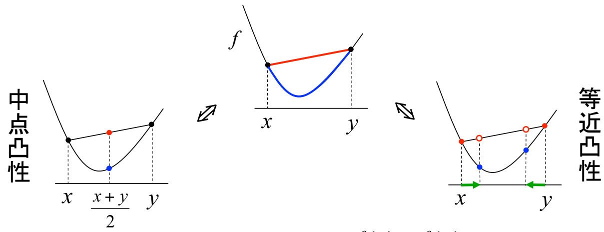
離散凸解析とマッチングモデル
その2：離散凸解析を用いたモデル

田村明久（慶應義塾大学　理工学部）

凸関数の性質

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \ge f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

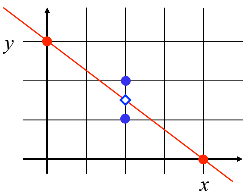


$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$f(x)+f(y) \ge f(x+d)+f(y-d)$$

離散凸性

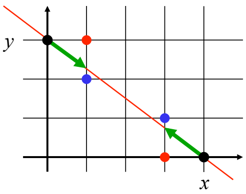
離散中点凸性



$f(x)+f(y) \ge$

L♮凸性 $f\left(\left\lceil\frac{x+y}{2}\right\rceil\right)+f\left(\left\lfloor\frac{x+y}{2}\right\rfloor\right)$

離散等近凸性



$f(x)+f(y) \ge$

M♮凸性 $\min\left\{\begin{array}{l} f(●)+f(●) \\ f(●)+f(●) \end{array}\right\}$

M♮凹関数

$f:\mathbf{Z}^E \to \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $\quad \mathrm{dom}\, f=\{x\in\mathbf{Z}^E \mid f(x)\ne -\infty\}$

$\chi_u\in\{0,1\}^E$: $\chi_u(u)=1$, $\chi_u(e)=0 \quad (e\ne u)$

$\chi_0=(0,\dots,0)$

f : M♮凹関数 [Murota 1996, Murota-Shioura 1999]

$\Updownarrow$ def

$\forall x,y\in\mathrm{dom}\, f$, $\quad \forall u\in\{e\in E \mid x(e)>y(e)\}$,

$\exists v\in\{0\}\cup\{e\in E \mid x(e)<y(e)\}$:

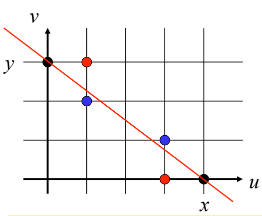
$$f(x)+f(y)\le f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v)$$

M♮凹関数

$\forall x,y\in\mathrm{dom}\, f$, $\quad \forall u\in\{e\in E \mid x(e)>y(e)\}$,

$\exists v\in\{0\}\cup\{e\in E \mid x(e)<y(e)\}$:

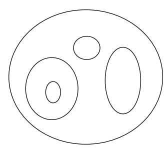
$$f(x)+f(y)\le f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v)$$



点が1歩ないし2歩だけ近づいたとき，
関数値の和が増加する

通常の凹関数:
　2点を結ぶ直線上を互いに等距離近づくと，関数値の和は増加する
　$\Downarrow$
　整数性を保存するために調整が必要

M♮凹関数の例



・層型凹関数

$\mathrm{T}\subseteq 2^E$: 層族

$X,Y\in\mathrm{T} \Rightarrow X\cap Y=\phi$ or $X\subseteq Y$ or $Y\subseteq X$

$f_Y:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ Tの各元 Y に対する凹関数

$$f(x)=\sum_{Y\in\mathrm{T}} f_Y(x(Y)) \qquad (x\in\mathbf{Z}^E)$$

$$x(Y)=\sum_{i\in Y} x(i)$$

M♮凹関数の最適性

[Murota 1996]

定理　M♮凹関数 $f:\mathbf{Z}^E\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ に対して

$x\in\arg\max f$（fの最大解集合）

$$\Updownarrow$$

$f(x)\ge f(x+\chi_u-\chi_v)\quad({}^\forall u,v\in E\cup\{0\})$

$n=|E|,\ L=\|\mathrm{dom}\,f\|_\infty$ としたとき n と $\log L$ に関する多項式時間で最大解が求まる

M♮凹関数の和の最適性

M♮凹関数＋M♮凹関数 ≠ M♮凹関数

M♮凹交叉定理 [Murota 1996]

$f_1,f_2:\mathbf{Z}^E\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$　M♮凹関数

$x\in\arg\max\,(f_1+f_2)$

$$\Updownarrow$$

${}^\exists p\in\mathbf{R}^E : x\in\arg\max\,f_1[+p]\cap\arg\max\,f_2[-p]$

M♮凹関数の性質

- 凹拡張可能性　[Murota 1996]
- 劣モジュラ性　[Murota-Shioura 2001]
- 単改良性　[Fujishige-Yang 2003]
- 粗代替性　[Fujishige-Yang 2003] [Danilov-Koshevoy-Lang 2003], [Murota-T. 2003]
- 代替性　[Fujishige-T. 2003] [Farooq-T. 2004], [Farooq-Shioura 2005]

代替性

- X:有限集合
- $C:2^X\to 2^X$ s.t. $C(Y)\subseteq Y$ for any $Y\subseteq X$
- C が代替性を満たすとは

$${}^\forall X'\subseteq{}^\forall Y'\subseteq X : X'\cap C(Y')\subseteq C(X')$$

$$\Updownarrow$$

$${}^\forall X'\subseteq{}^\forall Y'\subseteq X : X'-C(X')\subseteq Y'-C(Y')$$

M♮凹性と代替性

[Fujishige-T. 2003]

補題　f :M♮凹関数，$z_1,z_2\in\mathbf{Z}^E\ (z_1\ge z_2)$

(SC$_1$) ${}^\forall x_1\in\arg\max\{f(y)\mid y\le z_1\}$,

${}^\exists x_2\in\arg\max\{f(y)\mid y\le z_2\}$: $z_2\wedge x_1\le x_2$

(SC$_2$) ${}^\forall x_2\in\arg\max\{f(y)\mid y\le z_2\}$,

${}^\exists x_1\in\arg\max\{f(y)\mid y\le z_1\}$: $z_2\wedge x_1\le x_2$

(SC$_1$)　定員が減少したとき　$(x\wedge y)(e)=\min\{x(e),y(e)\}$

$z_2(e)\le x_1(e)\Rightarrow x_2(e)=z_2(e)$

$x_1(e)<z_2(e)\Rightarrow x_1(e)\le x_2(e)$

M♮凹性と代替性

[Farooq-T. 2004]

定理　$f:\{0,1\}^E\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$に対し以下は同値

(1) fはM♮凹関数

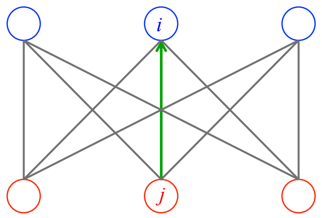
(2) 任意の$p\in\mathbf{R}^E$に対し$f[-p]$ が(SC$_1$)を満たす

(3) 任意の$p\in\mathbf{R}^E$に対し$f[-p]$ が(SC$_2$)を満たす

- dom f が有界な場合へ拡張　[Farooq-Shioura 2005]

FTモデル

f_i: $\mathbf{Z}^{E(i)}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 評価関数， $E_{(i)}=\{(i,j')\mid j'\in Q\}$



P : 労働者の集合

$\underline{\pi}(i,j)\le s(i,j)\le\overline{\pi}(i,j)$
j から i への給与

Q : 企業の集合

f_j: $\mathbf{Z}^{E(j)}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 評価関数， $E_{(j)}=\{(i',j)\mid i'\in P\}$

“安定”な割当(多対多，複数労働時間)と給与は存在するか

FTモデル

P,Q :主体の集合， $E=P\times Q$

$f_i:\mathbf{Z}^{E_{(i)}}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ $(i\in P)$ i の評価関数

$f_j:\mathbf{Z}^{E_{(j)}}\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ $(j\in Q)$ j の評価関数

$\underline{\pi}\in(\mathbf{R}\cup\{-\infty\})^E,\ \overline{\pi}\in(\mathbf{R}\cup\{+\infty\})^E\ (\underline{\pi}\le\overline{\pi})$

given

(A) $\mathrm{dom}\,f_k$ $(k\in P\cup Q)$ は有界，遺伝的，
最小点として $\mathbf{0}$ を含む

遺伝的: $\mathbf{0}\le x_1\le x_2\in\mathrm{dom}\,f_k\Rightarrow x_1\in\mathrm{dom}\,f_k$

実行可能割当，実行可能給与ベクトル

- 実行可能割当 $x\in\mathbf{Z}^E$

  $x_{(k)}\in\mathrm{dom}\,f_k$ $(k\in P\cup Q)$

  $x_{(k)}$: x の $E_{(k)}$ への制限

- 実行可能給与ベクトル $s\in\mathbf{R}^E$

  $\underline{\pi}\le s\le\overline{\pi}$

- 解 (x,s) 実行可能割当＆実行可能給与ベクトル

動機制約

- (x,s) : 動機制約(incentive constraints)

$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)})=\max\{f_i[+s_{(i)}](y)\mid y\le x_{(i)}\}\quad({}^\forall i\in P)$$

$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)})=\max\{f_j[-s_{(j)}](y)\mid y\le x_{(j)}\}\quad({}^\forall j\in Q)$$

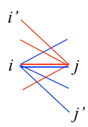
$$f[+s](x)=f(x)+\sum_e s(e)x(e)$$

各主体は現在の給与に対して，労働時間を減らす動機をもたない

不安定解

- (pairwise) 不安定解 (x,s) :

動機制約を満たさない あるいは
$\exists(i,j)\in E,\ \alpha\in[\underline{\pi}(i,j),\overline{\pi}(i,j)],\ y'\in\mathbf{Z}^{E_{(i)}},\ y''\in\mathbf{Z}^{E_{(j)}}$:



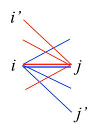
$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)})<f_i[+(s_{(i)}^{-j},\alpha)](y')$$
$$y'(i,j')\le x(i,j')\quad(\forall j'\in Q-\{j\})$$
$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)})<f_j[-(s_{(j)}^{-i},\alpha)](y'')$$
$$y''(i',j)\le x(i',j)\quad(\forall i'\in P-\{i\})$$
$$y'(i,j)=y''(i,j)$$

$(s_{(i)}^{-j},\alpha)$: replaced j-comp. of $s_{(i)}$ by α

準不安定解

- (pairwise) 準不安定解 (x,s) :

動機制約を満たさない あるいは
$\exists(i,j)\in E,\ \alpha\in[\underline{\pi}(i,j),\overline{\pi}(i,j)],\ y'\in\mathbf{Z}^{E_{(i)}},\ y''\in\mathbf{Z}^{E_{(j)}}$:



$$f_i[+s_{(i)}](x_{(i)})<f_i[+(s_{(i)}^{-j},\alpha)](y')$$
$$y'(i,j')\le x(i,j')\quad(\forall j'\in Q-\{j\})$$
$$f_j[-s_{(j)}](x_{(j)})<f_j[-(s_{(j)}^{-i},\alpha)](y'')$$
$$y''(i',j)\le x(i',j)\quad(\forall i'\in P-\{i\})$$

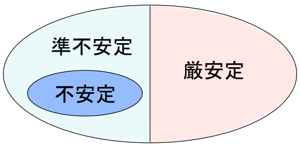
不安定解 ⇒ 準不安定解

$(s_{(i)}^{-j},\alpha)$: replaced j-comp. of $s_{(i)}$ by α

安定解，厳安定解

- (pairwise) 安定解 (x,s)：不安定でない解
- (pairwise) 厳安定解 (x,s)：準不安定でない解

厳安定解 ⇒ 安定解



安定性 対 厳安定性 (1)

補題

f_k ($k\in P\cup Q$): 仮定(A) を満たすM♮凹関数

(i) $\underline{\pi} = \overline{\pi}$

or

(ii) $\mathrm{dom}\, f_k \subseteq \{0,1\}^{E(k)}$ $\quad (\forall k\in P\cup Q)$

$\Downarrow$

すべての安定解は厳安定

安定性 対 厳安定性 (2)

定理

f_k ($k\in P\cup Q$): 仮定(A) を満たすM♮凹関数

任意の安定解 (x,s) に対して，

ある実行可能給与ベクトル s' が存在し

(x,s') が厳安定解となる

主定理(安定解の存在)

定理

f_k ($k\in P\cup Q$): (A)を満たすM♮凹関数

常に厳安定解が存在する

(A) $\mathrm{dom}\, f_k$ ($k\in P\cup Q$) は有界，遺伝的，
最小点として $\mathbf{0}$ を含む

遺伝的: $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_k \Rightarrow x_1 \in \mathrm{dom}\, f_k$

厳安定性の特徴付け

f_k ($k\in P\cup Q$): (A)を満たすM♮凹関数，x:実行可能割当

$\exists s\in \mathbf{R}^E$ s.t. (x,s):厳安定 $\Leftrightarrow$

$\exists p\in \mathbf{R}^E, z_P = (z_{(i)} \mid i\in P), z_Q = (z_{(j)} \mid j\in Q) \in (\mathbf{Z}\cup\{+\infty\})^E$:

$x_{(i)} \in \arg\max\{f_i[+p_{(i)}](y) \mid y \le z_{(i)}\} \quad (\forall i\in P)$

$x_{(j)} \in \arg\max\{f_j[-p_{(j)}](y) \mid y \le z_{(j)}\} \quad (\forall j\in Q)$

$\underline{\pi} \le p \le \overline{\pi}$

$z_P(e) < +\infty \Rightarrow p(e) = \underline{\pi}(e),\ z_Q(e) = +\infty$

$z_Q(e) < +\infty \Rightarrow p(e) = \overline{\pi}(e),\ z_P(e) = +\infty$

関連文献＆図書

- S. Fujishige and A. Tamura: A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis, Mathematics of Operations Research, 32 (2007), 136-154.
- 室田一雄：離散凸解析，共立出版，2001.
- K. Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol. 10, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- S. Fujishige: Submodular Functions and Optimization, 2nd ed., Annals of Discrete Mathematics, 58, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- 室田一雄: 離散凸解析の考えかた —最適化における離散と連続の数理—, 共立出版, 2007.
- 田村明久：離散凸解析とゲーム理論，朝倉書店，2009.