[演習1] $\lambda(G)$ が奇数のとき, G のすべての最小カット集合を木で表現できることを示せ.

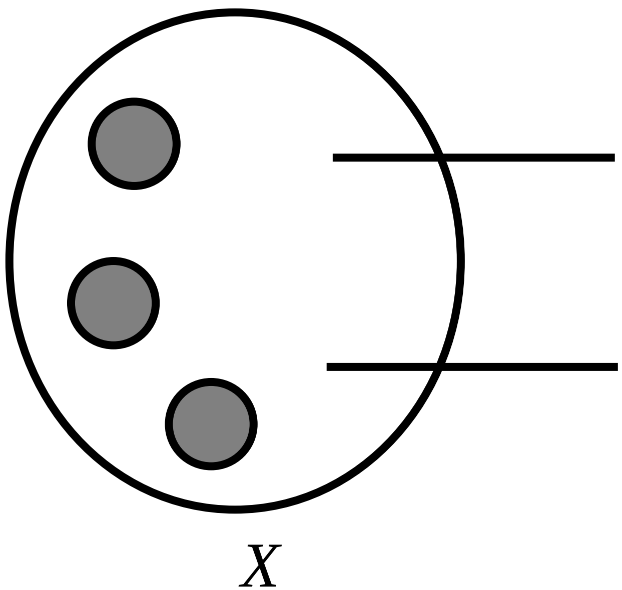
[演習2]

<u>辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G) = k-1$ の場合)</u>

[$G+E'$が k-辺連結であることの証明]

・E': G に加えた辺集合.

・次数2の点の番号付け: H の最小カット X に対し, X 内で連続している.



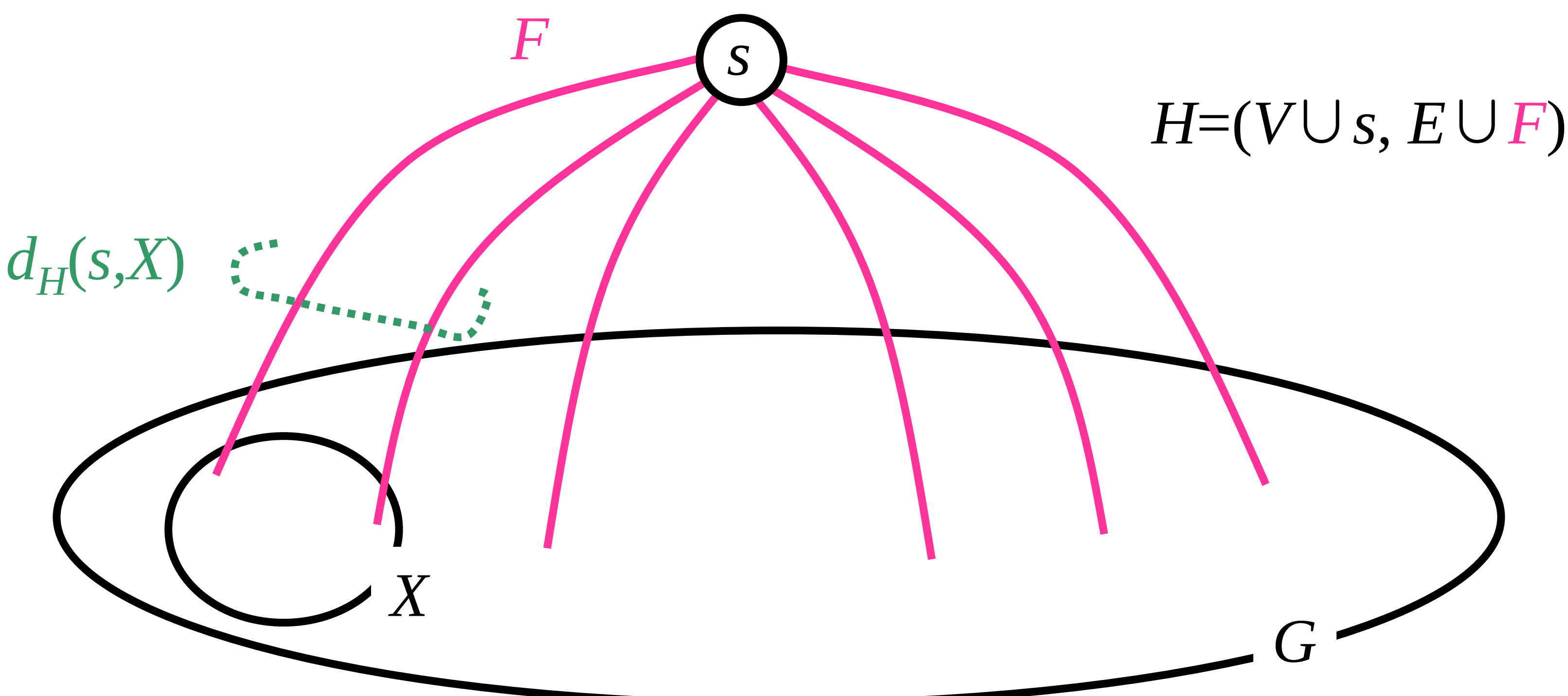
[演習3] $p(X) = k - d_G(X)$ のとき, 以下を示せ.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \forall X \in \chi(G) \qquad (**)$$

$\chi(G) : G$ の極点集合族



極点集合 [Watanabe,Nakamura87]

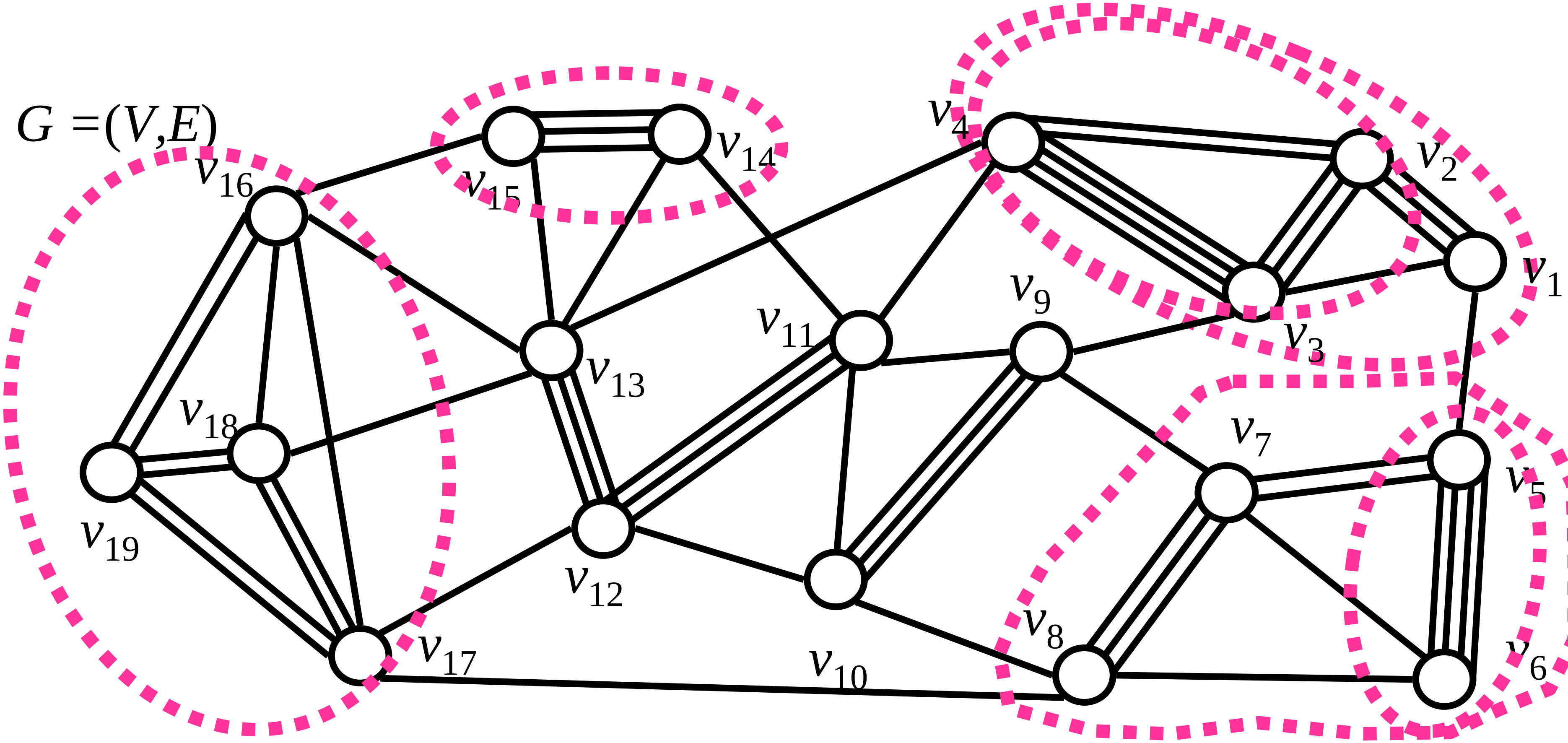
・極点集合 $X \subseteq V$: $\forall Y \subset X$ に対し, $d_G(Y) > d_G(X)$をみたす点集合.

(例1) 1点からなる集合は, 極点集合.

(例2) 極小最小カットX は, 極点集合.

極点集合

$G=(V,E)$

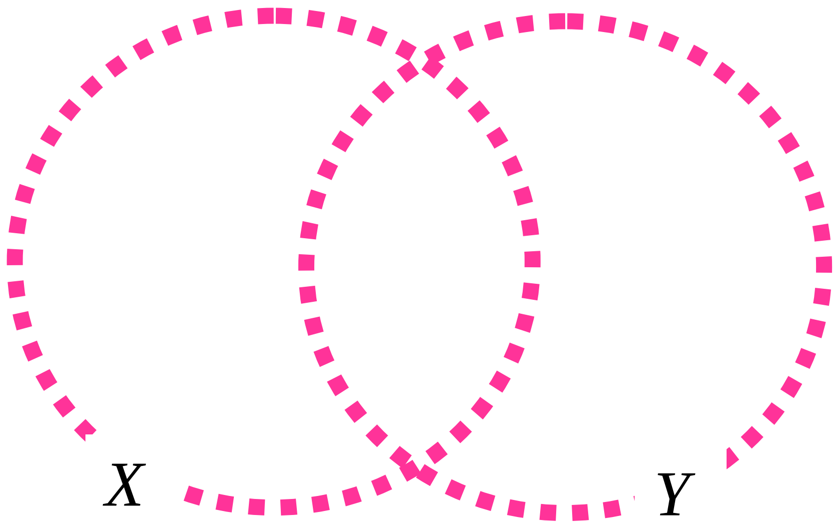


(注) 1点からなる集合は, 省略.

極点集合の族は, ラミナー(laminar)
(i.e., 各2集合X,X'は, $X\cap X'=\phi$, $X\subseteq X'$, or $X'\subseteq X$).

極点集合の族は, ラミナー(laminar)
(i.e., 各2集合X,X'は, $X\cap X'=\phi$, $X\subseteq X'$, or $X'\subseteq X$).

そうでないとすると…



ある極点集合X, Y が交差 (intersect) する (i.e., $X-Y$, $Y-X$, $X\cap Y\neq\phi$).

正モジュラ性より, $d_G(X)+d_G(Y) \geqq \underbrace{d_G(X-Y)}_{>d_G(X)}+\underbrace{d_G(Y-X)}_{>d_G(Y)}$

X,Y: 極点集合より

矛盾 □

[演習4] つぎの定理を証明せよ.

[定理3] [Nutov 05]

仮定: H =($V \cup s$, $E \cup F$) : (*) をみたす.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

p: 対称弱優モジュラ関数.

$\Rightarrow p_{\max} \geqq 2$ の場合, (*) を保存する F の辺の辺分離ペアが存在する.

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$.

(ヒント) p が対称優モジュラの証明と同様に考えられる.

ただし, p の優モジュラ性のみを利用していた箇所は,

優モジュラ性が成り立たない場合 (i.e., 負モジュラ性のみ

成り立つ場合) も考慮する. 負モジュラ性のみを利用していた

箇所も同様.

[演習5] つぎの性質を証明せよ.

r*-増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r^*: 2^V \to Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{G+F}(X) \geqq r^*(X)$, $\phi \neq \forall X \subset V$.

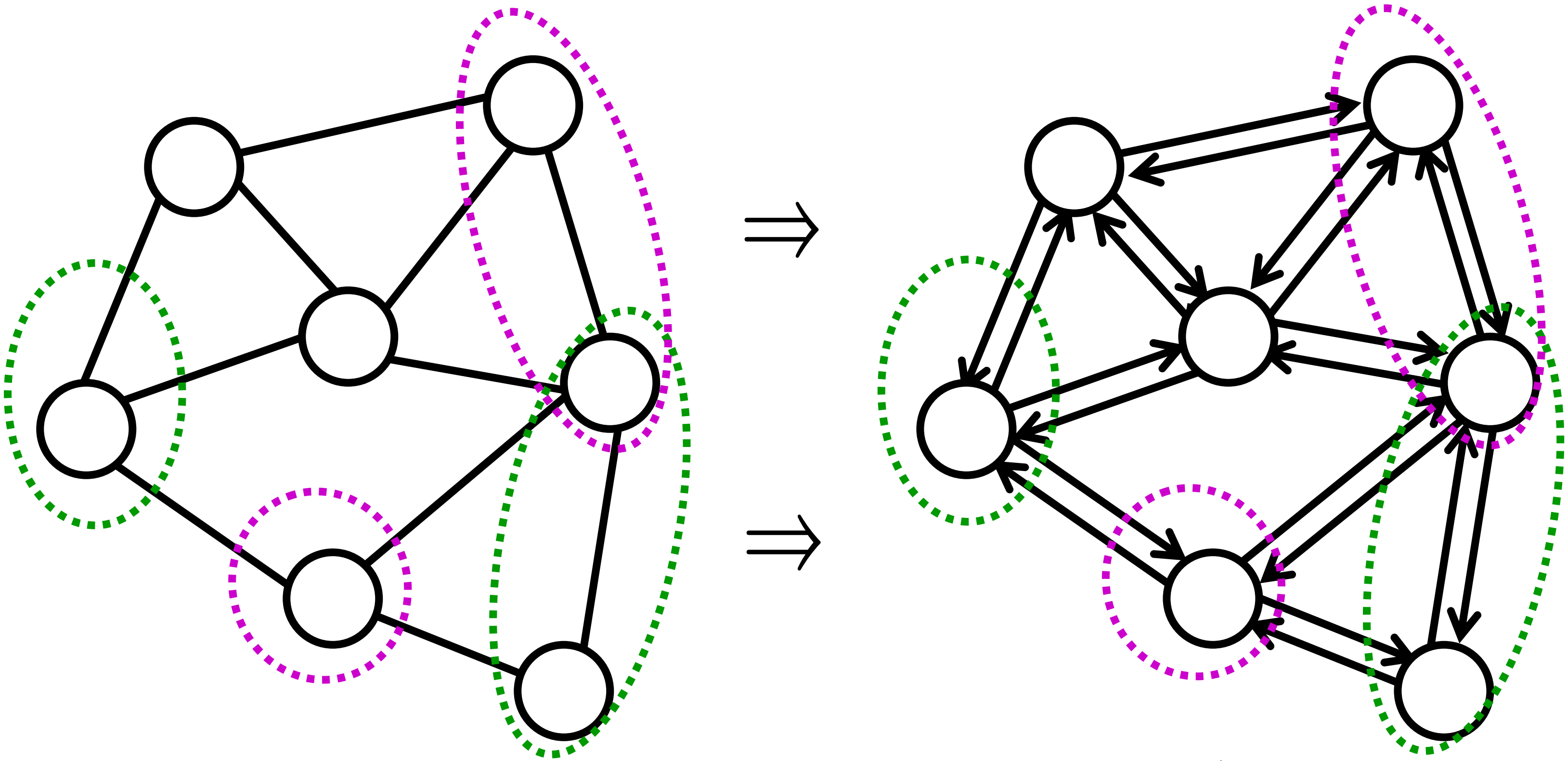
$|F|$: 最小.

有向グラフの問題が, t-倍近似可能 ⇒ 無向グラフの問題が, $2t$-倍近似可能.

有向グラフの問題が, t-倍近似可能 ⇒ 無向グラフの問題が, $2t$-倍近似可能.

(ヒント) 例: AA連結度増大問題

各無向辺を2本の両向きの2辺に置き換える



無向グラフ G, r: $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\rightarrow \mathrm{Z}_+$

有向グラフ $D(G)$, r

$D(G)$に対する t-倍近似の解から, Gに対する $2t$-倍近似解を構成することを考える.