予定

- 10:30—11:20 講義
  - 劣モジュラ関数の定義, 最大化問題の分類, 例
- 11:40—12:30 講義
  - 研究の歴史, 基本的な近似技法
- 14:00—15:00 講義
  - 最近の近似技法
- 15:15—16:15 演習
- 16:30—17:30 講義
  - これまでの研究成果の紹介

16:30−17:30の予定

- 近似アルゴリズムに関するこれまでの研究成果
  - 単調劣モジュラ関数最大化の場合
  - 非単調劣モジュラ関数最大化の場合

劣モジュラ関数最大化の近似アルゴリズムに関するこれまでの研究成果

単調劣モジュラ関数の場合

単調劣モジュラ関数最大化：問題の分類

- マトロイド制約
  - 1つの場合
  - 複数の場合
- 費用（ナップサック制約）
  - 1つの場合
  - 複数の場合

1つのマトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $S \in \mathcal{I}$

  $f : 2^N \to \mathbf{R}_+$ **単調劣モジュラ関数**

  $\mathcal{I}$**: 台集合** N **のマトロイドの独立集合族**

近似アルゴリズム:

- 1-1/e 近似(一様マトロイド制約), 1/2 近似(一般のマトロイド制約)
  - Nemhauser, Wolsey, Fisher, Math. Prog. 1978
  - deterministic greedy algo.
- 1-1/e 近似(一般のマトロイド制約)
  - Vondrák, STOC 2008
  - continuous greedy algo.

    \+ pipage rounding (randomized)

1つのマトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $S \in \mathcal{I}$

  $f: 2^N \to \mathbf{R}_+$ 単調劣モジュラ関数

  $\mathcal{I}$: 台集合 N のマトロイドの独立集合族

- 近似の限界: $1 - \dfrac{1}{e} + \epsilon$ は不可能

一様マトロイド制約でも情報理論的に不可能
(Nemhauser & Wolsey, Math. OR 1978)
集合カバー問題でも計算理論的に不可能 (Feige, JACM 1996)

Submodular Welfare 問題

組合せオークション
から生じる問題

- 問題: Maximize $\sum_{i=1}^{m} f_i(S_i)$
  subject to $\{S_1, \ldots, S_m\}$: N の分割
  $f_i : 2^N \to \mathbf{R}_+$ 単調劣モジュラ関数

分割マトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化の特殊ケース

- 近似アルゴリズム: $1 - \frac{1}{e}$ (Vondrák, STOC 2008)
- 近似の限界: $1 - \frac{1}{e} + \epsilon$ は不可能

  計算理論的(Khot et al., WINE2005)
  情報理論的(Mirrokni, Schapira, Vondrák, EC2008)
  いずれも, 全員の関数が同じでも不可能であることを示している

Demand オラクルを使った Submodular Welfare 問題

- 関数値評価オラクルではなく, demandオラクルを使用

given $p \in \mathbf{R}^N$,
compute a maximizer of $f(S) - p(S)$

- 近似アルゴリズム: (1-1/e)よりよい近似が可能！

$1 - \frac{1}{e} + \alpha \ (\alpha \simeq 10^{-5})$ Configuration LP + randomized rounding (Feige &Vondrák, FOCS2006)

- 近似の限界: $\frac{15}{16} = 0.9375$ より良い近似はNP困難

(Chakrabarty & Goel, FOCS2008)

複数のマトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $S \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{I}_i$

  $f : 2^N \to \mathbf{R}_+$ 単調劣モジュラ関数

  $\mathcal{I}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$: 台集合 N のマトロイドの独立集合族

近似不可能性

- k次元マッチング問題
  - 上記の問題の特殊ケース
  - 目的関数は線形, 分割マトロイド制約
  - Ω(log k/k)近似はNP困難(Hazan et al. APPROX 2003)

複数のマトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 近似アルゴリズム (k≧2)

1/(k+1) 近似（一般の場合），1/k 近似（線形関数の場合）
(貪欲アルゴリズム利用，Fisher et al., Math. Prog. Study 1978)

分割マトロイド制約の場合：
1/(k+ε) 近似（一般の場合），1/(k-1+ε) 近似（線形関数の場合）
(局所探索利用，Lee, Mirrokni, Nagarajan, Sviridenko, STOC 2009)

一般のマトロイド制約の場合でも同じ近似比
(局所探索利用，Lee, Sviridenko, Vondrák, APPROX 2009)

30年越しの改善！

1つの費用制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $c(S) \equiv \sum_{i \in S} c(i) \leq B$

$$f : 2^N \to \mathbf{R}_+ \text{ 単調劣モジュラ関数} \qquad c \in \mathbf{R}^n_+,\ B \in \mathbf{R}_+$$

- 近似の限界: $1 - \dfrac{1}{e} + \epsilon$ は不可能

c(i)=1(一様マトロイド制約)でも情報理論的に不可能
(Nemhauser & Wolsey, Math. OR 1978)
集合カバー問題でも計算理論的に不可能 (Feige, JACM 1996)

1つの費用制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $c(S) \equiv \sum_{i \in S} c(i) \leq B$

$$f: 2^N \to \mathbf{R}_+ \text{ 単調劣モジュラ関数} \qquad c \in \mathbf{R}^n_+,\ B \in \mathbf{R}_+$$

近似アルゴリズム:

- $1-e^{-\beta} \fallingdotseq 0.35$近似 ($\beta$: $e^x = 2-x$ の解)
  - Wolsey, Math. OR 1982
  - deterministic greedy algo.
- 1-1/e 近似
  - Sviridenko, ORL 2004
  - partial enumeration + greedy algo. (deterministic)

複数の費用制約下での単調劣モジュラ関数最大化

- 問題: Maximize $f(S)$ subject to $c_i(S) \le B_i$ $(1 \le i \le k)$

$f : 2^N \to \mathbf{R}_+$ 単調劣モジュラ関数　　$c_i \in \mathbf{R}^n_+,\ B_i \in \mathbf{R}_+$

（kは定数と仮定）

近似アルゴリズム:

- 1-1/e - ε 近似
  - Kulik, Shachnai & Tamir, SODA 2009
  - partial enumeration + continuous greedy algo.
    + randomized rounding
- 1-1/e - ε 近似（マトロイド制約1つを追加してもOK）
  - Chekuri, Vondrák & Zenklusen, FOCS 2010
  - partial enumeration + continuous greedy algo.
    + randomized swap rounding

Randomized Swap Rounding

Step 0: 基多面体上のベクトル x を, マトロイドの基 B_i (i=1, 2, …, m) を用いて次のように表現

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{B_i} \ (x \text{ は } \chi_{B_i} \text{ の凸結合})$$

Step 1: m = 1 ならば終了

Step 2: B_{m-1} と B_m から新たな基 B* を作る
（詳細は後で）

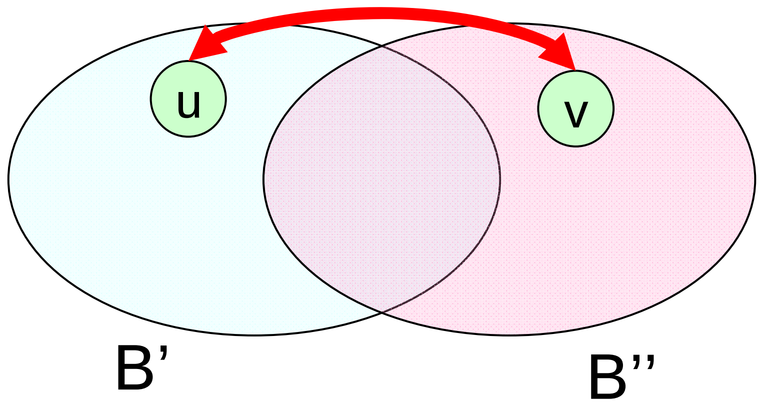
Step 3: B_{m-1} := B*, $\alpha_{m-1} := \alpha_{m-1} + \alpha_m$,
m := m-1 とし, Step 1 へ

Randomized Swap Rounding

2つの基B', B'' から新たな基B*を作る

① u∈B'-B'' を選ぶ

➔ ∃v∈B''-B' s.t. B'-u+v, B''+u-vは共に基



② B', B''の置き換え

B', B''+u-vもしくは

B'-u+v, B''をランダムに選ぶ

（いずれの場合も，共通部分が増える）

単調劣モジュラ関数最大化に関するオープン問題

- 1つのマトロイド制約下の問題に対する deterministic (1-1/e)近似アルゴリズムの構築
  - 劣モ関数の多重線形拡張を使わずに解く必要有り？
- 1つのマトロイド制約下の問題に対し，demandオラクルを用いた場合，近似比の改善は可能か？
  - LP formulation を使わずにどうやって解く?
- 複数のマトロイド制約下の問題に対する近似比の改善
  - 現状：2つのマトロイドで$1/(2+\varepsilon)$近似

劣モジュラ関数最大化の近似アルゴリズムに関するこれまでの研究成果

非単調劣モジュラ関数の場合

非単調劣モジュラ関数最大化：問題の分類

- 制約なし
- マトロイド制約
  - 1つの場合
  - 複数の場合
  - マトロイドの基に関する制約
- 費用（ナップサック制約）
  - 1つの場合
  - 複数の場合

制約なし非単調劣モジュラ関数最大化

近似アルゴリズム

- ランダムセットは1/4近似!（対称劣モの場合:1/2）
- deterministic で1/3近似(対称劣モの場合:1/2)
- randomized で2/5近似
  - 局所探索利用
- 参考:グラフのmax cut
  - 無向グラフ:0.878567 (Goemans & Williamson 1995)
  - 有向グラフ:0.874 (Lewin, Livnat & Zwick 2002)

FOCS2007: Maximizing non-monotone submodular functions, by Uriel Feige, Vahab Mirrokni and Jan Vondrak

制約なし非単調劣モジュラ関数最大化

近似不可能性

- 情報理論的上界：1/2（対称劣モでも同様）

- 計算理論的上界：3/4（対称劣モ：5/6）
  - 関数が「陽に」与えられた場合でも同様

    $g: 2^S \to R$, $S \subseteq N$, $|S|=$定数（$\Rightarrow |2^S|=$定数）

    に対し，$f(X) = g(X \cap S)$

- 参考：グラフのmax cut: 0.878567（unique games conj.の下で）

  (Khot et al., FOCS 2004)

FOCS2007: Maximizing non-monotone submodular functions, by Uriel Feige, Vahab Mirrokni and Jan Vondrak

k個のマトロイド制約下での非単調劣モジュラ関数最大化

- 近似アルゴリズム

一般のマトロイド制約の場合: $\left(\frac{1}{k+2+\frac{1}{k}+\epsilon}\right)$　　対称劣モ: $\left(\frac{1}{k+2+\epsilon}\right)$

k＝1のとき，1/(4＋ε)（対称劣モ:1/(3＋ε)）

分割マトロイド制約の場合(k≧2): $\left(\frac{1}{k+1+\frac{1}{k-1}+\epsilon}\right)$

(局所探索利用，Lee, Mirrokni, Nagarajan, Sviridenko, STOC 2009)

一般のマトロイド制約の場合（k≧2）でも同じ近似比

(局所探索利用，Lee, Sviridenko, Vondrák, APPROX 2009)

1つのマトロイド制約の場合: (1/4)(-1+√5)≒0.309

(多重線形拡張＋局所探索＋pipage rounding，Vondrák, FOCS 2009)

マトロイド制約1つの場合の近似アルゴリズム: 対称劣モジュラの場合

- 局所探索: 許容性を満たし, かつ関数値が増える限り, 次のいずれかの操作を実施

☆delete: $S := S-v$　☆add: $S := S+v$

☆swap: $S := S-u+v$

Key Lemma: S: 局所最適解, C: 任意の許容解

$$2 f(S) \geqq f(S \cup C) + f(S \cap C)$$

対称劣モジュラの場合, 局所探索は1/3近似

証明: 局所最適解S, 最適解Cに対して $2 f(S) \geqq f(S \cup C) + f(S \cap C)$

対称なので $f(S) = f(V-S)$

$\therefore 3f(S) \geqq f(V-S) + f(S \cup C) + f(S \cap C)$

$\geqq f(C-S)+f(S \cap C) \geqq f(C)$

マトロイド制約1つの場合の近似アルゴリズム：非対称劣モジュラの場合

- 局所探索：許容性を満たし，かつ関数値が増える限り，次のいずれかの操作を実施

  ☆delete: S := S-v　☆add: S := S+v

  ☆swap: S := S-u+v

Key Lemma: S: 局所最適解, C: 任意の許容解

$$2\,f(S) \geqq f(S \cup C) + f(S \cap C)$$

一般の劣モジュラ関数の場合，この局所探索を2回使う

1回目：元の問題に適用➔局所最適解 S_1

2回目：$V\text{-}S_1$ に制限した問題に適用➔局所最適解 S_2

S_1 と S_2 の良い方を出力　➔ 近似比 1／4

マトロイドの基制約の下での非単調劣モジュラ関数最大化

Maximize $f(S)$ subject to $S \in \mathcal{B}$

$f: 2^N \to \mathbf{R}_+$ 非単調劣モジュラ関数

$\mathcal{B}$: 台集合 N のマトロイドの基の族

- 近似不可能性

情報理論的限界(Vondrák, FOCS 2009)

- 一般の場合: 定数近似は不可能
- 共通部分をもたない基が2つ存在する場合: ½より良い近似は不可能

マトロイドの基制約の下での非単調劣モジュラ関数最大化

Maximize $f(S)$ subject to $S \in \mathcal{B}$

$f : 2^N \to \mathbf{R}_+$ **非単調劣モジュラ関数**

$\mathcal{B}$: **台集合** N **のマトロイドの基の族**

共通部分をもたない基が２つ存在

- 近似アルゴリズム

1/6 (局所探索利用,
Lee, Mirrokni, Nagarajan, Sviridenko, STOC 2009)
1/4 (多重線形拡張を使った局所探索＋pipage rounding,
Vondrák, FOCS 2009)

k個の費用制約下での非単調劣モジュラ関数最大化

- 近似アルゴリズム

1/5 – ε 近似
(多重線形拡張＋局所探索＋randomized rounding,
Lee, Mirrokni, Nagarajan, Sviridenko, STOC 2009)

非単調劣モジュラ関数最大化に関するオープン問題

☆近似比の上下界のギャップを狭める

- 制約なし --- 可能 0.4 ←→ 0.5 不可能
- マトロイド制約
  - 1つの場合 --- 可能 0.309
  - 複数の場合 --- 可能 $\left(\frac{1}{k+1+\frac{1}{k-1}+\epsilon}\right)$
- 費用（ナップサック制約）
  - 複数の場合 --- 可能 0.2−ε

☆劣モジュラ関数の（興味深い）部分クラスに対し，良い近似比のアルゴリズムを構築