифференцируемо в нуле. Для этого достаточно доказать, что таковым является отображение $y(\cdot)$. Действительно, имеем

$$y(\overline{x})+r_1(\overline{x}+P_1(y(\overline{x})))-r_2(\overline{x}+P_2(y(\overline{x})))=0\quad (\forall\,\overline{x}\in\overline{V}).$$

Отсюда, поскольку отображения r_i, $i=1,2$, строго дифференцируемы в нуле, то для заданного $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $\overline{U}\subseteq\overline{V}$ нуля, что для любых $x_1,x_2\in\overline{U}$ справедливы оценки

$$\|y(\overline{x}_1)-y(\overline{x}_2)\|\leqslant\|r_1(\overline{x}_1+P_1(y(\overline{x}_1)))-r_1(\overline{x}_2+P_1(y(\overline{x}_2)))\|$$
$$+\|r_2(\overline{x}_1+P_2(y(\overline{x}_1)))-r_2(\overline{x}_2+P_2(y(\overline{x}_2)))\|\leqslant 2\varepsilon(\|\overline{x}_1-\overline{x}_2\|+C\|y(\overline{x}_1)-y(\overline{x}_2)\|),$$

где $C = \max\{L_1, L_2\}$. Отсюда,

$$\|y(\overline{x}_1) - y(\overline{x}_2)\| \leqslant \frac{2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon C}\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|,$$

т. е. отображение $y(\cdot)$ строго дифференцируемо в нуле. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть множество M задано системой уравнений*

$$g_i(x) = 0, \quad i \in I^0,$$

где I^0 — конечное множество индексов. Пусть $x_0 \in M$ и функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в x_0. Предположим также, что градиенты $g_i'(x_0)$, $i \in I^0$, линейно независимы. Тогда подпространство $H := \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g_i'(x_0),\ \overline{x}\rangle = 0,\ i \in I^0\}$ является строго дифференцируемым шатром к множеству M в точке x_0.

3. Теорема о неявных функциях в негладком случае

В этом разделе при некоторых достаточных условиях доказано, что через любую точку графика многозначного отображения вида (1.2) проходит дифференцируемая селекция этого отображения. При помощи дифференцируемых селекций можно аппроксимировать многозначную функцию и исследовать локальное поведение этих отображений. Такие аппроксимации проведены в работах [5, 10, 11], где они реализованы различными касательными конусами.

Здесь использованы шатры различной гладкости, что позволило исследовать многозначные отображения, заданные негладкими ограничениями типа равенства. Этот результат отражен в следующем утверждении, которое можно интерпретировать как теорему о неявных функциях в негладком случае.

Теорема 2 (теорема о неявных функциях в негладком случае)**.** *Пусть многозначное отображение a задано при помощи системы равенств:*

$$a(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^m :\ f_i(x,y) = 0,\ i \in I^0,\ g(y) = 0\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,$$

где функции f_i, $i \in I^0$, строго дифференцируемы (I^0 — конечное множество индексов), а g — локально липшицева. Предположим, что

1. $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf}(a)$, $0 \notin \partial_C g(x_0)$;

2. *для каждого $y^* \in \operatorname{Lin}\partial_C g(x_0)$ система векторов $\{y^*\} \cup \{f_{iy}'(x_0,y_0),\ i \in I^0\}$ линейно независима.*

Тогда существует такое отображение $y(\cdot)$, определенное в некоторой окрестности V точки x_0 и дифференцируемое в этой точке, что

$$y(x) \in a(x) \quad (\forall\, x \in V,\ y(x_0) = y_0).$$

$\triangleleft$ Так как функции f_i, $i \in I^0$, строго дифференцируемы в точке (x_0, y_0), и векторы $f_{iy}'(x_0, y_0)$, $i \in I^0$, линейно независимы, то подпространство [9, с. 59, следствие 2]

$$C_{M_1}(x_0,y_0) := \left\{\overline{z} = (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} :\ \langle f_{iy}'(x_0,y_0),\overline{y}\rangle + \langle f_{ix}'(x_0,y_0),\overline{x}\rangle = 0,\ i \in I^0\right\}$$

является конусом касательных направлений в смысле Кларка множества

$$M_1 := \left\{z = (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} :\ f_i(z) = 0,\ i \in I^0\right\}$$

в точке $z_0 = (x_0, y_0)$. В силу следствия 1 это подпространство является и строго дифференцируемым шатром для M_1 в точке (x_0, y_0). Отметим также, что по теореме 1.2 из [16] подпространство

$$H := \Big\{\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} :\ g'_C(y_0, \overline{y}) \leqslant 0,\ g'_C(y_0, -\bar{y}) \leqslant 0\Big\}$$

является непрерывным шатром множества $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} :\ g(y) = 0\}$ в точке $z_0 = (x_0, y_0)$.

Покажем, что подпространство $K_{\mathrm{graf}(a)}(z_0) := C_{M_1}(x_0, y_0) \cap H$ является шатром множества $\mathrm{graf}(a)$ в точке z_0. Для этого проверим условия теоремы 2.1 из [16] (теорема о пересечении непрерывных шатров). Имеем

$$C_{M_1}(x_0, y_0) - H = \mathbb{R}^{n+m} \Longleftrightarrow (C_{M_1}(x_0, y_0))^* \cap H^* = \{0\}.$$

Далее, имеем

$$(C_{M_1}(x_0, y_0))^* = \big\{(x^*, y^*) :\ x^* = F'_x(x_0, y_0)\alpha,\ y^* = F'_y(x_0, y_0)\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^k\big\},$$

где

$$k = |I^0|, \quad F'_x(x_0, y_0) = (f'_{1x}(x_0, y_0), f'_{2x}(x_0, y_0), \ldots, f'_{kx}(x_0, y_0)),$$
$$F'_y(x_0, y_0) = (f'_{1y}(x_0, y_0), f'_{2y}(x_0, y_0), \ldots, f'_{ky}(x_0, y_0)),$$
$$H^* = \{(0, y^*) :\ y^* \in \mathrm{Lin}\, \partial_C g(x_0)\}.$$

Так как по предположению теоремы для каждого $y^* \in \mathrm{Lin}\, \partial_C g(x_0)$, $y^* \neq 0$, система векторов $\{f'_{iy}(x_0, y_0),\ i \in I^0\} \cup \{y^*\}$ линейно независима, то

$$(C_{M_1}(x_0, y_0))^* \cap H^* = \{0\}.$$

Значит, конус $K_{\mathrm{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром множества $\mathrm{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0). Теперь покажем, что

$$H \subseteq C_{M_2}(x_0, y_0).$$

По теореме 2.4.7 из [9, с. 58] выпуклые конусы

$$K_1 := \{\overline{y} :\ g'_C(y_0, \overline{y}) \leqslant 0\}, \quad K_2 := \{\overline{y} :\ g'_C(y_0, -\overline{y}) \leqslant 0\}$$

являются конусами касательных направлений в смысле Кларка множеств $A_1 = \{y \in \mathbb{R}^m :\ g(y) \leqslant 0\}$ и $A_2 = \{y \in \mathbb{R}^m :\ g(y) \geqslant 0\}$ соответственно. Проверим условие теоремы 1:

$$K_1 - K_2 = \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow K_1^* \cap (-K_2)^* = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{con}\, \partial_C g(x_0) \cap (-\,\mathrm{con}\, \partial_C g(x_0)) = \{0\}.$$

Это условие выполняется очевидным образом, поскольку $0 \notin \partial_C g(x_0)$. Следовательно, по теореме 1 $K_1 \cap K_2 \subseteq C_{A_1 \cap A_2}(y_0)$. Отсюда немедленно следует, что $H \subseteq C_{M_2}(x_0, y_0)$. Так как $C_{M_1} - H = \mathbb{R}^{n+m}$, то

$$C_{M_1}(x_0, y_0) \cap H \subseteq C_{M_1 \cap M_2}(x_0, y_0) = C_{\mathrm{graf}(a)}(x_0, y_0).$$

Далее, пусть $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_p^*$ — система векторов, принадлежащих $\partial_C g(x_0)$ и образующих базис в подпространстве $\mathrm{Lin}\, \partial_C g(x_0)$. Поскольку по предположению система векторов $\{F'_y(x_0, y_0), y_1^*, y_2^*, \ldots, y_p^*\}$ линейно независима, то система уравнений

$$F'_y(x_0, y_0)\, \overline{y} = -F'_x(x_0, y_0)\, \overline{x}, \quad \langle y_i^*, \overline{y}\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

имеет решение $\overline{y} = P\overline{x}$, где $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — некоторый линейный оператор. Таким образом, доказано, что для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ существует вектор $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in C_{\mathrm{graf}(a)}(x_0, y_0),$$

и существует такой линейный непрерывный оператор $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что

$$(\overline{x}, P\overline{x}) \in C_{M_1} \cap C_{M_2} \quad (\forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Значит, по теореме 2 из [5, с. 418] многозначное отображение a псевдолипшицево в точке z_0. Так как конус $K_{\mathrm{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром графика отображения a в точке (x_0, y_0), то существует такое отображение $r(\overline{z}) := r(\overline{x}, \overline{y}) = (r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y})) = o(\overline{z})$, определенное в некоторой окрестности нуля U, что

$$z_0 + \overline{z} + r(\overline{z}) \in \mathrm{graf}(a), \quad \overline{z} \in K_{\mathrm{graf}(a)}(z_0) \cap U,$$

т. е.

$$y_0 + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \in a(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})) \quad (\forall\, (\overline{x}, \overline{y}) \in K_{\mathrm{graf}(a)}(x_0, y_0) \cap U).$$

Вместо $\overline{y}$ подставим $P(\overline{x})$. Для достаточно малых $\overline{x}$ получим

$$y_0 + P(\overline{x}) + r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) \in a(x_0 + \overline{x} + r_1(\overline{x}, P(\overline{x}))). \tag{3.1}$$

Так как a является псевдолипшицевым в точке (x_0, y_0), то из (3.1) следует, что найдутся такие константа $L > 0$ и окрестность нуля $\overline{V}$, что

$$y_0 + P(\overline{x}) + r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) \in a(x_0 + \overline{x}) + L\|r_1(\overline{x}, P(\overline{x}))\| B_1(0) \quad (\forall\, \overline{x} \in \overline{V}). \tag{3.2}$$

Поскольку $r_1(\overline{x}, P(\overline{x})) = o(\overline{x})$ и $r_2(\overline{x}, P(\overline{x})) = o(\overline{x})$, то из (3.2) следует, что существует такое отображение $r_3(\overline{x}) = o(\overline{x})$, что

$$y_0 + P(\overline{x}) + r_3(\overline{x}) \in a(x_0 + \overline{x}) \quad (\forall\, \overline{x} \in \overline{V}).$$

Таким образом, если $V = x_0 + \overline{V}$, то положим

$$y(x) := y_0 + P(x - x_0) + r_3(x - x_0) \quad (\forall\, x \in V).$$

Легко заметить, что отображение y удовлетворяет всем требованиям теоремы. $\triangleright$

Литература

1. *Аваков Е. П., Магарил-Ильяев Г. Г.* Теорема о неявной функции для включений // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 6.—С. 813–818. DOI: 10.4213/mzm9383.
2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.
3. *Арютунов А. В.* Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2006.—Т. 46, № 2.—С. 205–215.
4. *Гельман Б. Д.* Обобщенная теорема о неявном отображении // Функцион. анализ и его прил.—2001.—Т. 35, вып. 3.—С. 28–35.
5. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.
6. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.—446 с.
7. *Болтянский В. Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, № 3.—С. 3–55.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1976.—542 с.
9. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.—М.: Мир, 1988.—280 с.

10. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения—М.: Физматлит, 2014.—608 с.
11. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.
12. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Теорема о неявной функции для липшицевых отображений // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 1.—С. 221–222.
13. *Clarke F. H.* On the inverse function theorem // Pacific J. of Math.—1976.—Vol. 64, № 1.—С. 97–102.
14. *Michael E.* Continuous selections 1 // Ann. Math.—1956.—№ 63.—С. 361–381.
15. *Хачатрян Р. А.* О многозначных отображениях со звездными графиками // Изв. НАН Армении. Математика.—2012.—Т. 47, № 1.—С. 51–78.
16. *Хачатрян Р. А.* О пересечении шатров в бесконечномерных пространствах // Изв. НАН Армении. Математика.—2001.—Т. 36, № 2.—С. 64–71.
17. *Хачатрян Р. А.* О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений // Изв. НАН Армении. Математика.—2002.—Т. 37, № 2.—С. 65–76.

Статья поступила 25 марта 2016 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич
Ереванский государственный университет,
доцент каф. численного анализа и мат. моделирования
АРМЕНИЯ, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: `khachatryan.rafik@gmail.com`

AN IMPLICIT FUNCTION THEOREM IN NON-SMOOTH CASE

Khachatryan R. A.

In this paper, we consider an equation of the form $F(x,y)=0$, $x\in X$, $y\in M$, where M is a set. By the method of tents (tangent cones), when the set M is given by a nonsmooth restriction of equality type, the existence of a differentiable function $y(\cdot)$ such that $F(x,y(x))=0$, $y(x)\in M$, $y(x_0)=y_0$ is proved. In particular, the existence of smooth local selections for multivalued mappings of the form $a(x)=\{y\in\mathbb{R}^m : f_i(x,y)=0,\ i\in I,\ g(y)=0\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, is studied by the method of tents. It is assumed that the functions $f_i(x,y)$, $i\in I$, are strictly differentiable, and the function $g(y)$ is locally Lipschitzian. Under certain additional conditions it is proved that through any point of the graph of a set-valued mapping there passes a differentiable selection of this mapping. These assertion can be interpreted as an implicit function theorem in the nonsmooth analysis. Strongly differentiable tents for the sets defined by nonsmooth constraints of the equality type are also constructed in the article. A sufficient condition is provided for the intersection of strictly differentiable tents to be a strictly differentiable tent. It is also shown that the Clark tangent cones are Boltiansky tents for sets defined by locally Lipschitz functions.

Key words: set-valued mapping, subdifferential, tent, tangent cone.

References

1. *Avakov E. R., Magaril-Il'yaev G. G.* An imlicit-function theorem for inclusion, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 5–6, pp. 764–769. DOI: 10.1134/S0001434612050227.
2. *Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. Optimalnoe upravleniye* [*Optimal Control*], Moscow, Nauka, 1979, 408 p. (in Russian).
3. *Arutyunov A. V.* Implicit functiont theorem without a priori assumptions about normality, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 2, pp. 195–205. DOI: 10.1134/S0965542506020023.
4. *Gel'man B. D.* A Generalized Implicit Function Theorem, *Functional Analysis and its Applications*, 2001, vol. 35, no. 3, pp. 183–188. DOI: 10.1023/A:1012322727547.
5. *Aubin J. P., Ekland I. Applied Nonlinear Analysis*, Courier Corporation, 2006, 518 p.
6. *Boltyanskii V. G. Optimalnoe upravleniye diskretnimi sistemami* [*Optimal Control of Discrete Systems*], Moscow, Nauka, 1973, 446 p. (in Russian).

7. *Boltyanskii V. G.* The method of tents in the theory of extremal problems, *Russian Mathematical Surveys*, 1975, vol. 30, no. 3, pp. 1–54. DOI: 10.1070/RM1975v030n03ABEH001411.
8. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis.* Graylok Press, 1965, 257 p.
9. *Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis.* New York, Awiley-Intercience Publication John Wiley & Sons, 1983, 296 p.
10. *Polovinkin E. S. Mnogoznachnij analiz i differencialnye wklucheniya* [*Multivalued Analysis and Differential Inclusions*], Moscow, Fizmatlit, 2014, 606 p. (in Russian).
11. *Pshenichnii B. N. Wipuklij analiz i ekstremalniye zadachi* [*Convex Analysis and Extremal Problems*], Moscow, Nauka, 1980, 320 p. (in Russian).
12. *Magaril-Il'yaev G. G.* The implicit function theorem for Lipschitz maps, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 1, pp. 209–210. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH002249.
13. *Clarke F. H.* On the inverse fuction theorem, *Pacific Journal of Mathematics*, 1976, vol. 64, no. 1, pp. 97–102.
14. *Michael E.* Continous selections 1, *Ann. Math.*, 1956, vol. 64, no. 1, pp. 361–381.
15. *Khachatryan R. A.* On set-valued mappings with starlike graphs, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 28–44.
16. *Khachatryan R. A., Arutyan F. G.* Intersection of tents in infinite dimensional spaces, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 27–34.
17. *Khachatryan R. A.* On the existence of continous and smooth selections for multivalued mappings, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2002, vol. 37, no. 2, pp. 30–40.

Received March 25, 2016

Khachatryan Rafik A.
Departement of Informatics and Applied
Mathematics Yerevan State University,
1 A. Manukyan st., Yerevan, 0025, Armenia
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com