第2部　一般剛性マトロイド

Motivation:

- Lamanの条件（組合せ的条件）v.s. 一般剛性（代数的条件）
- グラフ上の組合せ的マトロイド v.s. 線形マトロイド
- 単調劣モジュラ関数 $f_{2,3}(F) \coloneqq 2|V(F)| - 3 \ (F \subseteq E)$ がカギ

- 組合せ的背景((k,l)-疎性を通して)
  - マトロイド
  - ポリマトロイド
  - 単調劣モジュラ関数に誘導される(ポリ)マトロイド
- 剛性マトロイドと疎性マトロイド
  - 1次元
  - 2次元　(Lovasz&YeminiによるLamanの定理の証明)
- アルゴリズム

マトロイド

- 台集合E: 有限集合,　　独立集合族$\mathcal{I}$: Eの部分集合族.
- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ がマトロイド　$\Leftrightarrow$
  - (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
  - (I2) $X \subseteq Y, Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$
  - (I3) $X, Y \in \mathcal{I}, |X| < |Y| \Rightarrow \exists y \in Y \setminus X \text{ s.t. } X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$

- 例
  - 線形マトロイド：E = 行列の行集合, $\mathcal{I}$ = 線形独立な行の集合の族
  - グラフ的マトロイド：E = 辺集合，$\mathcal{I}$ = 閉路を含まない辺集合の族
  - 横断マトロイド：E=2部グラフの片側頂点集合，$\mathcal{I}$ =マッチングによってカバー可能なEの部分集合の族
  - d次元一般剛性マトロイド: $E = R(G, p)$の行集合（⇔辺集合），$\mathcal{I} = R(G, p)$内で線形独立な行集合の族
    - ここで$p: V \to \mathbb{R}^d$は任意の一般的ジョイント配置

単調劣モジュラ関数

- 関数$r: 2^E \to \mathbb{R}$が
  - 劣モジュラ: $\forall X, Y \subseteq E,\ r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cap Y)$
  - 単調(非減少): $\forall X \subseteq Y \subseteq E,\ r(X) \leq r(Y)$

- グラフ$G = (V, E)$に対し,

$$f_{2,3}(F) \coloneqq 2|V(F)| - 3 \ \ (F \subseteq E)$$

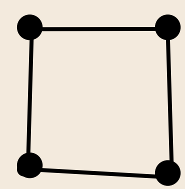
は単調劣モジュラ関数. より一般に

$$f_{k,l}(F) := k|V(F)| - l \ \ (F \subseteq E)$$

は単調劣モジュラ関数

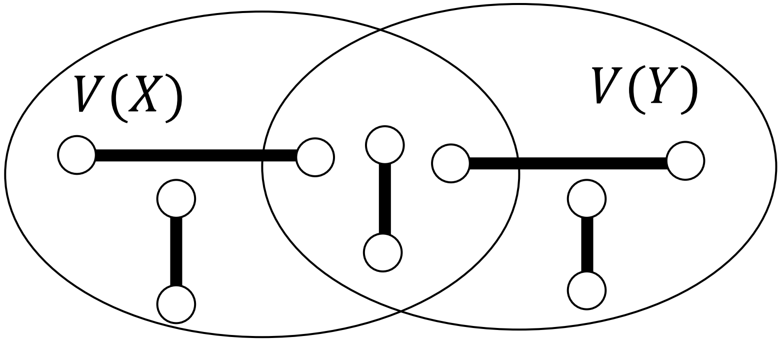
- グラフ的マトロイド
  - $F \subseteq E$ が独立 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Fが森

    $\Leftrightarrow \forall I \subseteq F,\ |I| \leq |V(I)| - 1$



$|F| = |V(F)|$

- $\forall X, Y \subseteq E,$
  - $V(X \cap Y) \subseteq V(X) \cap V(Y), V(X \cup Y) = V(X) \cup V(Y)$



- $f_{k,l}(X) + f_{k,l}(Y)$
- $= k|V(X)| - l + k|V(Y)| - l$
- $= k|V(X) \cup V(Y)| - l + k|V(X) \cap V(Y)| - l$
- $\geq k|V(X \cup Y)| - l + k|V(X \cap Y)| - l$
- $= f_{k,l}(X \cup Y) + f_{k,l}(X \cap Y)$

ランク関数

- $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$のランク関数 $r: 2^E \to \mathbb{Z}$

$$r(F) \coloneqq \max\{\, |I| \mid I \subseteq F, I \in \mathcal{I} \,\} \quad (F \subseteq E)$$

- 例：
  - 線形マトロイド：対応する行ベクトルが張る空間の次元
  - グラフ的マトロイド：F 内の極大森のサイズ
  - 横断マトロイド：Fに制限した場合の最大マッチングのサイズ

- Prop. $r: 2^E \to \mathbb{Z}$ がマトロイドのランク関数 $\Leftrightarrow$
  - (r0) $r(\emptyset) = 0$
  - (r1) $\forall e \in E,\ r(e) \leq 1$
  - (r2) r は単調
  - (r3) r は劣モジュラ関数

$f_{2,3}$はマトロイドのランク関数??

$f_{1,0}$はマトロイドのランク関数??

$f_{k,0}$はマトロイドのランク関数??

ポリマトロイド

- ランク関数によるマトロイドの定義： $r\colon 2^E \to \mathbf{Z}$ に対し$\mathcal{M} = (E, r)$がマトロイド $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  - (r0) $r(\emptyset) = 0$
  - (r1) $\forall e \in E,\ r(e) \le 1$
  - (r2) r は単調
  - (r3) r は劣モジュラ関数

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid |I| = r(I)\}$$

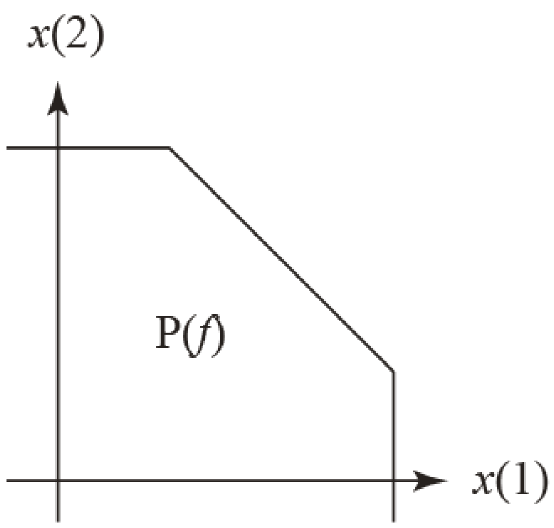
- $r\colon 2^E \to \mathbf{Z}$ に対し，(E, r)がポリマトロイド(polymatroid) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  - (r0) $r(\emptyset) = 0$
  - (r2) r は単調
  - (r3) r は劣モジュラ関数

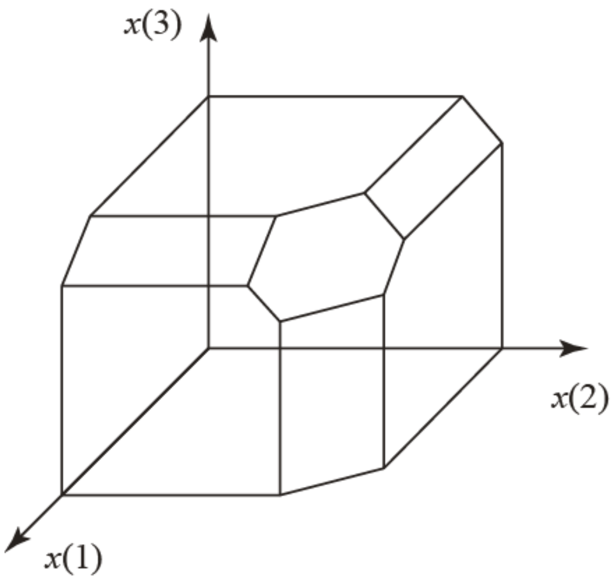
$(E, f_{k,0})$はポリマトロイド

劣モジュラ多面体

- $P(f) := \{x \in \mathbb{R}^E \mid \forall X \subseteq E, x(X) \leq f(X)\}$
  - $x(X) \coloneqq \sum_{e \in X} x(e)$

- Prop.
  - ポリマトロイド(E, f)に対し，$P(f)$は整数多面体 (fは整数値を仮定)
  - マトロイド(E, f)に対し，$P(f)$を$x \geq 0$に制限した多面体は独立集合の特徴ベクトルの凸包



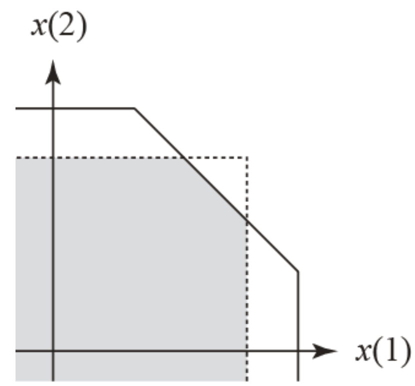


マトロイドの構築

- 劣モジュラ関数$f: 2^E \to \mathbb{R}$に対し

$$f^{\mathbf{1}}(X) := \min\{\, |X - Z| + f(Z) \mid Z \subseteq X \,\} \qquad (X \subseteq E)$$

- Prop. (練習問題)　$f(\emptyset) = 0$を満たす劣モジュラ関数fに対し
  - f^1 は劣モジュラ
  - $P(f^1) = P(f) \cap [-\infty, 1]^E$



- $f^1(e) \leq 1$なので，(E, f)がポリマトロイドの時，(E, f^1)はマトロイド
  - $P(f)$を$x \geq 0$に制限した多面体は独立集合族の特徴ベクトルの凸包

$\left(E, (f_{k,0})^1\right)$はマトロイド

- $f(\emptyset) < 0$の場合，$P'(f) := \{x \in \mathbb{R}^E \mid \emptyset \neq \forall X \subseteq E, x(X) \leq f(X)\}$はどのような多面体か??

Dilworth Truncations

- 劣モジュラ関数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ のDilworth truncation

$$\hat{f}(X) = \min\left\{ \sum_i f(X_i) \;\middle|\; \{X_1, \dots, X_k\}\text{: a partition of } X \right\} \qquad (X \subseteq E)$$

- Prop. $\hat{f}$ は劣モジュラ
- Coro. fが整数値，単調，劣モジュラ関数で $f(e) \geq 0$ならば，$\mathcal{P}_f = (E, \hat{f})$ はポリマトロイド（fによって誘導されるポリマトロイド）

$\left(E, \hat{f}_{k,l}\right)$はポリマトロイド

$\left(E, (\hat{f}_{k,l})^1\right)$はマトロイド

Dilworth Truncations

- 劣モジュラ関数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ のDilworth truncation

$$\hat{f}(X) = \min\left\{ \sum_i f(X_i) \;\middle|\; \{X_1, \dots, X_k\}: \text{a partition of } X \right\} \qquad (X \subseteq E)$$

- Prop. $\hat{f}$ は劣モジュラ
- Coro. fが整数値，単調，劣モジュラ関数で $f(e) \geq 0$ならば，$\mathcal{P}_f = (E, \hat{f})$ はポリマトロイド（fによって誘導されるポリマトロイド）
- Fact. $P(\hat{f}) = P'(f) := \{x \in \mathbb{R}^E \mid \emptyset \neq \forall X \subseteq E, x(X) \leq f(X)\}$

- $\because\ \hat{f}(X) \leq f(X) \Rightarrow P(\hat{f}) \subseteq P'(f)$
- 逆に $X \subseteq E$に対し，$\{X_1, \dots, X_k\}$をminimizerとすると，

$$\forall x \in P'(f), \quad x(X) = \sum_i x(X_i) \leq \sum_i f(X_i) = \hat{f}(X) \quad \Rightarrow \quad x \in P'(\hat{f})$$

Dilworth Truncations

- 劣モジュラ関数 $f: 2^E \to \mathbb{R}$ のDilworth truncation

$$\hat{f}(X) = \min\left\{ \sum_i f(X_i) \,\middle|\, \{X_1, \ldots, X_k\}\colon \text{a partition of } X \right\} \qquad (X \subseteq E)$$

- Prop. $\hat{f}$ は劣モジュラ
- Coro. f が整数値, 単調, 劣モジュラ関数で $f(e) \geq 0$ ならば, $\mathcal{P}_{\hat{f}} = (E, \hat{f})$ はポリマトロイド （f によって誘導されるポリマトロイド）
- Fact. $P(\hat{f}) = P'(f) := \{x \in \mathbb{R}^E \mid \emptyset \neq \forall X \subseteq E, x(X) \leq f(X)\}$

- $P\left(\left(\hat{f}\right)^1\right) \cap [0, +\infty]^E = P(\hat{f}) \cap [0,1]^E$
- $= \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \emptyset \neq \forall X \subseteq E, x(X) \leq f(X),\ 0 \leq x \leq 1\}$
- $= \mathrm{conv}\{\chi_F \mid F \subseteq E; \underline{\emptyset \neq \forall X \subseteq F, |X| \leq f(X)}\}$

独立集合のコンパクトな表現

誘導マトロイド

- Prop. 整数値，単調，劣モジュラ関数fにおいて，$f(e) \geq 0$のとき, 集合族を以下のように定める:

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E : \emptyset \neq \forall X \subseteq F, |X| \leq f(X)\}$$

この時 $(E, \mathcal{I})$ はマトロイドでランク関数は以下で記述される:

$$r(F) = \left(\hat{f}\right)^1 (F) = \min_{\{X_0, X_1, \ldots, X_s\}} \left\{ |X_0| + \sum_{i=1}^{k} f(X_i) \right\} \qquad (F \subseteq E)$$

ここで$\{X_0, X_1, \ldots, X_s\}$は F の分割で X_0 のみ空でも良い.

- (k, l)-疎性マトロイド $\mathcal{M}_{k,l}(G)$: $f_{k,l}$ に誘導されたマトロイド
  - $F \subseteq E$ が独立 $\Leftrightarrow \emptyset \neq \forall X \subseteq F, |X| \leq k|V(X)| - l$
    - $k = 1, l = 1$: グラフ的マトロイド
    - $k = 1, l = 0$: bicircular マトロイド
    - $k = 2, l = 3$: 2次元剛性マトロイド（Lamanの条件）
    - $k = l$: グラフ的マトロイドのk合併(Nash-Williamsの森分割条件)

（ポリ）マトロイド合併

- Prop. E 上の劣モジュラ関数f_1, f_2に対し

$$P(f_1 + f_2) = P(f_1) + P(f_2)$$

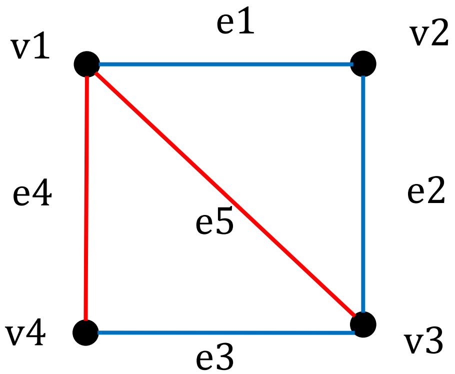
- 特に，ポリマトロイド$(E, f_1), (E, f_2)$に対し
  - $\forall x \in P(f_1 + f_2) \cap \mathbb{Z}^E_{\geq 0},\ \exists x_i \text{ s.t. } x_i \in P(f_i) \cap \mathbb{Z}^E_{\geq 0} \text{and } x = x_1 + x_2$

- E 上のマトロイド$\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$に対し

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 := \{F_1 \cup F_2 \mid F_1 \in \mathcal{I}_1, F_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

とおくと $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2)$ はマトロイド

- 例：グラフ的マトロイドの2合併：$2g(G) = g(G) \vee g(G)$
  - F が独立 $\Leftrightarrow$ Fが2つの辺素な森へ分割可能



誘導(ポリ)マトロイドの合併

- E 上の単調劣モジュラ関数f_1, f_2に対し，各$X \subseteq E$において $\hat{f}_1(X)$と $\hat{f}_2(X)$の(Dilworth truncationの）共通minimizer $\{X_1, \dots, X_k\}$が存在するならば，
  - $P'(f_1 + f_2) = P'(f_1) + P'(f_2)$
  - $\mathcal{M}_{f_1+f_2} = \mathcal{M}_{f_1} \vee \mathcal{M}_{f_2}$

  - $\because \widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{f_1 + f_2}$となるので，
    $P'(f_1 + f_2) = P\left(\widehat{f_1 + f_2}\right) = P\left(\widehat{f_1} + \widehat{f_2}\right) = P\left(\widehat{f_1}\right) + P\left(\widehat{f_2}\right) = P'(f_1) + P'(f_2)$

- Theorem(Nash-Williams64)： $\mathcal{M}_{k,k} = k\mathcal{M}_{1,1}$
  - Eがk個の森に分割可能 $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq F \subseteq E, |F| \leq k|V(F)| - k$
- Theorem(Whiteley88): For $0 \leq l \leq k$, $\mathcal{M}_{k,l} = l\mathcal{M}_{1,1} \vee (k - l)\mathcal{M}_{1,0}$

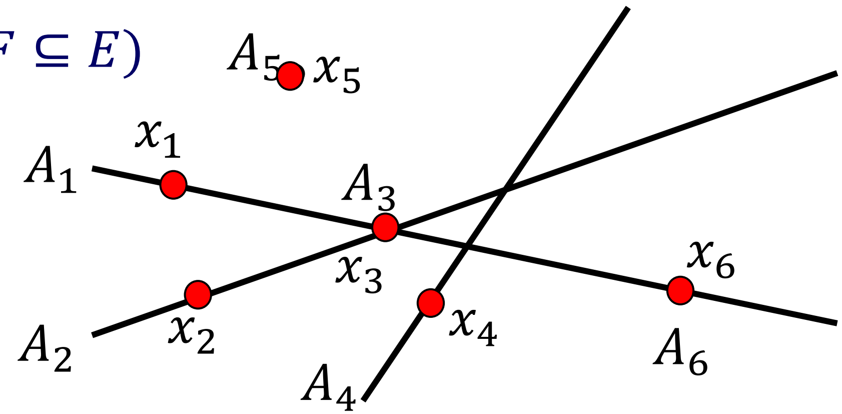
線形ポリマトロイドの合併

- 線形ポリマトロイド$(E, \{A_e\})$
  - E: 有限集合;
  - ベクトル空間V
  - A_e: $e \in E$に関連付けられたV内の線形部分空間
  - $\mathcal{A} \coloneqq \{A_e \mid e \in E\}$
  - $\dim_{\mathcal{A}}(F) \coloneqq \dim(span\{A_e \mid e \in F\}) \quad (F \subseteq E)$
  - $\Rightarrow \ (E, \dim_{\mathcal{A}}(F))$は$E$上の線形ポリマトロイド

- V内の線形ポリマトロイド$(E, \mathcal{A} = \{A_e\})$と$V'$内の線形ポリマトロイド$(E, \mathcal{A}' = \{A'_e\})$ の合併は, $V \oplus V'$内の線形ポリマトロイド$(E, \{A_e \oplus A'_e\})$
  - $\because \ \forall F \subseteq E, \dim_{\mathcal{A}}(F) + \dim_{\mathcal{A}'}(F) = \dim\{A_e \oplus A'_e \mid e \in F\}$

線形空間内でのマトロイド構築

- 各A_eから代表ベクトル$x_e(\in A_e)$を選び，線形マトロイドを構成
  - $X_{\mathcal{A}} := \{x_e \mid e \in E\}$
  - $r(F) := \dim(span\{x_e \mid \mathrm{e} \in F\}) \quad (F \subseteq E)$
  - $\Rightarrow \quad (E, r)$は線形マトロイド



- Theorem(Lovasz77) $X_{\mathcal{A}}$が一般的なとき
  - rは最大値をとる
  - $r(F) = \min\{\,|F \setminus Z| + \dim_{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \subseteq F\,\} \ (F \subseteq E)$
  - つまり，(E, r)は$(E, \dim_{\mathcal{A}})$から構築されるマトロイド

  また殆ど全ての代表点集合$X_{\mathcal{A}}$は一般的.

  - $X_{\mathcal{A}}$が一般的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x_e \in X', \forall X' \subseteq X_{\mathcal{A}} - x_e,\ x_e \in sp\{X'\} \Rightarrow A_e \subseteq sp\{X'\}$

- Theorem(Lovasz77) $X_{\mathcal{A}}$が一般的なとき
  - rは最大値をとる
  - $r(F) = \min\{\, |F \setminus Z| + \dim_{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \subseteq F \,\} \ \ (F \subseteq E)$

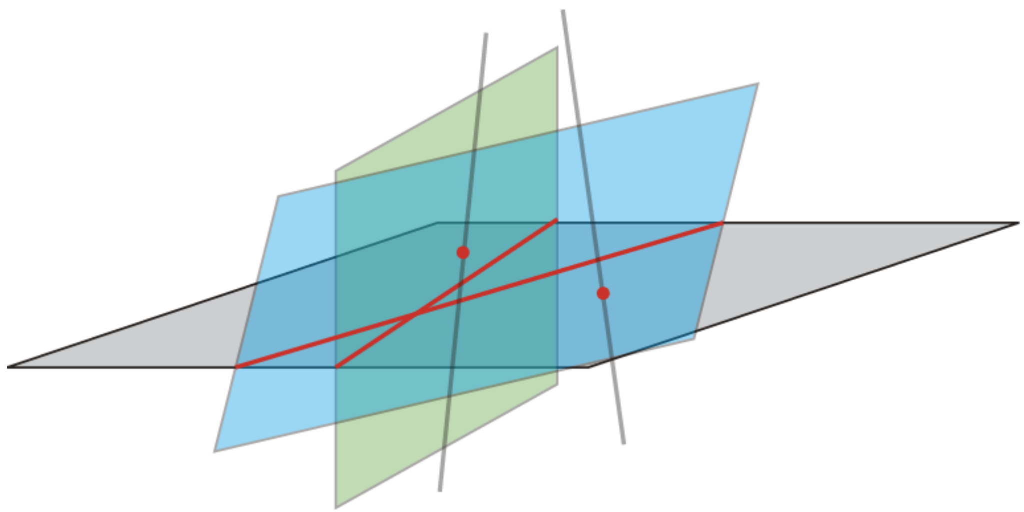
$X_{\mathcal{A}}$が一般的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x_e \in X', \forall X' \subseteq X_{\mathcal{A}} - x_e,\ x_e \in sp\{X'\} \Rightarrow A_e \subseteq sp\{X'\}$

- Proof
  - $\forall Z \subseteq F, r(F) \leq r(F \setminus Z) + r(Z) \leq |F \setminus Z| + \dim_{\mathcal{A}}(Z)$
  - 逆は$|F|$に関する帰納法
    - Z_FをFに対するminimzerとする.
    - $\exists f \in F$ s.t. $x_f \notin span\{x_e \mid e \in F - f\}$,
      - then $r(F) = r(F-f) + 1 = \left|(F-f) \setminus Z_{F-f}\right| + \dim_{\mathcal{A}}\left(Z_{F-f}\right) + 1 = \left|F \setminus Z_{F-f}\right| + \dim_{\mathcal{A}}\left(Z_{F-f}\right)$
    - otherwise $x_f \in span\{\, x_e \mid e \in F - f \,\} \Rightarrow A_f \subseteq span\{x_e \mid e \in F - f\}$
      - $r(F) = r(F-f) = \left|(F-f) \setminus Z_{F-f}\right| + \dim_{\mathcal{A}}\left(Z_{F-f}\right) = \left|(F-f) \setminus (Z_{F-f} + f)\right| + \dim_{\mathcal{A}}\left(Z_{F-f} + f\right)$

Dilworth Truncations

- Geometric view（Lovász77）: 線形ポリマトロイド$(E, \mathcal{A} = \{A_e\})$と$V$ 内の一般的な超平面Hに対し,

$$\dim(span\{A_e \cap H | e \in E\}) = \min\left\{ \sum_i (\dim_{\mathcal{A}}(E_i) - 1) \;\middle|\; \text{a partition } \{E_1, \dots, E_k\} \text{ of } E \right\}$$



第2部　一般剛性マトロイド

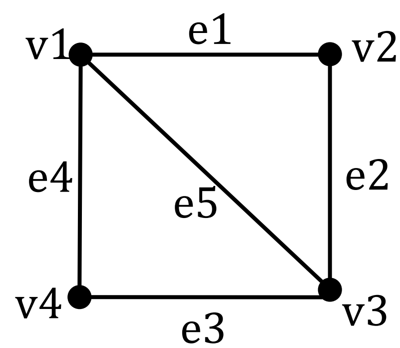
- 組合せ的背景((k, l)-疎性を通して)
  - マトロイド
  - ポリマトロイド
  - 単調劣モジュラ関数に誘導される(ポリ)マトロイド
- 剛性マトロイドと疎性マトロイド
  - 1次元
  - 2次元　(Lovasz&YeminiによるLamanの定理の証明)
- アルゴリズム

- Generic d-rigidity matroid $\mathcal{R}_d(G)$: the row matroid of $R(G,p)$ for generic p
  - G is rigid $\Leftrightarrow$ the rank of $\mathcal{R}_d(G)$ is $d|V| - \binom{d+1}{2}$

$d = 1$

$$
\begin{array}{c}
\\ e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5
\end{array}
\begin{array}{cccc}
v1 & v2 & v3 & v4 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & p_{x,1}-p_{x,2} & p_{x,2}-p_{x,1} & 0 & 0 \\
e2 & 0 & p_{x,2}-p_{x,3} & p_{x,3}-p_{x,2} & 0 \\
e3 & 0 & 0 & p_{x,3}-p_{x,4} & p_{x,4}-p_{x,3} \\
e4 & p_{x,1}-p_{x,4} & 0 & 0 & p_{x,4}-p_{x,1} \\
e5 & p_{x,1}-p_{x,3} & 0 & p_{x,3}-p_{x,1} & 0 \\
\hline
\end{array}
$$



$d = 2$

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & p_{x,1}-p_{x,2} & p_{x,2}-p_{x,1} & 0 & 0 & p_{y,1}-p_{y,2} & p_{y,2}-p_{y,1} & 0 & 0 \\
e2 & 0 & p_{x,2}-p_{x,3} & p_{x,3}-p_{x,2} & 0 & 0 & p_{y,2}-p_{y,3} & p_{y,3}-p_{y,2} & 0 \\
e3 & 0 & 0 & p_{x,3}-p_{x,4} & p_{x,4}-p_{x,3} & 0 & 0 & p_{y,3}-p_{y,4} & p_{y,4}-p_{y,3} \\
e4 & p_{x,1}-p_{x,4} & 0 & 0 & p_{x,4}-p_{x,1} & p_{y,1}-p_{y,4} & 0 & 0 & p_{y,4}-p_{y,1} \\
e5 & p_{x,1}-p_{x,3} & 0 & p_{x,3}-p_{x,1} & 0 & p_{y,1}-p_{y,3} & 0 & p_{y,3}-p_{y,1} & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

- Generic d-rigidity matroid $\mathcal{R}_d(G)$: the row matroid of $R(G,p)$ for generic p
  - G is rigid $\Leftrightarrow$ the rank of $\mathcal{R}_d(G)$ is $d|V| - \binom{d+1}{2}$

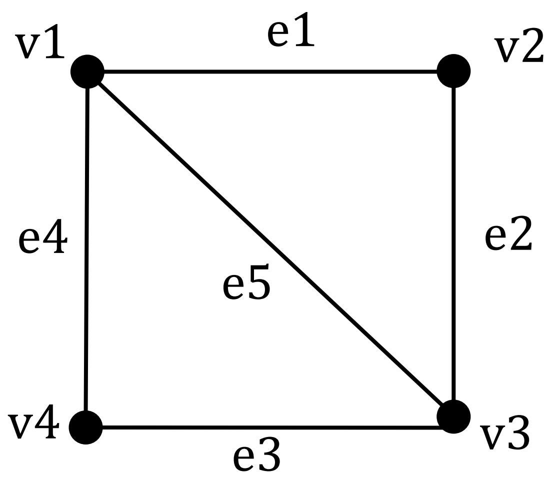
$d = 1$

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & p_{x,1} - p_{x,2} & p_{x,2} - p_{x,1} & 0 & 0 \\
e2 & 0 & p_{x,2} - p_{x,3} & p_{x,3} - p_{x,2} & 0 \\
e3 & 0 & 0 & p_{x,3} - p_{x,4} & p_{x,4} - p_{x,3} \\
e4 & p_{x,1} - p_{x,4} & 0 & 0 & p_{x,4} - p_{x,1} \\
e5 & p_{x,1} - p_{x,3} & 0 & p_{x,3} - p_{x,1} & 0 \\
\hline
\end{array}
\cong
\begin{array}{c|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
e2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
e3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
e4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
e5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

The graphic matroid $\mathcal{g}(G)$ of a graph $G = (V, E)$

- $F \subseteq E$ is independent in $\mathcal{g}(G) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ F is a forest $\Leftrightarrow$ $\emptyset \neq \forall I \subseteq F,\ |I| \leq |V(I)| - 1$

- $\mathcal{g}(G) =$ the row matroid of any oriented incidence matrix of G

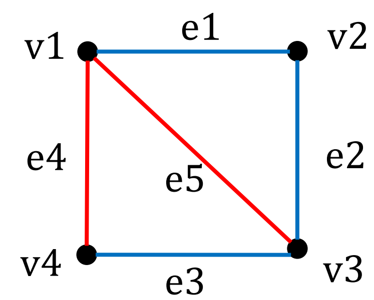


$$\begin{array}{c} \\ e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} v1 & v2 & v3 & v4 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \end{array}$$

- $\mathcal{R}_1(G) = \mathcal{G}(G)$

The union of k graphic matroids, $k\mathcal{g}(G)$

- E is independent in $k\mathcal{g}(G)$
- $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ E can be partitioned into k edge-disjoint forests
- $\Leftrightarrow \emptyset \neq \forall F \subseteq E,\ |F| \leq k(|V(F)| - 1)$



- $k\mathcal{g}(G)$ = the row matroid of the following matrix:

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
e2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
e3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
e4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
e5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 \\
\hline
e1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\
e2 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\
e3 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 \\
e4 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 \\
e5 & \alpha_5 & 0 & -\alpha_5 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

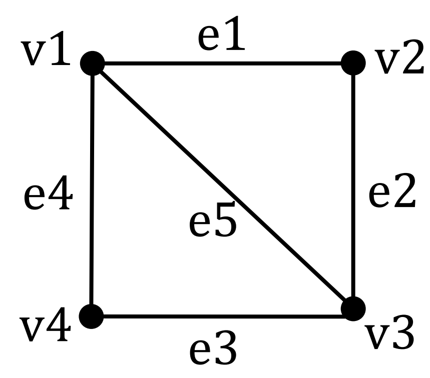
Align the k matrices with distinct indeterminates

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 & v'1 & v'2 & v'3 & v'4 \\
\hline
e1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\
e2 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 & -\beta_2 & 0 \\
e3 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3 & -\beta_3 \\
e4 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4 & 0 & 0 & \beta_4 \\
e5 & \alpha_5 & 0 & -\alpha_5 & 0 & \beta_5 & 0 & -\beta_5 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

generic 2-rigidity matroid v.s. union of 2 graphic matroids

- **Nash-Williams' condition:** $\emptyset \neq \forall F \subseteq E,\ |F| \leq 2|V(F)| - 2$

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 & v'1 & v'2 & v'3 & v'4 \\ \hline
e1 & \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\
e2 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 & -\beta_2 & 0 \\
e3 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3 & -\beta_3 \\
e4 & -\alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4 & 0 & 0 & \beta_4 \\
e5 & \alpha_5 & 0 & -\alpha_5 & 0 & \beta_5 & 0 & -\beta_5 & 0 \\ \hline
\end{array}$$



Restriction to a generic hyperplane

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \textstyle\sum_i (p_{x,i} y_i - p_{y,i} x_i) = 0\}$$

- **Laman's condition:** $\emptyset \neq \forall F \subseteq E,\ |F| \leq 2|V(F)| - 3$

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & v1 & v2 & v3 & v4 & v'1 & v'2 & v'3 & v'4 \\ \hline
e1 & p_{x,1}-p_{x,2} & p_{x,2}-p_{x,1} & 0 & 0 & p_{y,1}-p_{y,2} & p_{y,2}-p_{y,1} & 0 & 0 \\
e2 & 0 & p_{x,2}-p_{x,3} & p_{x,3}-p_{x,2} & 0 & 0 & p_{y,2}-p_{y,3} & p_{y,3}-p_{y,2} & 0 \\
e3 & 0 & 0 & p_{x,3}-p_{x,4} & p_{x,4}-p_{x,3} & 0 & 0 & p_{y,3}-p_{y,4} & p_{y,4}-p_{y,3} \\
e4 & p_{x,1}-p_{x,4} & 0 & 0 & p_{x,4}-p_{x,1} & p_{y,1}-p_{y,4} & 0 & 0 & p_{y,4}-p_{y,1} \\
e5 & p_{x,1}-p_{x,3} & 0 & p_{x,3}-p_{x,1} & 0 & p_{y,1}-p_{y,3} & 0 & p_{y,3}-p_{y,1} & 0 \\ \hline
\end{array}$$

グラフ的マトロイド

$f_{1,1}(F) = |V(F)| - 1$に誘導されるマトロイド

$A_{uv} = \{ (0, \ldots, 0, \overset{u}{\alpha}, 0, \ldots, 0, \overset{v}{-\alpha}, 0, \ldots, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$で表現される線形マトロイド

⬇ 合併

$f_{1,1} + f_{1,1}$ に誘導されるポリマトロイド

$f_{2,2}$ に誘導されるポリマトロイド, $(E, \hat{f}_{2,2})$

$A_{uv} \oplus A'_{uv}$で表現される線形ポリマトロイド

⬇ Dilworth truncation

$f_{2,3}$ に誘導される(ポリ)マトロイド, $(E, \hat{f}_{2,3})$

$(A_{uv} \oplus A'_{uv}) \cap H$で表現される線形（ポリ）マトロイド

２次元一般剛性マトロイド

Remark

- ハイパーグラフ$G=(V,\mathcal{E}), b\colon V\to\mathbb{Z}_+$, 整数$l$に対し,

$$f_b(\mathcal{X})=\sum_{v\in V(\mathcal{X})} b(v)-l\ \ (\mathcal{X}\subseteq E)$$

  は単調劣モジュラ関数. $(V(\mathcal{X})=\bigcup_{e\in\mathcal{X}} e)$

- 計数マトロイド：f_bで誘導されるマトロイド

- 計数マトロイドの線形表現は以下の手順で得られる.
  - 各頂点$v\in V$に対し, $b(v)$次元ベクトル空間W_vを割当てる
  - 各辺$e\in\mathcal{E}$に対し，$W=\bigoplus_{v\in V} W_v$内の線形部分空間$A_e=\bigoplus_{v\in e} W_v$を割当てる
  - 一般的なWの超平面$H_1,\dots,H_l$をl枚用意.
  - 各$e\in\mathcal{E}$に対し$A_e\cap H_1\cap\cdots\cap H_k$から代表ベクトルを選ぶ

第2部　一般剛性マトロイド

- 組合せ的背景((k, l)-疎性を通して)
  - マトロイド
  - ポリマトロイド
  - 単調劣モジュラ関数に誘導される(ポリ)マトロイド
- 剛性マトロイドと疎性マトロイド
  - 1次元
  - 2次元　(Lovasz&YeminiによるLamanの定理の証明)
- アルゴリズム

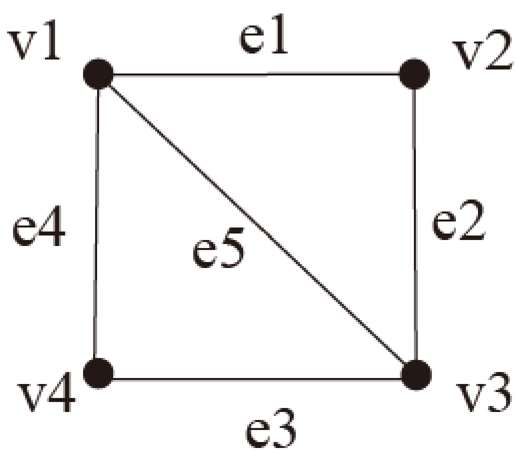
Checking counting conditions (Imai's algorithm 83)

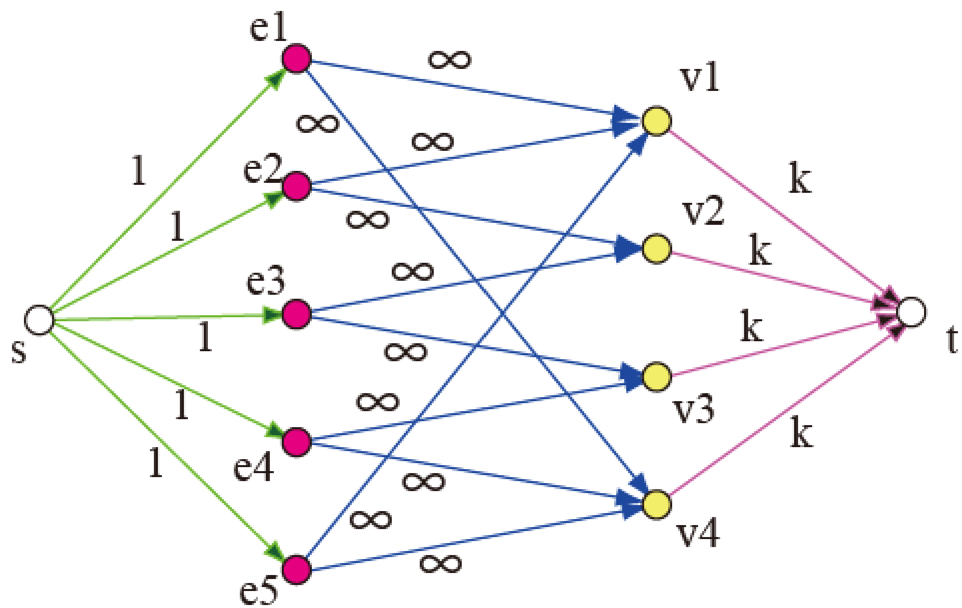
- Problem: Given a graph $G = (V, E)$ and two integers k and d, decide whether G satisfies the following counting condition or not:
  - (i) $|E| = k|V| - d$
  - (ii) $|F| \leqq k|V(F)| - d$ for any nonempty $F \subseteq E$.

- (i) is easy.
- exponentially many conditions in (ii)

Case $d = 0$ (checking $|F| \leqq k|V(F)|$)

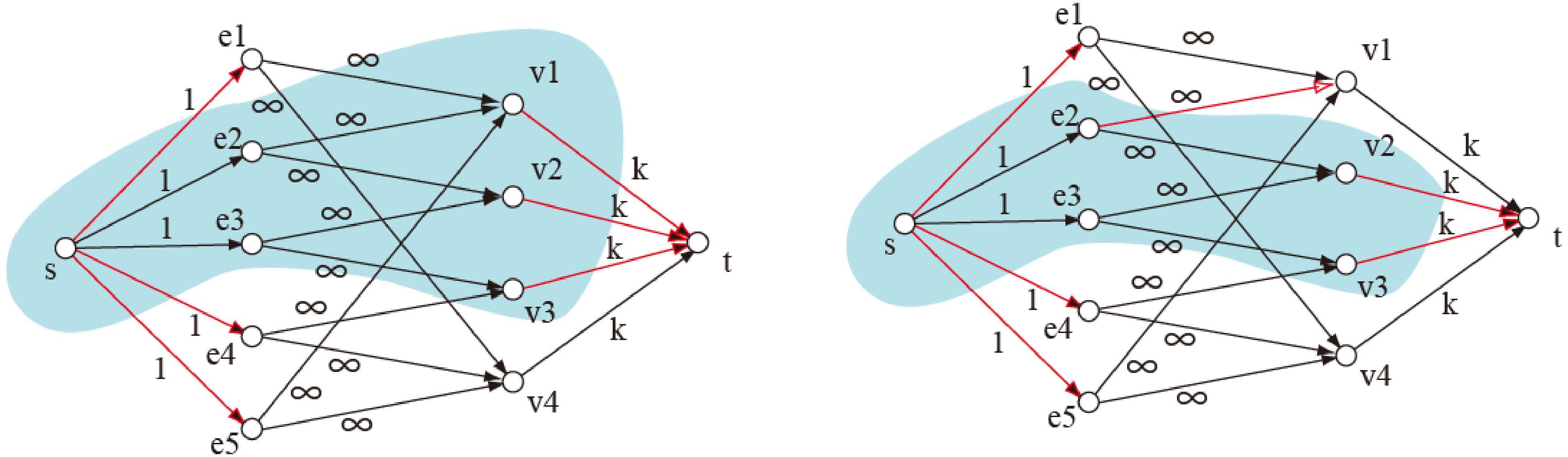
- auxiliary network $N = (D, c)$ for a given graph $G = (V, E)$
  - $D = (V \cup E \cup \{s, t\}, A)$: a digraph on $V \cup E \cup \{s, t\}$, where
    $A := \{(e, v) \in E \times V$: e incident to v in G$\}$ + $\{(s, e) | e \in E\}$ + $\{(v, t) | v \in V\}$





Case $d = 0$ (checking $|F| \leqq k|V(F)|$)

- **Fact:** for any s-t cut $X \subseteq V$ s.t. $F = X \cap E$,
  - $c(X) = |E - F| + k|V(F)|$ if $X \cap V = V(F)$
  - $c(X) > |E - F| + k|V(F)|$ otherwise



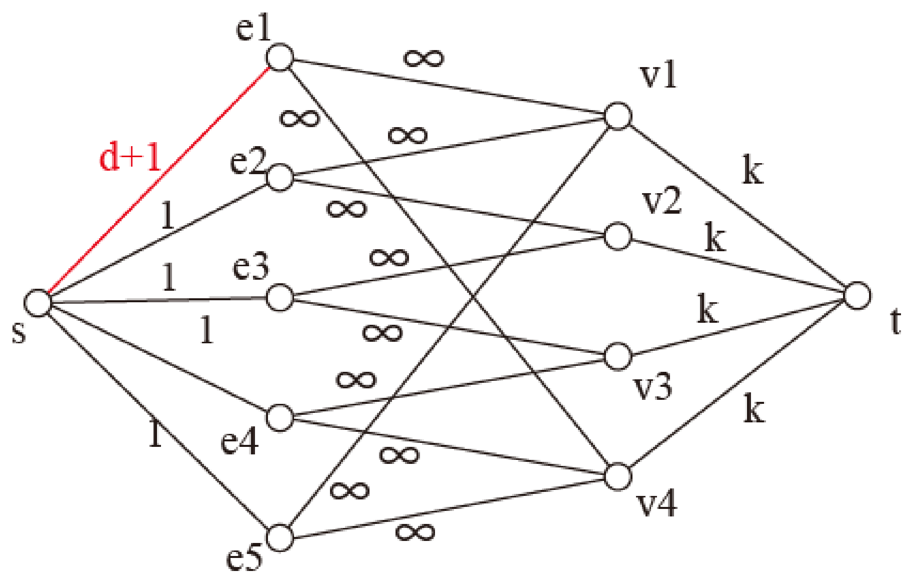
cut X⊆V with F={e2,e3}=X ∩ E

- For any F, $|F| \leqq k|V(F)| \Leftrightarrow |E| \leqq |E - F| + k|V(F)|$
- $\Leftrightarrow |E| \leqq c(X)$ for any s-t cut X
- $\Leftrightarrow$ there exists a flow of the value $|E|$ by max-flow min-cut theorem

Case $d > 0$ (checking $|F| \leqq k|V(F)| - d$)

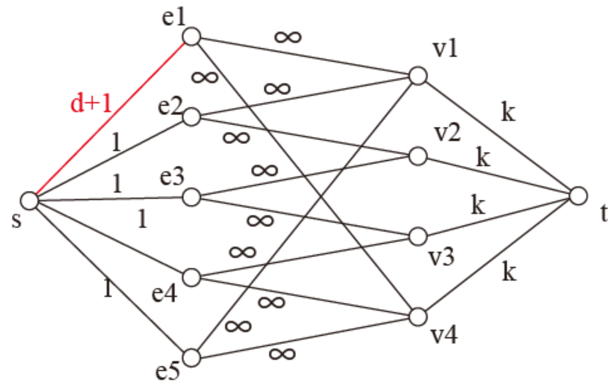
- (assume that G satisfies $|F| \leqq k|V(F)|$ for any F)

- auxiliary network $Ne = (D, c_e)$ for each $e \in E$
  - increase the weight of (s, e) from 1 to $d + 1$



Case $d > 0$

- Fact: for any s-t cut X of N_e with $e \notin F := X \cap E$,
  - $c_e(X) = |E - F| + k|V(F)| + d$ if $X \cap V = V(F)$
  - $c_e(X) > |E - F| + k|V(F)| + d$ otherwise

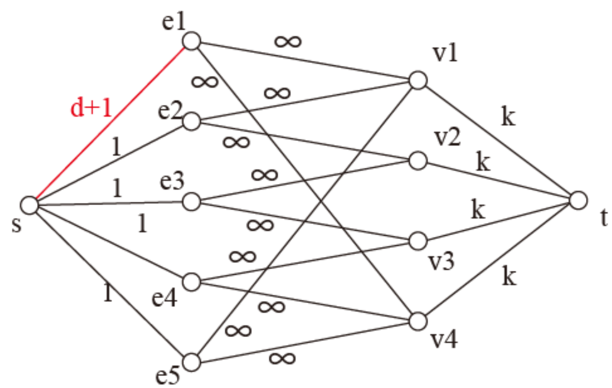


- $|F| \leqq k|V(F)| \Leftrightarrow |E| + d \leqq |E - F| + k|V(F)| + d$
- Since $|F| \leqq k|V(F)|$ for any F,

$|E| + d \leqq c_e(X)$ for any cut X with $e \notin F := X \cap E$

Case d>0

- Fact: for any s-t cut X of N_e $with\ \ e\ \in\ F := X\ \cap\ E,$
  - $c_e(X) = |E - F| + k|V(F)|$ if $X\ \cap\ V = V(F)$
  - $c_e(X) > |E - F| + k|V(F)|$ otherwise



- $|F|\ \leqq\ k|V(F)| - d\ \Leftrightarrow\ |E| + d\ \leqq\ |E - F| + k|V(F)|$
- $|F|\ \leqq\ k|V(F)| - d$ for F containing $e\ \Leftrightarrow\ |E| + d\ \leqq\ c_e(X)$ for any cut X
- $\Leftrightarrow$ there exists a flow with the value $|E| + d$ by MFMC theorem

- Check the value of max-flow of N_e for each $e\ \in E$
- $\Rightarrow\quad \underbrace{O(n^{3/2})}_{\text{compute a max-flow of } N} \quad + \quad \underbrace{O(dn)}_{\text{augment the flow in } Ne} \quad \times \quad \underbrace{(kn - d)}_{\text{\# edges}} \quad = \quad O(kdn^2)$

ランク計算

- 補助グラフを逐次的に作っていくことで$O(n^2)$で計算可能
  - 一般のk,l:　$O(nm)$時間 (Imai83, Sugihara85)
  - $k=l$:　$O(n\sqrt{m+n\log n})$時間 (Gabow and Wstermann92)
  - $k=2, l=3$:　$O(n^2)$時間 (Gabow and Westermann92)
  - 一般のk,l:　$O(n^2)$時間 (Berg&Jordan03, Lee&Streinu08)
    - pebble game algorithm (Jacobs&Thorpe1995, Chubynsky2005)
- 未解決問題：o(n^2)アルゴリズムの開発
  - 定数時間近似アルゴリズム ($\pm\epsilon n$誤差) (Itoh, T., Yoshida11)