離散凸解析とマッチングモデル
その1：結婚モデルと割当モデル

田村明久（慶應義塾大学　理工学部）

マッチングモデル概観（1）

- 2つの基本モデルとそれらの拡張の研究(数学，経済学)
  - 結婚モデル[Gale-Shapley 1962]と割当モデル[Shapley-Shubik 1972]
  - Hatfield-Milgromのモデル[2005]
  - 藤重-田村のモデル[2007]　など
- アルゴリズム，計算量，近似からの研究(情報学)
  - D. Gusfield, R.W. Irving: The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms, The MIT Press, (1989)
  - D.F. Manlove, R.W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita: Hard variants of stable marriage, Theort. Comput. Sci., 276 (2002) 261-279

  など

マッチングモデル概観（2）

- Strategy-proofness(操作不可能性)の研究(ゲーム論)
  - A.E. Roth, M.A.O. Sotomayor: Two-sided Matching: A study in game-theoretic modeling and analysis, Cambridge University Press, (1990)
  - J.W. Hatfield, P.R. Milgrom: Matching with contracts, Amer. Econo. Rev., 95 (2005) 913-935
- 現実問題への応用
  - 研修医割り当てシステム
  - 学校選択制度

  安田洋祐（編）：学校選択制のデザイン − ゲーム理論のアプローチ，NTT出版，(2010)

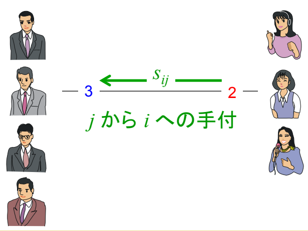
その1の目次

- 割当モデル
- 結婚モデル
- 上下限制約付き割当モデル

割当モデル

M, W：主体の集合，　$E = M \times W$

$a = (\underbrace{a_{ij}}_{(i,j)\text{における } i \text{ の利益}} : (i,j) \in E)$,　$b = (\underbrace{b_{ij}}_{j \text{ の利益}} : (i,j) \in E)$　} given



割当モデル

M, W：主体の集合，　$E = M \times W$

$a = (\underbrace{a_{ij}}_{(i,j)\text{における } i \text{ の利益}} : (i,j) \in E)$,　$b = (\underbrace{b_{ij}}_{j \text{ の利益}} : (i,j) \in E)$　} given

$(X, \underbrace{q, r}_{\text{利得ベクトル}})$：(pairwise) 安定解　$(X \subseteq E, q \in \mathbf{R}^M, r \in \mathbf{R}^W)$

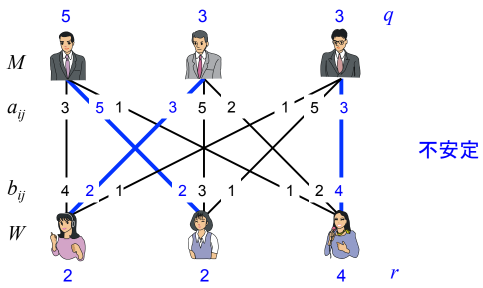
$\Updownarrow$ def

(a1) X : matching

(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$　$({}^\forall (i,j) \in X)$

(a3) $q, r \geq \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(a4) $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$　$({}^\forall (i,j) \in E)$



(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij} \quad (\forall (i,j) \in X)$

(a4) $q_i + r_j \ge a_{ij} + b_{ij} \quad (\forall (i,j) \in E)$

割当問題(LP定式化)

Max. $\sum_{(i,j)\in E} (a_{ij} + b_{ij}) x_{ij}$

s.t. $\sum_{j\in W} x_{ij} \le 1 \quad (i \in M)$

$\sum_{i\in M} x_{ij} \le 1 \quad (j \in W)$

$x_{ij} \ge 0 \quad ((i,j) \in E)$

双対問題

Min. $\sum_{i\in M} q_i + \sum_{j\in W} r_j$

s.t. $q_i + r_j \ge a_{ij} + b_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

$q_i \ge 0 \quad (i \in M)$

$r_j \ge 0 \quad (j \in W)$

(a1) X : matching　主実行可能性

(a2) $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij} \quad ({}^\forall (i,j) \in X)$　相補性

(a3) $q, r \ge \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(a4) $q_i + r_j \ge a_{ij} + b_{ij} \quad ({}^\forall (i,j) \in E)$　双対実行可能性

安定マッチングの存在証明

- 線形計画問題の双対定理 ＋ 整数性
  - 割当問題は整数最適解 X をもつ
  - 双対問題も最適解 (q,r) をもつ
  - (X, q, r) が安定解
- 最適化問題へと変換可能
  - M♮凹関数を用いた拡張でも成立

評価関数を用いた解釈

$$f_i(x) = \begin{cases} \sum_{j\in W} a_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E_{(i)}},\ \sum_{j\in W} x_{ij} \le 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (i \in M)$$

$$f_j(x) = \begin{cases} \sum_{i\in M} b_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E_{(j)}},\ \sum_{i\in M} x_{ij} \le 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (j \in W)$$

x : 安定マッチング $\Leftrightarrow$ $x \in \arg\max\,(f_M + f_W)$

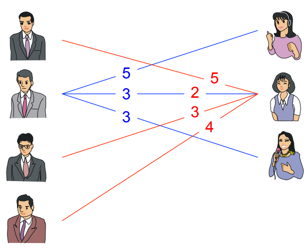
$$f_M = \sum_{i\in M} f_i, \quad f_W = \sum_{j\in W} f_j$$

これらの関数は層型凹関数，すなわちM♮凹関数

結婚モデル

M, W : 主体の集合，　$E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E), \quad b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$　} given



結婚モデル

M, W : 主体の集合，　$E = M \times W$

$a = (a_{ij} : (i,j) \in E), \quad b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$　} given

$a_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \in M$ は j を受理可能

$a_{ij} = -\infty \Leftrightarrow i \in M$ は j を受理不可能

$a_{ij} > a_{ik} \Leftrightarrow i \in M$ は j を k より好む

$a_{ij} = a_{ik} \Leftrightarrow i$ にとって j と k は無差別

結婚モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$ } given

マッチング X : (pairwise) 安定

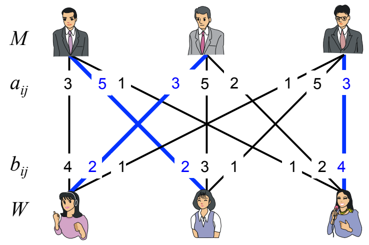
$\Updownarrow$ def

$^{\exists} q \in \mathbf{R}^M, {}^{\exists} r \in \mathbf{R}^W$ 利得ベクトル

(m1) $q_i = a_{ij}$ and $r_j = b_{ij}$ $({}^{\forall}(i,j) \in X)$ 手付なし

(m2) $q, r \geq \mathbf{0}$ and $q_i = 0$ $(r_j = 0)$ if i (j) is unmatched in X

(m3) $q_i \geq a_{ij}$ or $r_j \geq b_{ij}$ $({}^{\forall}(i,j) \in E)$



不安定

(m1) $q_i = a_{ij}$ and $r_j = b_{ij}$ $(\forall (i,j) \in X)$

(m3) $q_i \geq a_{ij}$ or $r_j \geq b_{ij}$ $(\forall (i,j) \in E)$

Gale-Shapleyのアルゴリズム

1. 誰も婚約していない状態から始め，全員が婚約するまで以下を繰返す
   a) 婚約していないそれぞれの男性はまだプロポーズしていない最良の女性にプロポーズをする
   b) それぞれの女性は婚約相手も含め，プロポーズしてきた男性の中で最良の人と婚約し直す

結果：Gale−Shapleyのアルゴリズムは常に安定なマッチングを求める

評価関数を用いた解釈

$$f_i(x) = \begin{cases} \sum_{j \in W} a_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E(i)}, \ \sum_{j \in W} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (i \in M)$$

$$f_j(x) = \begin{cases} \sum_{i \in M} b_{ij} x_{ij} & (x \in \{0,1\}^{E(j)}, \ \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (j \in W)$$

x : 安定マッチング $\Leftrightarrow$

$\exists z_M, z_W \in \{0,1\}^E$: $z_M \vee z_W = \mathbf{1}$,

$x \in \arg\max \{f_M(y) \mid y \leq z_M\} \cap \arg\max \{f_W(y) \mid y \leq z_W\}$

$(x \vee y)(e) = \max\{x(e), y(e)\}$

上下限制約付き割当モデル

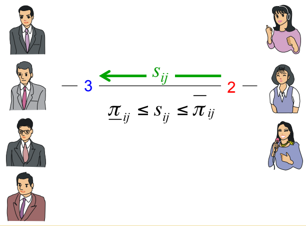
M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$
$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E, \overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ with $\underline{\pi} \leq \overline{\pi}$ } given

W側からM側への手付の下限

W側からM側への手付の上限

上下限制約付き割当モデル

M, W : 主体の集合, $E = M \times W$
$a = (a_{ij} : (i,j) \in E)$, $b = (b_{ij} : (i,j) \in E)$
$\underline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^E, \overline{\pi} \in (\mathbf{R} \cup \{+\infty\})^E$ with $\underline{\pi} \leq \overline{\pi}$ } given



上下限制約付き割当モデル

$$\left.\begin{array}{l} M,W:\text{主体の集合},\ E = M\times W \\ a=(a_{ij}:(i,j)\in E),\quad b=(b_{ij}:(i,j)\in E) \\ \underline{\pi}\in(\mathbf{R}\cup\{-\infty\})^E,\overline{\pi}\in(\mathbf{R}\cup\{+\infty\})^E \text{ with } \underline{\pi}\le\overline{\pi} \end{array}\right\}\ \text{given}$$

(X,q,r) : (pairwise) 安定解 $(X\subseteq E, q\in\mathbf{R}^M, r\in\mathbf{R}^W)$

$\Updownarrow$ def

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij}+s_{ij},\ r_j = b_{ij}-s_{ij},\ \underline{\pi}_{ij}\le s_{ij}\le\overline{\pi}_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in X)$

(b3) $q,r\ge\mathbf{0}$ and $q_i=0\ (r_j=0)$ if $i\ (j)$ is unmatched in X

(b4) $q_i\ge a_{ij}+\alpha$ or $r_j\ge b_{ij}-\alpha\quad (^\forall(i,j)\in E,\ ^\forall\alpha\in[\underline{\pi}_{ij},\overline{\pi}_{ij}])$

割当モデルとの関係

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij}+s_{ij},\ r_j = b_{ij}-s_{ij},\ \underline{\pi}_{ij}\le s_{ij}\le\overline{\pi}_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in X)$

(b3) $q,r\ge\mathbf{0}$ and $q_i=0\ (r_j=0)$ if $i\ (j)$ is unmatched in X

(b4) $q_i\ge a_{ij}+\alpha$ or $r_j\ge b_{ij}-\alpha\quad (^\forall(i,j)\in E,\ ^\forall\alpha\in[\underline{\pi}_{ij},\overline{\pi}_{ij}])$

$\Updownarrow\quad \underline{\pi}=(-\infty,\cdots,-\infty),\ \ \overline{\pi}=(+\infty,\cdots,+\infty)$

(a1) X : matching

(a2) $q_i+r_j=a_{ij}+b_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in X)$

(a3) $q,r\ge\mathbf{0}$ and $q_i=0\ (r_j=0)$ if $i\ (j)$ is unmatched in X

(a4) $q_i+r_j\ge a_{ij}+b_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in E)$

結婚モデルとの関係

(b1) X : matching

(b2) $q_i = a_{ij}+s_{ij},\ r_j = b_{ij}-s_{ij},\ \underline{\pi}_{ij}\le s_{ij}\le\overline{\pi}_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in X)$

(b3) $q,r\ge\mathbf{0}$ and $q_i=0\ (r_j=0)$ if $i\ (j)$ is unmatched in X

(b4) $q_i\ge a_{ij}+\alpha$ or $r_j\ge b_{ij}-\alpha\quad (^\forall(i,j)\in E,\ ^\forall\alpha\in[\underline{\pi}_{ij},\overline{\pi}_{ij}])$

$\Updownarrow\quad \underline{\pi}=(0,\cdots,0),\ \ \overline{\pi}=(0,\cdots,0)$

$^\exists q\in\mathbf{R}^M, ^\exists r\in\mathbf{R}^W\quad (X$: matching$)$

(m1) $q_i=a_{ij}$ and $r_j=b_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in X)$

(m2) $q,r\ge\mathbf{0}$ and $q_i=0\ (r_j=0)$ if $i\ (j)$ is unmatched in X

(m3) $q_i\ge a_{ij}$ or $r_j\ge b_{ij}\quad (^\forall(i,j)\in E)$

安定解の存在

- 離散凸解析を用いた藤重-田村のモデルにおける安定解の存在より導かれる