Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 70–82

УДК 517.958+517.968.4
DOI 10.46698/o2774-2458-4152-d

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ#

Х. А. Хачатрян[1,2], А. С. Петросян[1,3]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;
[2] Институт математики НАН Республики Армения,
Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/5;
[3] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, Теряна, 74

E-mail: `Khach82@rambler.ru`, `Haykuhi25@mail.ru`

Аннотация. Работа посвящена изучению и решению одной граничной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка на положительной полупрямой с некомпактным интегральным оператором Гаммерштейна. Указанная задача возникает в кинетической теории плазмы. В частности, соответствующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением описывается задача стационарного распределения электронов в полубесконечной плазме при наличии внешнего потенциального электрического поля. Данная граничная задача выводится из нелинейного модельного уравнения Больцмана, где роль неизвестной функции играет первая координата электрического поля. В зависимости от значений физического параметра, входящего в уравнение, в работе доказываются конструктивные теоремы существования однопараметрических семейств положительных решений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$. Исследуется также асимптотическое поведение построенных решений на бесконечности. Доказательства указанных утверждений основаны на построении однопараметрического семейства конусных отрезков, которые соответствующий нелинейный монотонный оператор сверточного типа оставляет инвариантным. Далее, используя некоторые априорные оценки представляющие самостоятельный интерес, а также результаты из теории линейных консервативных однородных интегральных уравнений Винера — Хопфа, осуществляется изучение асимптотических свойств полученных решений. В конце статьи приводятся важные приложения и конкретные примеры.

Ключевые слова: монотонность, граничная задача, ядро, нелинейность, последовательные приближения.

Mathematical Subject Classification (2010): 45J05, 45G10.

Образец цитирования: *Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О положительных решениях граничной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения на полубесконечном интервале // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 70–82. DOI: 10.46698/o2774-2458-4152-d.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований, проект № 19-11-00223.

1. Введение

Рассмотрим следующую граничную задачу для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dE}{d\tau} + \mu \int\limits_0^\infty K(\tau - t) h(t, E(t))\, dt = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), & (1) \\ E(+\infty) := \lim\limits_{\tau \to +\infty} E(\tau) = 0 & (2) \end{cases}$$

относительно искомой функции $E(\tau)$. Решение интегро-дифференциального уравнения (1) мы будем искать в следующем пространстве Соболева:

$$W_1^1(\mathbb{R}^+) := \{\varphi : \varphi^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}^+),\ k = 0, 1\},$$

где через $\varphi^{(k)}$ обозначена k-ая производная функции φ.

В уравнении (1) μ — положительный числовой параметр, а ядро K и нелинейность h удовлетворяют определенным условиям (см. ниже в формулировках основных теорем). Задача (1)–(2) возникает в кинетической теории плазмы (см. [1–3] и ссылки в них). В частности, задача (1)–(2) выводится из стационарного уравнения Больцмана и описывает стационарное распределение электронов в полубесконечной плазме, ограниченной плоскостью $x = 0$, при наличии чисто потенциального внешнего электрического поля. В уравнении (1) роль неизвестной функции $E(x)$ играет первая координата электрического поля $\vec{E}(x) = (E(x), 0, 0)$. Отметим, что задача (1)–(2) в линейном приближении достаточно подробно была исследована в работе [3]. В случае когда ядро K является вполне монотонной функцией и допускает определенное представление в виде суперпозиции экспонент при различных ограничениях на нелинейность h, задача (1)–(2) изучена в работах [4, 5].

В настоящей работе, при более слабых ограничениях на h и для общих консервативных ядер K, мы займемся построением однопараметрических семейств положительных решений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$. Будет изучено также асимптотическое поведение построенных решений в бесконечности в зависимости от значения свободного параметра μ.

В конце будут приведены частные примеры ядра K и нелинейности h, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

2. Обозначения, вспомогательные факты и формулировка основных результатов

Пусть ядро K в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям:

I) $K(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1$, где $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$,

II) существует число $a > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, a)$

$$e^{\alpha x} \int\limits_x^\infty K(t) dt \in L_1(\mathbb{R}),$$

III) характеристическое уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)(\alpha t - 1) e^{\alpha t} dt = 0 \qquad (3)$$

на интервале $(0, a)$ имеет единственное решение, причем считается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{\alpha t} K(t) dt < +\infty.$$

Рассмотрим следующее семейство функций $\{T_\alpha(x)\}_{\alpha \in (0,a)}$:

$$T_\alpha(x) := \mu e^{\alpha x} \int_{x}^{\infty} K(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0, a).$$

Из условия II) сразу следует, что $T_\alpha \in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, a)$.

Постараемся число $\alpha \in (0, a)$ выбрать так, чтобы

$$\|T_\alpha\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |T_\alpha(x)|\, dx = 1.$$

В силу условия I) будем иметь

$$\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} \int_{x}^{\infty} K(t)\, dt\, dx = 1. \tag{4}$$

Используя теорему Фубини [6] с учетом I) и II) из (4), получим

$$\frac{\mu}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha t}\, dt = 1, \quad \alpha \in (0, a). \tag{5}$$

Итак, для каждого параметра $\mu > 0$ мы должны найти число $\alpha \in (0, a)$ такое, что имело бы место соотношение (5).

С этой целью рассмотрим функцию

$$\mu(\alpha) = \frac{\alpha}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha t} dt}, \quad \alpha \in (0, a). \tag{6}$$

Заметим, что

$$\mu(+0) := \lim_{\alpha \to 0^+} \mu(\alpha) = 0$$

и

$$\mu \uparrow \text{ на } (0, \alpha_0] \text{ и } \mu \downarrow \text{ на } [\alpha_0, a),$$

где α_0 является единственным решением характеристического уравнения (3). Наибольшее значение функции $\mu(\alpha)$ равно $\frac{\alpha_0}{\int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{\alpha_0 t} dt} := \mu_0$. Итак, для $\alpha \in (0, a)$ имеет место

$$0 < \mu(\alpha) \leqslant \mu_0. \tag{7}$$

Обозначим через $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$ обратную функцию к функции $\mu(\alpha)$ на интервале $(0, \alpha_0)$ и через $\alpha_2 = \alpha_2(\mu)$ — обратную функцию к функции $\mu(\alpha)$ на интервале (α_0, a).

Зафиксируем числа $\alpha_1(\mu)$, α_0 и $\alpha_2(\mu)$ и относительно функции h предположим выполнение следующих условий:

1) при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ функция $h(t,u)$ монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$,

2) функция $h(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т. е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $h(t,u)$ измерима по t и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на $\mathbb{R}^+$,

3) существует измеримая и неотрицательная функция $\beta(t)$, определенная на $\mathbb{R}^+$, такая, что

$$\beta^*(t) := \beta(t)e^{\alpha_0 t} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+), \quad m_1(\beta^*) := \int\limits_0^\infty t\beta^*(t)\,dt < +\infty,$$

и функция h, удовлетворяющая следующему двойному неравенству:

$$u \leqslant h(t,u) \leqslant u + \beta(t), \quad u \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Теперь мы готовы сформулировать основные результаты настоящей работы.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть ядро K и нелинейность h удовлетворяют условиям* I)–III) *и* 1)–3) *соответственно. Тогда, при $\mu \in (0,\mu_0)$ задача* (1)–(2) *в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{E_\gamma(x)\}_{\gamma\in(0,+\infty)}$, причем для любого значения параметра $\gamma \in (0,+\infty)$ имеет место следующее асимптотическое разложение для решения $E_\gamma(x)$:*

$$E_\gamma(x)e^{\alpha_1(\mu)x} = \gamma + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 2. *При условиях* I)–III), 1)–3), *если $\mu = \mu_0$, задача* (1)–(2) *в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ обладает также однопараметрическим семейством положительных решений $\{\tilde{E}_\gamma(x)\}_{\gamma\in(0,+\infty)}$, причем для любого $\gamma \in (0,+\infty)$*

$$\tilde{E}_\gamma(x)e^{\alpha_0 x} = \gamma x + o(x), \quad x \to +\infty.$$

Замечание 1. Следует отметить, что в случае когда $\mu > \mu_0$, вопрос существования положительных решений в пространстве $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ для граничной задачи (1)–(2) до сих пор остается открытым.

3. Доказательство основных результатов

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие линейные однородные и неоднородные интегральные уравнения Винера — Хопфа:

$$S(x) = \int\limits_0^\infty T_\alpha(x-t)S(t)\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty T_\alpha(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{10}$$

относительно искомых функций S и φ соответственно, где $g(x)$ — неотрицательная ограниченная и суммируемая функция на $[0,+\infty)$, причем

$$m_1(g) := \int\limits_0^\infty x g(x)\,dx < +\infty. \tag{11}$$

Следуя обозначениям работы [7] через $\nu(T_\alpha)$ обозначим первый момент ядра T_α :

$$\nu(T_\alpha) := \int\limits_{-\infty}^\infty x T_\alpha(x)\,dx.$$

Ниже убедимся, что

$$\nu(T_{\alpha_1(\mu)}) < 0, \tag{12}$$

$$\nu(T_{\alpha_0}) = 0, \tag{13}$$

$$\nu(T_{\alpha_2(\mu)}) > 0. \tag{14}$$

Действительно, из представления ядра $T_\alpha(x)$ в силу теоремы Фубини будем иметь

$$\nu(T_\alpha) = \mu \int\limits_{-\infty}^\infty x e^{\alpha x} \int\limits_x^\infty K(t)\,dt\,dx = \mu \int\limits_{-\infty}^\infty K(t) \int\limits_{-\infty}^t x e^{\alpha x}\,dx\,dt = \frac{\mu}{\alpha^2} \int\limits_{-\infty}^\infty K(t)(\alpha t - 1)e^{\alpha t}\,dt. \tag{15}$$

С другой стороны, из (6) следует, что

$$\mu'(\alpha) = \frac{\int\limits_{-\infty}^\infty K(t)(1-\alpha t)e^{\alpha t}\,dt}{\left(\int\limits_{-\infty}^\infty K(t)e^{\alpha t}\,dt\right)^2}, \qquad \alpha \in (0,a). \tag{16}$$

Так как $\mu'(\alpha_1) > 0$, $\mu'(\alpha_0) = 0$, $\mu'(\alpha_2) < 0$ (см. § 2), то из (15) сразу следует соотношения (12)–(14).

Из результатов работы [7], с учетом соотношений (12)–(13), немедленно следует, что

A) при $\alpha = \alpha_1(\mu)$ уравнение (9) обладает положительным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $S^*(x)$, а уравнение (10) суммируемым неотрицательным и ограниченным решением $\varphi^*(x)$;

B) при $\alpha = \alpha_0$ уравнение (9) обладает положительным монотонно возрастающим непрерывным и неограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\tilde{S}(x)$, причем $\tilde{S}(x)$ имеет линейный рост $\tilde{S}(x) = x + o(x)$, при $x \to +\infty$, а уравнение (10) — ограниченным и неотрицательным решением $\tilde{\varphi}(x)$.

Рассмотрим теперь следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна на полуоси:

$$F(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t} h(t, e^{-\alpha_1 t}F(t))\,dt, \quad x \geqslant 0, \tag{17}$$

относительно искомой функции $F(x)$, где

$$T_{\alpha_1}(z) = \mu e^{\alpha_1(\mu) z} \int\limits_z^\infty K(t)\,dt, \quad z \in \mathbb{R},\ \alpha_1 = \alpha_1(\mu). \tag{18}$$

Для уравнения (17) введем следующее семейство последовательных приближений:

$$\begin{gathered} F_{n+1}^\gamma(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} h(t, e^{-\alpha_1 t} F_n^\gamma(t))\,dt, \quad x \geqslant 0, \\ F_0^\gamma(x) = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad \gamma > 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Индукцией по n сперва докажем, что при каждом $\gamma > 0$

$$F_n^\gamma(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{20}$$

Действительно, учитывая условие 3), положительность ядра K, а также утверждение A), из (19) получим

$$\begin{aligned} F_1^\gamma(x) &= \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1 t} h\left(t, e^{-\alpha_1 t} \frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}\right) dt \\ &\geqslant \frac{\gamma}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) S^*(t)\,dt = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} = F_0^\gamma(x). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $F_n^\gamma(x) \geqslant F_{n-1}^\gamma(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом монотонности функции $h(t,u)$ (по u) и положительности ядра K из (19) будем иметь

$$F_{n+1}^\gamma(x) \geqslant \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} h\big(t, e^{-\alpha_1 t} F_{n-1}^\gamma(t)\big)\,dt = F_n^\gamma(x), \quad x \geqslant 0,\ \gamma > 0.$$

Теперь рассмотрим линейное неоднородное уравнение (10), в случае когда $\alpha = \alpha_1(\mu)$ и

$$g(x) = \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1 t} \beta(t)\,dt, \quad x \geqslant 0. \tag{21}$$

Очевидно, что $g(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Убедимся теперь, что

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty. \tag{22}$$

Учитывая условие (4) и 3) из (21) для произвольного $r > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int\limits_0^r g(x)\,dx &= \int\limits_0^r \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\, e^{\alpha_1 t} \beta(t)\,dt\,dx \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) \beta^*(t)\,dt\,dx \\ &= \int\limits_0^\infty \beta^*(t) \int\limits_0^r T_{\alpha_1}(x-t)\,dx\,dt \leqslant \int\limits_0^\infty \beta^*(t)\,dt < +\infty, \end{aligned}$$

$$\int_0^r xg(x)dx \leqslant \int_0^r x \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\beta^*(t)\,dt\,dx = \int_0^\infty \beta^*(t)\int_0^r T_{\alpha_1}(x-t)x\,dx\,dt$$

$$= \int_0^\infty \beta^*(t)\int_{-t}^{r-t} T_{\alpha_1}(y)(t+y)\,dy\,dt \leqslant \int_0^\infty t\beta^*(t)\,dt + \int_0^\infty \beta^*(t)\,dt \int_{-\infty}^\infty |y|T_{\alpha_1}(y)\,dy < +\infty,$$

ибо

$$\int_{-\infty}^\infty |y|T_{\alpha_1}(y)\,dy = \mu\int_{-\infty}^\infty |y|e^{\alpha_1 y}\int_y^\infty K(t)\,dt\,dy = \mu\int_{-\infty}^\infty K(t)\int_{-\infty}^t |y|e^{\alpha_1 y}\,dy\,dt < +\infty$$

(в силу того, что $\int_{-\infty}^\infty |t|e^{\alpha_1 t}K(t)\,dt < +\infty$). Устремляя $r\to+\infty$, в последнем неравенстве приходим к следующим утверждениям:

$$g\in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty.$$

Ограниченность функции g на $\mathbb{R}^+$ следует из оценки

$$g(x) \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\beta^*(t)\int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\,dt \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\beta^*(t) < +\infty.$$

Теперь индукцией докажем, что

$$F_n^\gamma(x) \leqslant \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x), \quad x\geqslant 0,\ \gamma>0,\ n=0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

где φ^* является решением уравнения (10), в случае когда $\alpha=\alpha_1(\mu)$, а $g(x)$ допускает представление (21).

При $n=0$ неравенство (23) сразу следует из определения нулевого приближения и из неотрицательности функции $\varphi^*(x)$. Предположим, что (23) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая условие 3), структуру (21) свободного члена g и положительность ядра T_{α_1}, из (19) будем иметь

$$F_{n+1}^\gamma(x) \leqslant \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}h\left(t, e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(t)\right)\right)\,dt$$

$$\leqslant \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}\left(e^{-\alpha_1 t}\left(\frac{\gamma S^*(t)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(t)\right) + \beta(t)\right)\,dt$$

$$= \frac{\gamma}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)}\int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)S^*(t)\,dt + \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\varphi^*(t)\,dt + \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)e^{\alpha_1 t}\beta(t)\,dt$$

$$= \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \int_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t)\varphi^*(t)\,dt + g(x) = \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x).$$

Индукцией по n легко можно убедиться, что при всяком $\gamma>0$

$$F_n^\gamma \in C(\mathbb{R}^+), \quad n=0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Действительно, непрерывность нулевого приближения сразу следует из непрерывности функции $S^*(x)$ (см. утверждение A)). Если предполагать, что $F_n^\gamma(x)$ непрерывна по x при некотором $n \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}^+$, то в силу непрерывности ядерной функции $T_{\alpha_1}(x)$ на $\mathbb{R}$, свойств функции $\beta(t)$ (см. условие 3)) и неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, из (19) следует непрерывность функции $F_{n+1}^\gamma(x)$ на $\mathbb{R}^+$.

Таким образом, в силу (20) и (23) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{F_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ при каждом фиксированном $\gamma > 0$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x),$$

причем предельная функция удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$\frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} \leqslant F^\gamma(x) \leqslant \frac{\gamma S^*(x)}{\sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)} + \varphi^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,\ \gamma > 0. \tag{25}$$

Из непрерывности ядра T_{α_1} на $\mathbb{R}$, свойств функции $\beta(t)$ (см. условие 3)), неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, и оценки (25) сразу следует, что $F^\gamma \in C(\mathbb{R}^+)$ при всяком $\gamma > 0$. Из условия 2) в силу теоремы Б. Леви [6] следует, что при каждом $\gamma > 0$ функция $F^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (17).

Заметим теперь, что тогда функции вида

$$E_\gamma(x) := e^{-\alpha_1(\mu)x} F^\gamma(x), \quad \gamma > 0, \tag{26}$$

являются решениями уравнения

$$E(x) = \mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, E(t))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{27}$$

где

$$T(z) := \int\limits_z^\infty K(t) dt, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Действительно, в силу непрерывности ядра K из (27) и (17) имеем

$$\mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, E_\gamma(t))\, dt = \mu \int\limits_0^\infty T(x-t) h(t, e^{-\alpha_1(\mu)t} F^\gamma(t))\, dt$$

$$= e^{-\alpha_1(\mu)x} \int\limits_0^\infty T_{\alpha_1}(x-t) e^{\alpha_1(\mu)t} h(t, e^{-\alpha_1(\mu)t} F^\gamma(t))\, dt = e^{-\alpha_1(\mu)x} F^\gamma(x) = E_\gamma(x), \quad \gamma > 0.$$

Так как $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, то из (28) следует, что существует

$$T'(x) = -K(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}).$$

С другой стороны, в силу неравенства $h(t,u) \leqslant u + \beta(t)$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, и условия 1) имеем

$$\mu \int\limits_0^\infty \left|T'(x-t)\right| h(t, E_\gamma(t))\, dt \leqslant \mu \int\limits_0^\infty K(x-t)(E_\gamma(t) + \beta(t))\, dt$$

$$\leqslant \mu \int\limits_0^\infty K(x-t)\, e^{-\alpha_1 t} F^\gamma(t)\, dt + \mu \sup_{t\geqslant 0} \beta(t) \leqslant \mu(\sup_{x\geqslant 0} F^\gamma(x) + \sup_{x\geqslant 0} \beta(x)) < +\infty,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |T'(x-t)|h(t,E_\gamma(t))dtdx \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty K(x-t)(e^{-\alpha_1 t}F^\gamma(t)+\beta(t))\,dt\,dx$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-\alpha_1 t}F^\gamma(t)\int_{-\infty}^\infty K(y)dydt + \int_0^\infty \beta(t)\int_0^\infty K(x-t)\,dx\,dt \leqslant \frac{\sup\limits_{x\geqslant 0} F^\gamma(x)}{\alpha_1} + \int_0^\infty \beta(t)\,dt < +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме о дифференцировании под знаком интеграла (см. [8]), можем утверждать, что функции $E_\gamma \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$, $\gamma > 0$, и удовлетворяют граничной задаче (1)–(2).

Заметим теперь, что задаваемая посредством формулы (21) функция $g(x)$ обладает также следующим свойством:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0. \tag{29}$$

Действительно, так как $\beta^* \in L_1(\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+)$, а $T_{\alpha_1} \in L_1(\mathbb{R})\cap C_M(\mathbb{R})$, из [9, лемма 5] следует, что $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Используя [9, лемма 5], соотношение (29) и тот факт, что $\varphi^* \in L_1(\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+)$, из (10) (при $\alpha = \alpha_1(\mu)$) получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi^*(x) = 0. \tag{30}$$

Учитывая (29), (30), (25) и тот факт, что $S^*(x) \uparrow \sup\limits_{x\geqslant 0} S^*(x)$, когда $x \to +\infty$, можем утверждать, что $E_\gamma(x)e^{\alpha_1 x} = \gamma + o(1)$, когда $x\to+\infty$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся результаты пункта B) для уравнений (9) и (10) при $\alpha = \alpha_0$. Доказательство осуществляется аналогичными рассуждениями с единственным исключением: вместо вспомогательного уравнения (17) рассматривается нелинейное интегральное уравнение вида

$$F(x) = \int_0^\infty T_{\alpha_0}(x-t)e^{\alpha_0 t}h(t, e^{-\alpha_0 t}F(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{31}$$

и вместо последовательных приближений (19) здесь берутся следующие итерации:

$$F_{n+1}^\gamma(x) = \int_0^\infty T_{\alpha_0}(x-t)e^{\alpha_0 t}h(t, e^{-\alpha_0 t}F_n^\gamma(t))dt, \quad x\in\mathbb{R}^+$$

$$F_0^\gamma(x) = \gamma\tilde{S}(x), \quad n = 0,1,2,\dots,\ \gamma > 0,$$

где $\tilde{S}(x)$ является решением однородного линейного интегрального уравнения (9) при $\alpha = \alpha_0$ (см. утверждение B)). $\rhd$

Замечание 2. Рассмотрим следующий частный пример: $K(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$. Тогда характеристическое уравнение (3) принимает вид:

$$3\alpha^2 - 1 = 0, \quad \alpha \in (0,1)$$

($\alpha \in (0,1)$ для выполнения условии II)).

В данном случае $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$, а функция $\mu(\alpha)$ допускает следующее представление

$$\mu(\alpha) = \alpha(1-\alpha^2), \quad \alpha\in(0,1).$$

Заметим, что $\mu\uparrow$ на $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\mu\downarrow$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$, причем $\mu_0=\mu(\alpha_0)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

В этом случае первый момент ядра T_α допускает следующее преставление:

$$\nu(T_\alpha)=\frac{\mu(3\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2},$$

где

$$T_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{\mu}{2}e^{-(1-\alpha)x}, & x\geqslant 0,\\ \frac{\mu}{2}e^{\alpha x}(1-e^x)+\frac{\mu}{2}e^{\alpha x}, & x<0.\end{cases}$$

Ниже, в частном случае, когда

$$K(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad x\in\mathbb{R},\ h(t,u)\equiv u,$$

приведем явный вид решения граничной задачи (1)–(2).

Громоздкие, но простые вычисления показывают, что при $\mu=\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$$E(x)=c_1xe^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x}+c_2e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x},\quad x\in\mathbb{R}^+,$$

а при $\mu<\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ решение задачи (1)–(2) допускает следующее представление

$$E(x)=c_1e^{-\frac{\left(A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}\right)x}{2}}+c_2e^{\frac{-A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2}x},$$

где

$$A=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\right).$$

Следует отметить, что при $\mu>\mu_0$ мы получаем знакопеременные решения, которые не имеют физического смысла.

Заметим, что в случае $\mu\in\left(0,\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ полученные функции удовлетворяют граничной задаче (1)–(2), если $c_1=-\frac{1-\alpha_2(\mu)}{1-\alpha_1(\mu)}c_2$, где

$$\alpha_1(\mu)=\frac{A-\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2},\quad \alpha_2(\mu)=\frac{A+\sqrt{A^2-\frac{4\mu}{A}}}{2}.$$

В том случае, когда $\mu=\mu_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, константы c_1 и c_2 должны удовлетворять соотношению $c_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}c_1$.

Следовательно, в данном случае однопараметрическим семейством положительных и ограниченных решений служат функции:

a) при $\mu\in\left(0,\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$,

$$E_\gamma(x)=\gamma\left(e^{-\alpha_1(\mu)x}-\frac{1-\alpha_2(\mu)}{1-\alpha_1(\mu)}e^{-\alpha_2(\mu)x}\right),\quad x\in\mathbb{R}^+,\ \gamma>0,$$

b) при $\mu=\frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$$E_\gamma(x)=\gamma e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right),\quad \gamma>0,\ x\in\mathbb{R}^+$$

Заметим также, что в этом случае, когда $\mu \to +0$, число $A \to 1$, а решение $E_\mu(x)$, при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$, стремится к γ, ибо $\alpha_1(+0) = 0$, $\alpha_2(+0) = 1$.

4. Примеры ядра K и нелинейности h

В приложениях часто встречаются следующие ядерные функции K [1–3]:

I) $K(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$,

II) $K(x) = \int\limits_1^\infty e^{-|x|s} \frac{1}{s^2}\, ds$, $x \in \mathbb{R}$,

III) $K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Легко можно убедиться, что для выше приведенных ядерных функций K выполняются все условия доказанных теорем. Подробно остановимся на функции III). В этом случае функция $\mu(\alpha)$ допускает следующее представление:

$$\mu(\alpha) = \alpha e^{-a\alpha^2}, \quad \alpha > 0,$$

и ее точка максимума $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Кроме того, $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2ae}}$ и $\alpha_1 = \alpha_1(\mu)$ является обратной функцией функции $\mu(\alpha)$ на интервале $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$.

Приведем также несколько примеров нелинейности $h(t,u)$ и функции $\beta(t)$:

a) $h(t,u) = \sqrt{u(u+\beta(t))}$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

b) $h(t,u) = u + \frac{u\beta(t)}{u+1}$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

c) $h(t,u) = u\sqrt{1 + \frac{\beta(t)}{u+c}}$, $c > 0$, $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$,

ε_1) $\beta(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}^+$,

ε_2) $\beta(t) = e^{-(\alpha_0+æ)t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $æ > 0$, — параметр,

ε_3) $\beta(t) = te^{-2\alpha_0 t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Отметим, что для примеров a)–c) выполнение условий 1)–3) можно доказать прямой проверкой.

Литература

1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. М.* Физическая кинетика. Т. 10.—М.: Наука, 1979.—528 с.
2. *Абрикосов А. А.* Основы теории металла.—М.: Наука, 1987.—520 с.
3. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной краевой задачи физической кинетики // Изв. НАН Армении. Математика.—2006.—Т. 41, № 6.—С. 65–74.
4. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости в $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ одного нелинейного интегро-диффренциального уравнения с некомпактным оператором Гаммерштейна — Немыцкого // Алгебра и анализ.—2012.—Т. 24, № 1.—С. 223–247.
5. *Khachatryan Kh. A., Terdjyan T. E. and Petrosyan H. S.* On the solvability of one class of boundary-value problems for non-linear integro-differential equation in kinetic theory of plazma // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.—2013.—Т. 6, № 4.—С. 451–461.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1980.
7. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.—М.: ВИНИТИ, 1984.—Т. 22.—С. 175–244.
8. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды.—М.: Наука, 1965.
9. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 7.—С. 45–62. DOI: 10.4213/sm1483.

Статья поступила 31 марта 2020 г.

Хачатрян Хачатур Агавардович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
основной исполнитель научного проекта №19-11-00223
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;

Институт математики НАН Республики Армения,
Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/5
ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики
E-mail: Khach82@rambler.ru

Петросян Айкануш Самвеловна
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
исполнитель научного проекта №19-11-00223
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1;

Национальный аграрный университет Армении,
доцент кафедры высшей математики и физики
Армения, 0009, Ереван, Теряна, 74
E-mail: Haykuhi25@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 70–82

ON POSITIVE SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ON A SEMI-INFINITE INTERVAL

Khachatryan, Kh. A.[1,2] and Petrosyan, H. S.[1,3]

[1] Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian;
[2] Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5 Marshall Baghramian Ave., Yerevan 375019, Armenia;
[3] Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia
E-mail: Khach82@rambler.ru, Haykuhi25@mail.ru

Abstract. The article is devoted to the study of a boundary value problem for a first order nonlinear integro-differential equation on the positive semi axis with a Hammerstein type noncompact integral operator. Such a problem arises in kinetic theory of plasma. In particular, this nonlinear integro-differential equation describes the problem of stationary distribution of electrons in semi infinite plasma in the presence of an external potential electric field. This boundary value problem can be derived from nonlinear Boltzmann model equation, where the role of unknown function plays the first coordinate of an electric field. Depending on a physical parameter, involved in the equation, some constructive existence theorems of one-parametric family of positive solutions in Sobolev's $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ space are proved. The asymptotic behavior of the constructed solutions at infinity is also investigated. The proofs of the above statements are based on the construction of a one-parametric family of conic segments, which are invariant with respect to a convolution type nonlinear monotone operator. Further, using some a priori estimates, which are of independent interest, as well as some results from linear theory of conservative homogenous Wiener–Hopf integral equations, the asymptotic properties of obtained results are studied. At the end of the article, some important applications and examples are presented.

Key words: monotony, boundary value problem, kernel, nonlinearity, successive approximation.

Mathematical Subject Classification (2010): 45J05, 45G10.

For citation: *Khachatryan, Kh. A. and Petrosyan, H. S.* On Positive Solutions of the Boundary Value Problem for a Nonlinear Integro-Differential Equation on a Semi-Infinite Interval, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 70–82 (in Russian). DOI: 10.46698/o2774-2458-4152-d.

References

1. *Lifshitz, E. M. and Pitaevsky, L. P. Fizicheskaya kinetika* [Statistical Physics], vol. 10, Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
2. *Abrikosov, A. A. Fundamentals of the Theory of Metals*, Elsevier Science Pub., 1988.
3. *Khachatryan, A. Kh. and Khachatryan Kh. A.* On the Solvability of a Boundary Value Problem of Physical Kinetics, *Izvestiya NAN Armenii: Matematika* [Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics], 2006, vol. 41, no. 6, pp. 65–74 (in Russian).
4. *Khachatryan, Kh. A.* On Solvability in $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ of a Nonlinear Integro-Differential Equation with a Noncompact Hammerstein-Nemytskii Operator, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2013, vol. 24, pp. 167–183. DOI: 10.1090/S1061-0022-2012-01235-5.
5. *Khachatryan, Kh. A., Terdjyan, T. E. and Petrosyan, H. S.* On the Solvability of One Class of Boundary-Value Problems for Non-Linear Integro-Differential Equation in Kinetic Theory of Plazma, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics. Physics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 451–461.
6. *Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of Theory of Functions and Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
7. *Arabadzhyan, L. G. and Engibaryan, N. B.* Convolution Equations and Nonlinear Functional Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 1987, vol. 36, pp. 745–791. DOI: 10.1007/BF01085507.
8. *Budak, B. M. and Fomin, S. V. Kratnye integraly i ryady* [Multiple Integrals and Series], Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).
9. *Arabadzhyan, L. G. and Khachatryan, A. S.* A Class of Integral Equations of Convolution Type, *Sbornik: Mathematics*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. DOI: 10.1070/SM2007v198n07ABEH003868.

Received March 31, 2020

Khachatur A. Khachatryan
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian,
Main Performer of a Scientific Project №19-11-00223;

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5 Marshall Baghramian Ave., Yerevan 375019, Armenia
Leading Researcher

E-mail: Khach82@rambler.ru

Haykanush S. Petrosyan
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian,
Performer of a Scientific Project №19-11-00223;

Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia,
Assistant Professor
E-mail: Haykuhi25@mail.ru