

組合せ最適化セミナー 反復丸めアルゴリズム 演習問題

問題 1. 全域木問題に対する Covering LP (スライド 29) には制約がグラフ G のサイズに対して指数個存在するが、新しい変数を加えることによって、変数と制約の数が G のサイズの多項式で抑えられるような別の線形計画問題に変換でき、その問題の最適解での変数 x の取る値が元の問題の最適解を与えることが知られている。そのような変換を与えなさい。

問題 2. Degree bounded LP (スライド 47) の端点解 x がすべての $e \in E$ について $x(e) > 0$ を満たすとする。このとき、任意の $X \subseteq V$ について $|E[X]| \leq 2|X| - 3$ であることを示せ。

問題 3. 有向グラフ $D = (V, A)$ と根 $s \in V$ に対する有向木とは、任意の $v \in V \setminus \{s\}$ に対して s から v への有向パスが存在するような D の部分グラフの中で極小なもののことである。辺コスト $c: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられたときにコスト最小の有向木を求める反復丸めアルゴリズムを考えるために、 $f: 2^{V \setminus \{s\}} \rightarrow \{0, 1\}$ を $X \cap Y \neq \emptyset$ を満たす任意の $X, Y \subseteq V \setminus \{s\}$ について $f(X) + f(Y) \leq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$ であるような関数とし、以下の線形計画問題を定義する。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in A} c(e)x(e) \\ \text{s.t.} \quad & x(\delta^-(U)) \geq f(U), \quad U \subseteq V \setminus \{s\}, U \neq \emptyset \\ & x(e) \geq 0, \quad e \in A. \end{aligned}$$

ただし、 $\delta^-(U)$ は $V \setminus U$ から U へ向かう有向辺の集合を指し、 $X \cap Y \neq \emptyset$ を満たす任意の $X, Y \subseteq V \setminus \{s\}$ について、 $\chi(\delta^-(X)) + \chi(\delta^-(Y)) \geq \chi(\delta^-(X \cap Y)) + \chi(\delta^-(X \cup Y))$ が成立することが知られている。 f を非空な集合に対して 1 を返す関数とすれば、この線形計画問題は最小コスト有向木を求める問題を緩和している。

(1) x を上の線形計画問題の端点解とする。このとき、 $x(e) \in \{0, 1\}$ となる辺 $e \in A$ が存在することを示せ。

(2) $\delta^+(v)$ を点 v から出ている辺の集合とする。 $B \subseteq V, b: B \rightarrow \mathbb{R}_+$ として、上の線形計画問題に次の制約を付け加える。

$$x(\delta^+(v)) \leq b(v), \quad v \in B.$$

x がその線形計画問題の端点解であるとき、 $x(e) = 0$ もしくは $x(e) \geq 1/2$ となる辺 $e \in A$ が存在するか、もしくは $|\delta^+(v)| \leq b(v) + 2$ となるような点 $v \in B$ が存在することを示せ。

(3) 任意の点 $v \in B$ の出次数が高々 $b(v)$ であるような有向木が D に存在するとし、OPT をそのような有向木の最小コストであるとす。このとき、コストが高々 2OPT で、任意の $v \in B$ の出次数が高々 $2b(v) + 2$ であるような有向木を計算するアルゴリズムを示せ。

(4) 任意の辺 $e \in A$ は B に含まれる点のどれかから出ているものとする。このとき、 $|\delta^+(v)| \leq b(v) + 2$ となるような点 $v \in B$ が必ず存在することを示せ。

(5) 任意の点 $v \in B$ の出次数が高々 $b(v)$ であるような有向木が D に存在するとす。このとき、任意の $v \in B$ の出次数が $b(v) + 2$ 以下であるような有向木を計算するアルゴリズムを示せ。

問題 4. 賞金収集シュタイナー森問題では、無向グラフ $G = (V, E)$ 、辺コスト $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ 、端点ペア $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k) \in V \times V$ 、ペナルティ $p: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられる。辺集合 $F \subseteq E$ によって連結されていない端点ペアの添え字集合を $I_F \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ と記述すると、 F のコストは $c(F) + p(I_F)$ と定義される。問題の目的はコスト最小の $F \subseteq E$ を求めることである。

この問題に反復丸め法を適用するために、 $(s_1, t_1), \dots, (s_\ell, t_\ell)$ ($\ell \leq k$) をそれまでにアルゴリズムによっ

て連結にすることが決定された端点ペアだとして、以下の線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c(e)x(e) + \sum_{\ell < i \leq k} p(i)y(i) \\ \text{s.t.} \quad & x(\delta(U)) + y(i) \geq 1, \quad U \subset V, i \in \{\ell+1, \dots, k\}, |U \cap \{s_i, t_i\}| = 1 \\ & x(\delta(U)) \geq 1, \quad U \subset V, i \in \{1, \dots, \ell\}, |U \cap \{s_i, t_i\}| = 1 \\ & x(e) \geq 0, \quad e \in E \\ & y(i) \geq 0, \quad i \in \{\ell+1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

(x, y) をこの線形計画問題の端点解とする。 $U \subset V$ に関する一つ目、二つ目の制約を U によって定義されるカット制約と呼ぶ。

(1) 任意の $e \in E$ について $x(e) > 0$, 任意の $i \in \{\ell+1, \dots, k\}$ について $y(i) > 0$ であるとする。線形独立でタイトなカット制約から成る極大族のうち、重複を含むラミナー族によって定義されるものが存在することを示せ。(ヒント: 任意の $X, Y \subseteq V$ について, $\chi(\delta(X)) + \chi(\delta(Y)) \geq \chi(\delta(X \cap Y)) + \chi(\delta(X \cup Y))$ と $\chi(\delta(X)) + \chi(\delta(Y)) \geq \chi(\delta(X \setminus Y)) + \chi(\delta(Y \setminus X))$ が成立することを使う)

(2) $x(e) = 0$ もしくは $x(e) \geq 1/3$ を満たすような辺 $e \in E$ が存在するか, $y(i) = 0$ もしくは $y(i) \geq 1/3$ を満たす $i \in \{\ell+1, \dots, k\}$ が存在することを示せ。

問題 5. A を次の 5 つの条件を満たす $n \times n$ 行列とする。

- (i) A のすべての成分は $+1, 0, -1, \dots, -k$ のいずれかの値を取る。
- (ii) A の各行は少なくとも一つ非零の成分を含む。
- (iii) A の各列は高々一つしか負の成分を含まない。
- (iv) $-i$ (< 0) の成分を含む列は高々 i 個しか $+1$ の成分を持たない。負の成分を含まない列が持つ $+1$ の成分の数は高々 k 個。
- (v) A の列のうち少なくとも一つは、各成分の合計値が 0 にならない。

b を n 次元整数ベクトルとする。このとき、 $Ax = b, x \geq 0$ を満たす n 次元ベクトル x には、 0 の値の成分か、もしくは $1/k$ 以上の値をとる成分が存在することを示せ。

問題 6. V_1, V_2, V_3 を互いに素な点集合とし、 E を V_1, V_2, V_3 それぞれの点を一つずつ含む大きさ 3 のハイパーエッジからなる集合とする。3次元マッチング問題とは、点集合 $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ と辺集合 E からなるハイパーグラフと、非負の辺重み $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられたときに、互いに点を共有しないハイパーエッジの集合 $F \subseteq E$ の中で重み和最大のを求める問題である。 $\delta(v)$ を点 v を含むハイパーエッジの集合とする。 x を以下の線形計画問題の端点解とする。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ \text{s.t.} \quad & x(\delta(v)) \leq 1, \quad v \in V_1 \cup V_2 \cup V_3 \\ & x(e) \geq 0, \quad e \in E. \end{aligned}$$

任意の $e \in E$ について $x(e) > 0$ であるとき、 E に含まれるすべてのハイパーエッジの順序づけ (e_1, e_2, \dots, e_m) のうち以下の条件を満たすようなものが存在することを示せ。

$$x(N[e_i] \cap \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_m\}) \leq 2, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

ただし、 $N[e_i]$ は e_i と点を共有するハイパーエッジからなる集合 (e_i 自身も含む) とする。

問題 7. $G = (V, E)$ を完全グラフ、 $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ を三角不等式を満たす辺コスト、 $R \subseteq V$ とする。 R から生成される部分グラフ $G[R]$ の全域木の最小コストが Hypergraphic LP (スライド 67) の最適値の 2 倍以下となることを示せ。

問題 8. Hypergraphic LP を用いたシュタイナー木問題に対するアルゴリズム (スライド 68) で、 $LP_t \leq (1 - \frac{1}{2M})^{t-1} \text{OPT}$ が成り立つことを示せ。ただし、OPT は最初に与えられた問題に対するシュタイナー木の最小コスト、 LP_t は t 反復目が始まるときの Hypergraphic LP の最適値を指す。