

多項式最適化入門

村松正和

電気通信大学
情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

2012/7/12 at 京都大学数理解析研究所

今日の目標

POP の SDP 緩和の真髄を理解する

$$f_0(x) - \theta = \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i$$

上の等式を指差して議論できるようになる
 σ_i が太って見えるようになる

- ▶ Quadratic Module ? ああ、アルキメデス的でないといけな
いね、あれは。
- ▶ Putinar の補題 ? 証明したことあるよ。
イデアルの使い方が巧妙なんだよね～

... などと 言えるようになる

今日のプログラム

-
- | | |
|-----|--------------------------|
| 第1部 | POP の SDP 緩和 |
| 第2部 | 非負多項式と SOS |
| 第3部 | POP の SOS 緩和 |
| | 昼休み |
| 第4部 | 演習 |
| 第5部 | Putinar の補題の証明 (黒板を使います) |
| 第6部 | (万一時間があれば) 現在の研究の方向 |
-

POP: Polynomial Optimization Problem – 多項式最適化問題

SDP: SemiDefinite Program – 半正定値計画問題

SOS: Sum Of Squares – 自乗和多項式

Outline

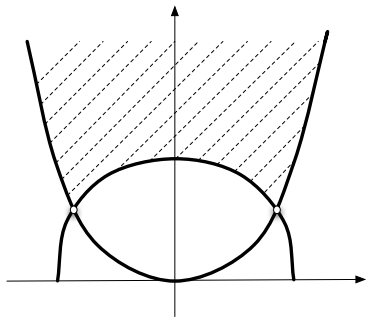
POP の SDP 緩和の例

非負多項式と SOS

POP の SOS 緩和

POP の例

$$\langle * \rangle \begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s. t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ & -x_1^2 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$



最適値 : $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} = 0.78615\dots$

SDP 緩和の準備 1: 単項式ベクトル

▶ 単項式ベクトル

$$u_2(x) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)^T$$

— 次数 2 以下の単項式を全て並べたベクトル

- ▶ $u_r(x)$: 変数 x について r 次以下の単項式を全て (一定の順序で) 並べたベクトル (単項式ベクトル)
- ▶ $u_r(x)$ の長さは?

$$s(n, r) = \binom{n+r}{r}$$

モーメント行列

$M_r(x) = u_r(x)u_r(x)^T$: モーメント行列

モーメント行列

$M_r(x) = u_r(x)u_r(x)^T$: モーメント行列

$$M_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix}$$

モーメント行列

$M_r(x) = u_r(x)u_r(x)^T$: モーメント行列

$$M_2(x) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ \hline x_1^2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & x_2^4 \end{array} \right)$$

モーメント行列

$M_r(x) = u_r(x)u_r(x)^T$: モーメント行列

$$M_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix}$$

- $s(n, r) \times s(n, r)$ の対称行列
- $2r$ 次以下の全ての単項式が現れる ($s(n, 2r)$ 個)

モーメント行列

$M_r(x) = u_r(x)u_r(x)^T$: モーメント行列

$$M_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix}$$

- $s(n, r) \times s(n, r)$ の対称行列
- $2r$ 次以下の全ての単項式が現れる ($s(n, 2r)$ 個)
- 任意の $v \in \mathbb{R}^{s(n, r)}$ に対して

$$v^T M_r(x) v = v^T u_r u_r(x)^T v = (u_r(x)^T v)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow M_1(x)$ は半正定値: ($M_r(x) \succeq 0$ と書く)

SDP 緩和の例: Step 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s. t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \quad \leftarrow M_0(x) = 1 \text{ をかける} \\ & (-x_1^2 + x_2) \geq 0 \quad \leftarrow M_1(x) \text{ をかける} \\ & \quad \quad \quad \leftarrow M_2(x) \succeq 0 \text{ を置く} \end{array} \right.$$

注: 制約に現れる最高次数が 4 となるように次数を決めたモーメント行列をかけている。

SDP 緩和の例: Step 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & x_2 \\ \text{s. t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ & (-x_1^2 + x_2) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{array} \right) \succeq 0 \\ & \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ \hline x_1^2 & x_1^3 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & x_2^4 \end{array} \right) \succeq 0 \end{array} \right.$$

- ▶ $r > 2$ でも同様の問題は考えられる
- ▶ r は **緩和次数** と呼ばれる

SDP 緩和の例: Step 1

$$\langle * \rangle \left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ \left(\begin{array}{c|cc} -x_1^2 + x_2 & -x_1^3 + x_1x_2 & -x_1^2x_2 + x_2^2 \\ \hline -x_1^3 + x_1x_2 & -x_1^4 + x_1^2x_2 & -x_1^3x_2 + x_1x_2^2 \\ -x_1^2x_2 + x_2^2 & -x_1^3x_2 + x_1x_2^2 & -x_1^2x_2^2 + x_2^3 \end{array} \right) \succeq 0 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ \hline x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{array} \right) \succeq 0 \end{array} \right.$$

SDP 緩和の例: Step 1

$$\langle * \rangle \left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ \left(\begin{array}{c|cc} -x_1^2 + x_2 & -x_1^3 + x_1x_2 & -x_1^2x_2 + x_2^2 \\ \hline -x_1^3 + x_1x_2 & -x_1^4 + x_1^2x_2 & -x_1^3x_2 + x_1x_2^2 \\ -x_1^2x_2 + x_2^2 & -x_1^3x_2 + x_1x_2^2 & -x_1^2x_2^2 + x_2^3 \end{array} \right) \succeq 0 \\ \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \hline x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ \hline x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{array} \right) \succeq 0 \end{array} \right.$$

$\langle * \rangle$ は $\langle * \rangle$ と同じ許容領域を持つ (等価な問題)

線形化

$$x_1^a x_2^b \mapsto y_{ab}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \min \quad y_{01} \\ \text{s. t.} \quad y_{40} + y_{04} - 1 \geq 0 \\ \left(\begin{array}{c|cc} -y_{20} + y_{01} & -y_{30} + y_{11} & -y_{21} + y_{02} \\ -y_{30} + y_{11} & -y_{40} + y_{21} & -y_{31} + y_{12} \\ -y_{21} + y_{02} & -y_{31} + y_{12} & -y_{22} + y_{03} \end{array} \right) \succeq O \\ \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & y_{10} & y_{01} & y_{20} & y_{11} & y_{02} \\ \hline y_{10} & y_{20} & y_{11} & y_{30} & y_{21} & y_{12} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} & y_{21} & y_{12} & y_{03} \\ \hline y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{02} & y_{12} & y_{13} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \end{array} \right) \succeq O \end{array} \right. \end{array}$$

$\langle * \rangle$ は $\langle * \rangle (= \langle * \rangle)$ の (SDP) 緩和問題

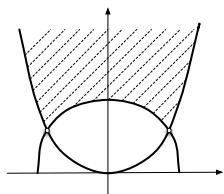
$\langle * \rangle$ の最適解 x^* とすれば、 $y_{ab} = (x_1^*)^a (x_2^*)^b$ は許容解)

SDP 緩和の数値実験

$\bar{\zeta}_r$: 緩和次数 r の SDP 緩和問題に対し、SeDuMi が返した値

r	2	3	4	5	6	7
$\bar{\zeta}_r$	0.0000	0.0000	0.0024	0.0761	0.6813	0.7862

▶ 緩和次数 $r = 7$ で最適値に到達



最適値 : $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} = 0.78615\dots$

例のまとめ

1. POP に緩和次数 r に基づき、
 - ▶ 各制約に対して最大次数が $2r$ または $2r - 1$ になるようなサイズのモーメント行列をかける
 - ▶ $M_r(x) \succeq 0$ という制約を置く.
2. 結果としてできる最適化問題 $\langle * \rangle$ は
 - ▶ 多項式行列が半正定値という制約を含む問題
 - ▶ $\langle * \rangle$ と等価な問題
3. $\langle * \rangle$ を線形化して SDP $\langle * \rangle$ に変換する
4. 様々な緩和次数 r について $\langle * \rangle$ を構成して解いたところ、 $r = 7$ で $\langle * \rangle$ の最適値が得られた

なぜこうなるのか？ を理解することが今日の主題

POP の一般形

Polynomial Optimization Problem (POP)

$$\langle POP \rangle \begin{cases} \min & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & f_i(\mathbf{x}) \geq 0 \ (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

- ▶ $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: polynomial.
- ▶ $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, m)$: polynomial.

注意

1. n は変数の数, m は制約多項式の数
2. f_i は一般的な多変数多項式
⇒ 非常に柔軟なモデリングが可能

多項式計画のあらすじ

- ▶ (事実) $\langle POP \rangle$ は NP 困難.
- ▶ (方法) $\langle POP \rangle$ の最適値を計算する SDP の列を構成.
- ▶ (常識) SDP は効率的に最適解を計算可能
- ▶ (定理) SDP の「最適値の列」は (ある仮定の下で) $\langle POP \rangle$ の最適値に収束.
- ▶ (問題) 実際の数値計算は (いろいろな意味で) 困難.

POP から SDP へ至る 2 つの道

1. SDP 緩和

$\langle POP \rangle$ へ妥当不等式を追加した後、線形緩和することにより SDP を導く (妥当不等式の入れ方がキモ)

2. SOS 緩和

$\langle POP \rangle$ を SOS 多項式を使って緩和する。
(最終的には SOS 多項式を半正定値行列を用いて表現することにより、SDP となる.)

SDP 緩和と SOS 緩和は互いに双対

今は意味がわからなくて構いません。
とりあえずここで一休み

Outline

POP の SDP 緩和の例

非負多項式と SOS

POP の SOS 緩和

準備

- ▶ 単項式 $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$).
- ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が (n 変数) 多項式とは...

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in G} f_\alpha \mathbf{x}^\alpha \text{ for every } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- ▶ $G \in \mathbb{Z}_+^n$: 有限集合
- ▶ $f_\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in G$)
- ▶ n 変数多項式の集合: $\mathbb{R}[x]$
- ▶ r 次以下の n 変数多項式の集合: $\mathbb{R}[x]_r$
- ▶ サポート $\text{supp}(f) = \{ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \mid f_\alpha \neq 0 \}$
- ▶ 次数 $\deg(f) = \max \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mid \alpha \in \text{supp}(f) \}$

非負多項式と SOS 多項式

- ▶ 定義: f が非負多項式 $\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ 定義: f が SOS 多項式 $\Leftrightarrow$ ある多項式 $p_1, \dots, p_q$ が存在して $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q p_i(\mathbf{x})^2$ と書ける.
- ▶ 明らかに f が SOS ならば非負.
- ▶ 逆は真でない.
例: Motzkin Polynomial $x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$
- ▶ SOS 多項式の集合: Σ
- ▶ $2r$ 次以下の SOS 多項式の集合: $\Sigma_r = \Sigma \cap \mathbb{R}[x]_{2r}$

非負多項式と SOS 多項式の関係

以下の場合に非負多項式 = SOS (n : 変数の数, r : 次数)

- ▶ $n = 1$
- ▶ $r = 2$
- ▶ $n = 2$ and $r = 4$

(余談) ヒルベルトの第 17 問題: f が非負多項式のとき, ある SOS 多項式 g が存在して fg が SOS 多項式となる.

1927 年 Artin により肯定的に解決.

SOS と半正定値行列

- ▶ 単項式ベクトル $\mathbf{u}_r(\mathbf{x})$: r 次以下の単項式を並べたもの
例:

$$\mathbf{u}_2(x_1, x_2)^T = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$$

- ▶ $2r$ 次多項式 f が SOS

$$\Leftrightarrow \exists X \succeq 0 \text{ such that } f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_r(\mathbf{x})^T X \mathbf{u}_r(\mathbf{x}) \text{ for any } \mathbf{x}.$$

例:

$$2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

- ▶ 多項式が SOS であることは多項式時間でチェック可能

Outline

POP の SDP 緩和の例

非負多項式と SOS

POP の SOS 緩和

POP の(ある)双対

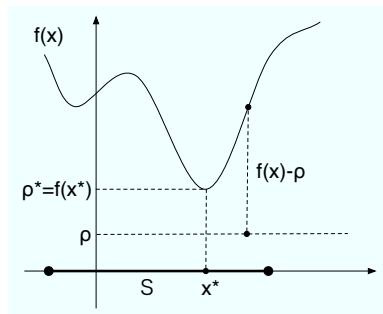
POP:

$$\theta^* = \inf \{ f_0(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in K \}$$

where $K \equiv \{ \mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) \geq 0 \ (i = 1, \dots, m) \}$.

POP の双対

$$\theta^* = \sup \{ \theta \mid f_0(\mathbf{x}) - \theta \geq 0 \ (\mathbf{x} \in K) \}$$



K 上で非負の多項式

$$\theta^* = \sup \{ \theta \mid f_0(\mathbf{x}) - \theta \geq 0 \ (\mathbf{x} \in K) \}$$

$$\text{where } K \equiv \{ \mathbf{x} \mid f_i(\mathbf{x}) \geq 0 \ (i = 1, \dots, m) \}.$$

$$\sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i \quad (\sigma_i \in \Sigma, \ i = 0, \dots, m)$$

は K 上で非負.

もし $x \in K$ なら $\forall i, g_i(x) \geq 0$ なので

$$\sigma_0(x) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(x) f_i(x) \geq 0.$$

(逆は成り立たない)

POP の SOS 緩和

$$\theta^* = \sup \{ \theta \mid f_0(\mathbf{x}) - \theta \geq 0 \ (\mathbf{x} \in K) \}$$

↓ 条件を強める

$$\bar{\theta} = \sup \left\{ \theta \mid f_0(\mathbf{x}) - \theta = \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i \right\}$$

ただし $\sigma_i \in \Sigma$ ($i = 1, \dots, m$).

▶ $\bar{\theta} \leq \theta^*$ (SOS 緩和)

▶ SDP へ:

σ_0 , および各 $\sigma_i f_i$ に現れる次数の最大値を $2r$ に制限
(r は緩和次数)

$$\sigma_i \in \Sigma_{r_i} \ (i = 0, \dots, m)$$

ただし $r_0 = r, r_i = r - \lceil \deg(f_i)/2 \rceil$ ($i = 1, \dots, m$).

SOS 緩和に対応する SDP

$$\sigma_i \in \Sigma_{r_i} \text{ に対して } f_0(\mathbf{x}) - \theta = \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i$$

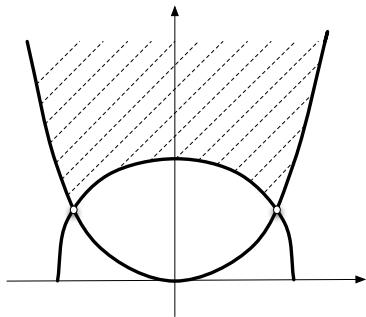
$\Updownarrow$

$$f_0(x) - \theta = u_r(x)^T X_0 u_r(x) + \sum_{i=1}^m u_{r_i}(x)^T X_i u_{r_i}(x) f_i(x)$$

- ▶ $X_i \in \mathbb{S}_+^{s(n, r_i)}$ ($i = 0, \dots, m$).
- ▶ 左辺の多項式の係数=右辺の多項式の係数
⇒ X_i の成分に関する等式条件
- ▶ θ の最大化問題

例 (再揭)

$$\langle * \rangle \begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s. t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ & -x_1^2 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$



最適値： $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} = 0.78615\dots$

SDP 緩和問題 (再掲)

$$\left\langle * \right\rangle \left\{ \begin{array}{ll} \min & y_{01} \\ \text{s. t.} & y_{40} + y_{04} - 1 \geq 0 \\ & \left(\begin{array}{c|ccc} -y_{20} + y_{01} & -y_{30} + y_{11} & -y_{21} + y_{02} \\ -y_{30} + y_{11} & -y_{40} + y_{21} & -y_{31} + y_{12} \\ -y_{21} + y_{02} & -y_{31} + y_{12} & -y_{22} + y_{03} \end{array} \right) \succeq O \\ & \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & y_{10} & y_{01} & y_{20} & y_{11} & y_{02} \\ \hline y_{10} & y_{20} & y_{11} & y_{30} & y_{21} & y_{12} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} & y_{21} & y_{12} & y_{03} \\ \hline y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{02} & y_{12} & y_{13} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \end{array} \right) \succeq O \end{array} \right.$$

1×1 , 3×3 , 6×6 の半正定値制約

例の SOS 緩和

$$\langle * \rangle \begin{cases} \min & x_2 \\ \text{s. t.} & x_1^4 + x_2^4 - 1 \geq 0 \\ & -x_1^2 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

↓ SOS 緩和

$$x_2 - \theta =$$

$$u_2(x)^T X_0 u_2(x) + X_1(x_1^4 + x_2^4 - 1) + u_1(x)^T X_2 u_1(x)(-x_1^2 + x_2)$$

ただし $X_0 \succeq 0$, $X_1 \geq 0$, $X_2 \succeq 0$

- ▶ 定数項: $-\theta = (X_0)_{11} - X_1$
- ▶ x_1 : $0 = 2(X_0)_{12}$
- ▶ x_2 : $1 = 2(X_0)_{13} + (X_2)_{11}$
- ▶ x_1^2 : $0 = (X_0)_{22} + 2(X_0)_{14} - (X_2)_{11}$
- ▶ $\vdots$

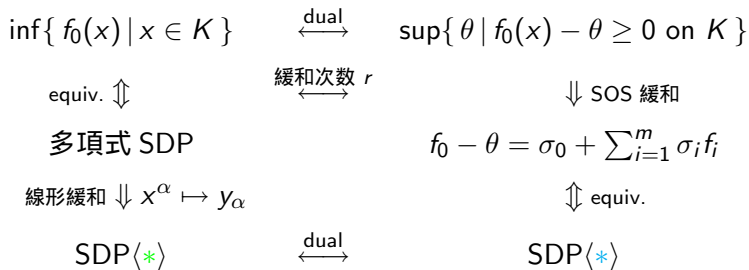
SOS 緩和の SDP

$$\langle * \rangle \left\{ \begin{array}{ll} \min & -\theta \\ \text{s.t.} & -\theta = (X_0)_{11} - X_1 \\ & 0 = 2(X_0)_{12} \\ & 1 = 2(X_0)_{13} + (X_2)_{11} \\ & 0 = (X_0)_{22} + 2(X_0)_{14} - (X_2)_{11} \\ & \vdots \\ & X_0 \succeq 0, X_1 \geq 0, X_2 \succeq 0. \end{array} \right.$$

$\langle * \rangle$ と $\langle * \rangle$ は互いに双対

$\langle * \rangle$ はいわゆる等式標準形の SDP

関係図



定理 1

K に内点許容解があれば、

1. $\langle * \rangle$ の最適値 = $\langle * \rangle$ の最適値
2. もし最適値が有界なら, $\langle * \rangle$ には最適解が存在

▶ $x \in K$ が内点許容解 $\Leftrightarrow f_1(x) > 0, \dots, f_m(x) > 0$.

cf. 錐線形計画の双対定理:

$$\begin{aligned}\theta_P &= \inf \{ cx \mid Ax = b, x \in \mathcal{K} \}, \\ \theta_D &= \sup \left\{ by \mid s + A^T y = c, s \in \mathcal{K}^* \right\}\end{aligned}$$

において θ_P (resp. θ_D) に内点許容解があれば、 $\theta_P = \theta_D$ であり、 θ_D (resp. θ_P) には最適解が存在する。

Putinar の補題

定義 $(f_1, \dots, f_m)$ で生成される Quadratic Module (QM)

$$Q(f_1, \dots, f_m) = \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i \mid \sigma_i \in \Sigma \ (i = 0, \dots, m) \right\}$$

注: $f \in Q(f_1, \dots, f_m) \Rightarrow f(x) \geq 0 (\forall x \in K)$

定理 2

$Q(f_1, \dots, f_m)$ がアルキメデスのならば、 $\theta_r \uparrow \theta^*$ as $r \rightarrow \infty$.

Putinar の補題

$Q(f_1, \dots, f_m)$ がアルキメデスの ならば、

$$f(x) > 0 \ (\forall x \in K) \Rightarrow f \in Q(f_1, \dots, f_m)$$

Quadratic Module

定義 $Q \subseteq \mathbb{R}[x]$ が Quadratic Module

$$\Leftrightarrow 1 \in Q, \quad Q + Q \subseteq Q, \quad \Sigma Q \subseteq Q$$

cf. $(f_1, \dots, f_m)$ で生成される Quadratic Module (QM)

$$Q(f_1, \dots, f_m) = \left\{ \sigma_0 + \sum_{i=1}^m \sigma_i f_i \mid \sigma_i \in \Sigma \ (i = 0, \dots, m) \right\}$$

- ▶ $\Sigma \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}[x]$.
- ▶ $Q(f_1, \dots, f_m) \subseteq \mathbb{R}[x]$ は凸錐
- ▶ $-1 \notin Q \Leftrightarrow Q$ は proper

アルキメデスの QM

QM Q がアルキメデスの

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists u \in Q, \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq 0\}$ がコンパクト

$$\left(\begin{array}{l} \text{cf.} \quad \text{実数 } \mathbb{R} \text{ がアルキメデスの} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ such that } x \leq n. \end{array} \right)$$

定理 3. 次の 4 条件は等価

1. Q がアルキメデスの
2. $\exists N \in \mathbb{N}$ such that $N - \sum_{j=1}^n x_j^2 \in Q$
3. $\forall p \in \mathbb{R}[x], \exists N \in \mathbb{N}$ such that $N \pm p \in Q$
4. $\exists p_1, \dots, p_s$ such that $p_l \in Q$ for every $l \subseteq \{1, \dots, n\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_s(x) \geq 0\}$ is compact.

ただし $p_l(x) = \prod_{i \in l} p_i(x)$.

演習問題

1. Putinar の補題を用いて定理 2 を証明せよ
2. 定理 3 において、 $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 4$ はほぼ自明であることを確認せよ。
3. QM Q が $\text{proper} \Leftrightarrow Q \neq \mathbb{R}[x]$ を証明せよ。
4. QM Q に対し、 $Q \cap -Q$ がイデアルになることを示せ。
5. QM Q が極大 proper のとき $Q \cup -Q = \mathbb{R}[x]$ を示せ。
6. $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}[x]$ をイデアルとする。ある点 $a \in \mathbb{R}^n$ に関して $x_j - a_j \in \mathcal{I} \ (j = 1, \dots, n)$ であるとき、任意の $f \in \mathbb{R}[x]$ に関して $f - f(a) \in \mathcal{I}$ であることを証明せよ。

注 1: $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ がイデアル $\Leftrightarrow 0 \in I, I + I \subseteq I, \mathbb{R}[x]I \subseteq I$.

注 2: Q が極大 $\text{proper} \Leftrightarrow Q$ を真に含む QM は $R[x]$ のみ