連結度制約を持つネットワーク設計問題について

石井 利昌 (北海道大学)

今日の講演内容

1. イントロダクション
   ・定義: 連結度, 連結度増大問題
2. 無向グラフにおける辺連結度増大問題
   ・連結度を 1 増大する問題
   ・連結度を任意の値に増大する問題
   ・一般化問題
3. 関連問題
   ・供給点配置問題とその一般化問題

定義

グラフ連結度

(1) 辺連結度 (edge connectivity)

(2)点連結度 (vertex connectivity)

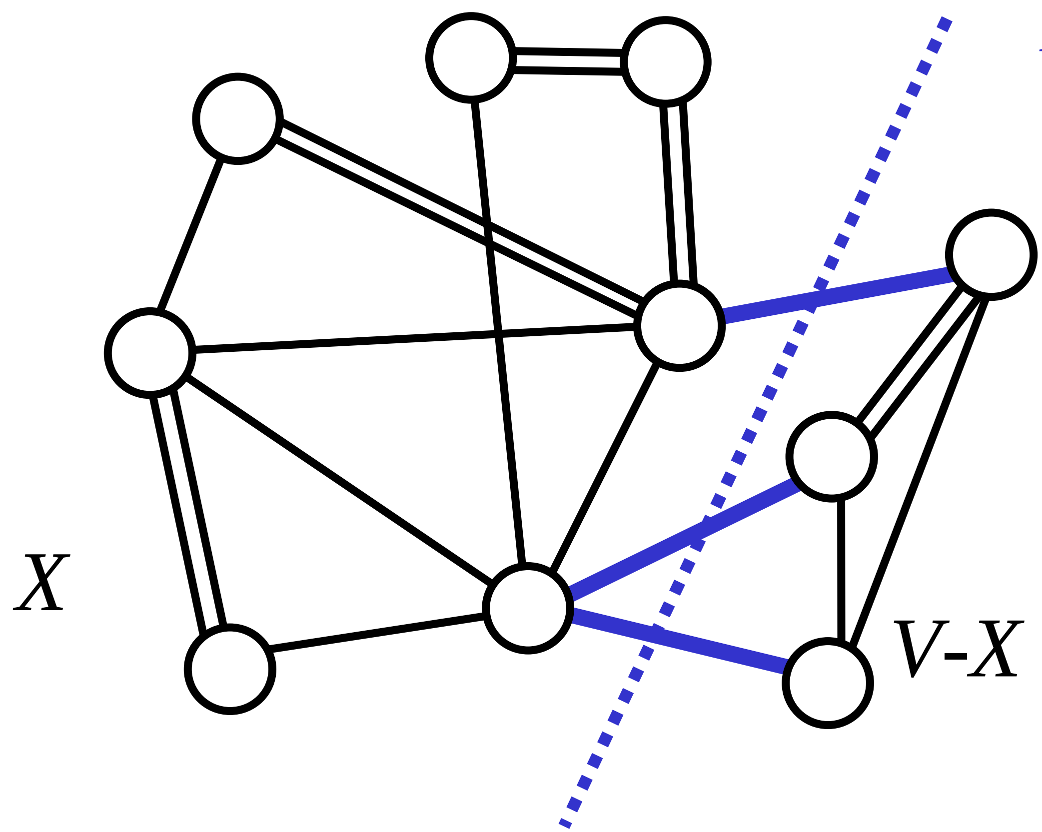
辺連結度

無向グラフ

(辺)カット: X と V-X をまたがる辺集合

単に, カット X と呼ぶ.

$E_G(X,V\text{-}X)$ で表す.



カット X のサイズ

$d_G(X,V\text{-}X)$
$=|E_G(X,V\text{-}X)|$
$=3$

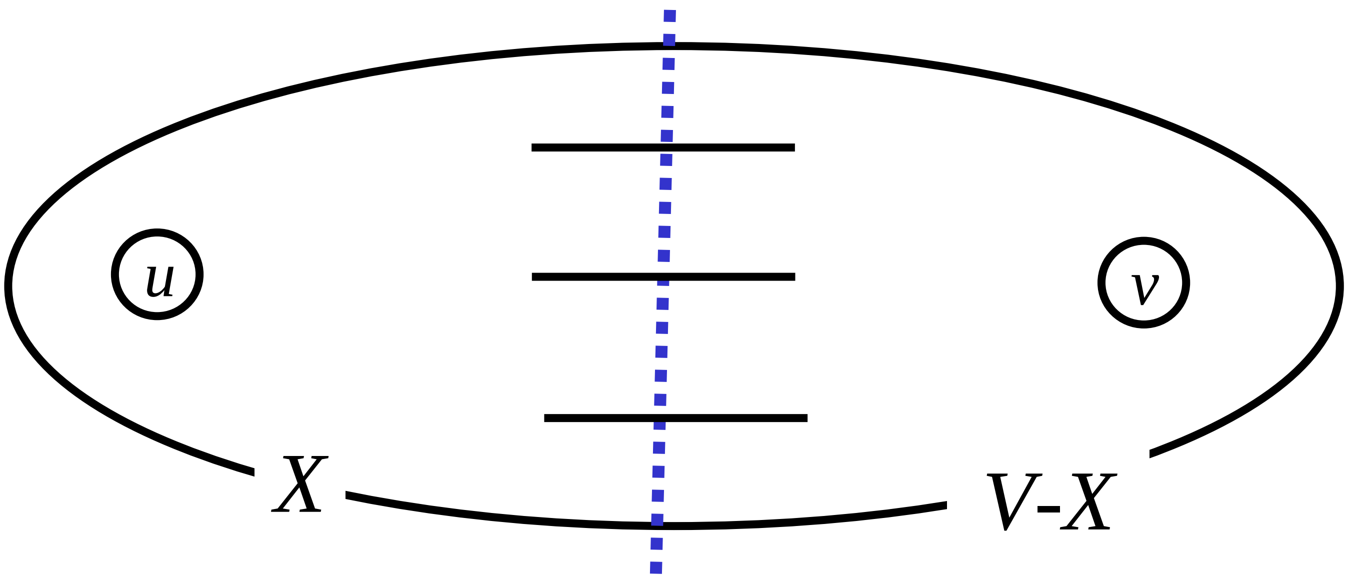
辺連結度

Mengerの定理より,
$\lambda_G(u,v)$ = [u, v 間の互いに辺素なパスの最大数]

無向グラフ

2点 u, v 間の局所辺連結度 (local edge-connectivity)

$\lambda_G(u, v) = \min \{ d_G(X, V\text{-}X) \mid u \in X, v \in V - X \}$



u,vを分ける大きさ最小のカット (最小 (u,v)-カット) により決まる.

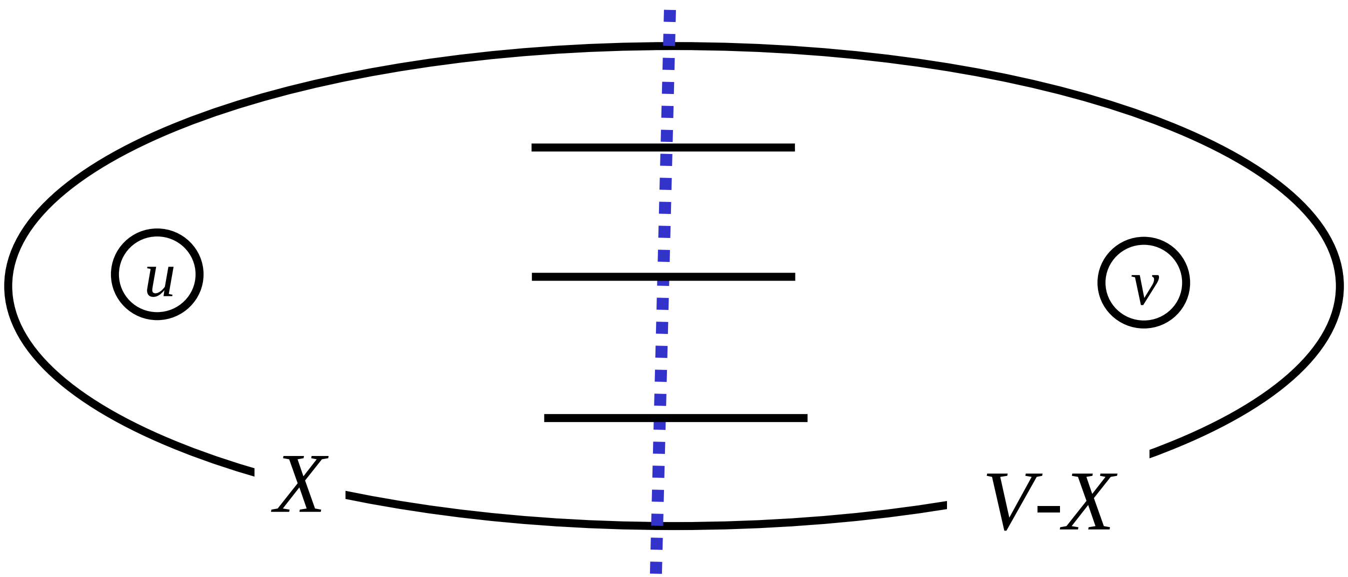
辺連結度

Mengerの定理より,
$\lambda_G(u,v)$ = [u, v 間の互いに辺素なパスの最大数]

無向グラフ

2点 u, v 間の局所辺連結度 (local edge-connectivity)

$\lambda_G(u, v) = \min \{ d_G(X, V\text{-}X) \mid u \in X, v \in V - X \}$



グラフの辺連結度

$\lambda(G) = \min \{ \lambda_G(u, v) \mid u, v \in V \}$

Gの辺連結度$\geq k$:
G は k-辺連結, という

辺連結度

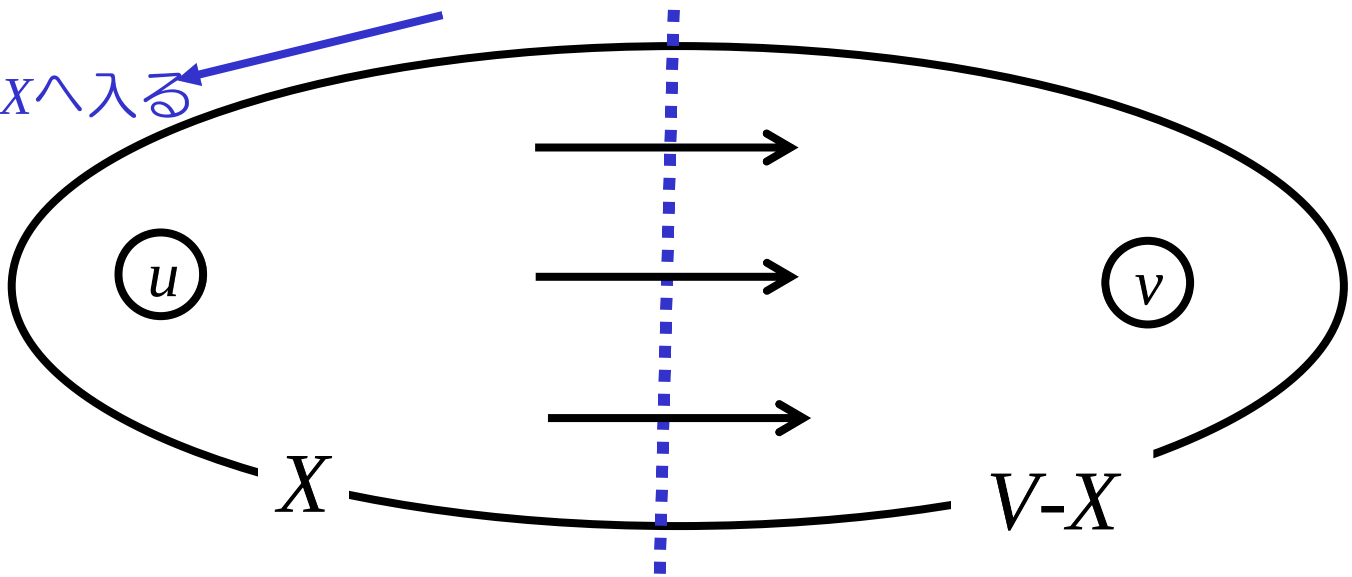
Mengerの定理より,
$\lambda_G(u,v)$ = [u からv への互いに辺素なパスの最大数]

有向グラフ

2点 u, v 間の局所辺連結度 (local edge-connectivity)

$$\lambda_G(u, v) = \min \{\, \underline{d_G(X, V\text{-}X)} \mid u \in X, v \in V - X \,\}$$

X から V-Xへ入る辺の数



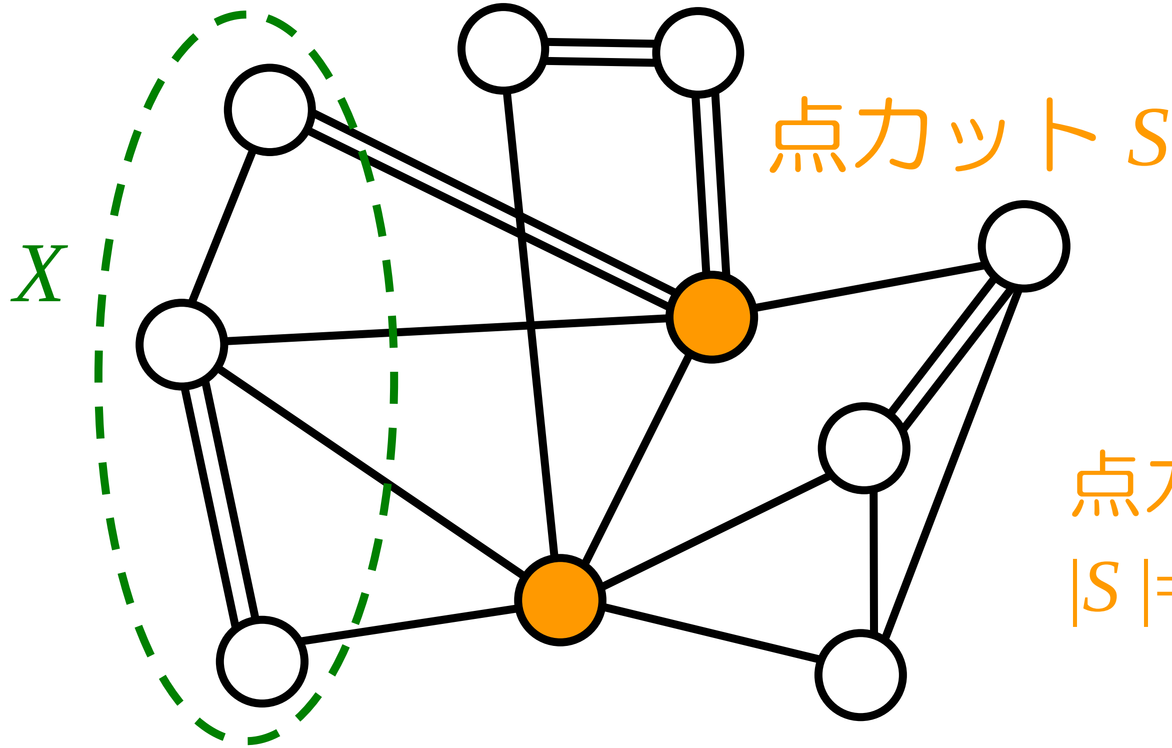
グラフの辺連結度

$$\lambda(G) = \min \{\, \lambda_G(u, v) \mid u, v \in V \,\}$$

点連結度

$N_G(X)$: X の隣接点集合

$N_G(X)=S$



点カットの大きさ

$|S|=2$

点連結度

Mengerの定理より, $(u,v) \notin E$ なら
$\kappa_G(u,v)$ = [u, v 間の互いに点素なパスの最大数]

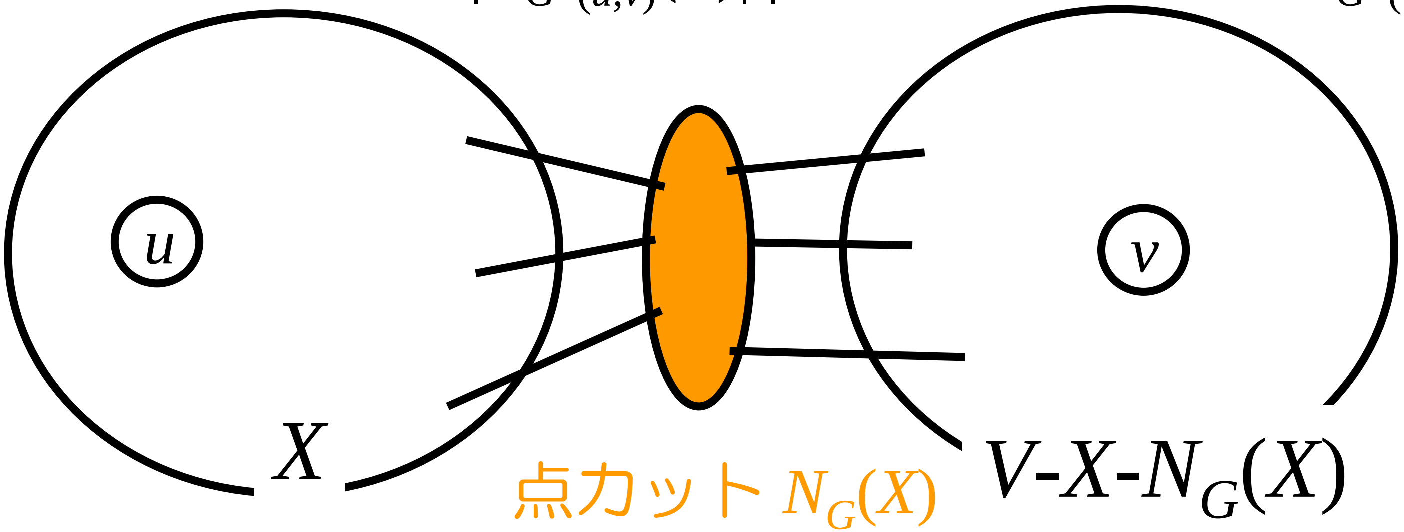
無向グラフ

2点 u, v 間の局所点連結度 (local vertex-connectivity)

・ $(u,v) \notin E \rightarrow \kappa_G(u, v) = \min \{ |N_G(X)| \mid u \in X, v \in V - X - N_G(X) \}$

・ $(u,v) \in E \rightarrow \kappa_G(u, v)$

$= \min \{ |N_{G-(u,v)}(X)| \mid u \in X, v \in V - X - N_{G-(u,v)}(X) \} + 1$



グラフの点連結度

$\kappa(G) = \min \{ \kappa_G(u, v) \mid u, v \in V \}$

Gの点連結度≧k :
G は k-点連結, という

点連結度

Mengerの定理より, $(u,v) \notin E$ なら
$\kappa_G(u,v)$ = [uからvへの互いに点素なパスの最大数]

有向グラフ

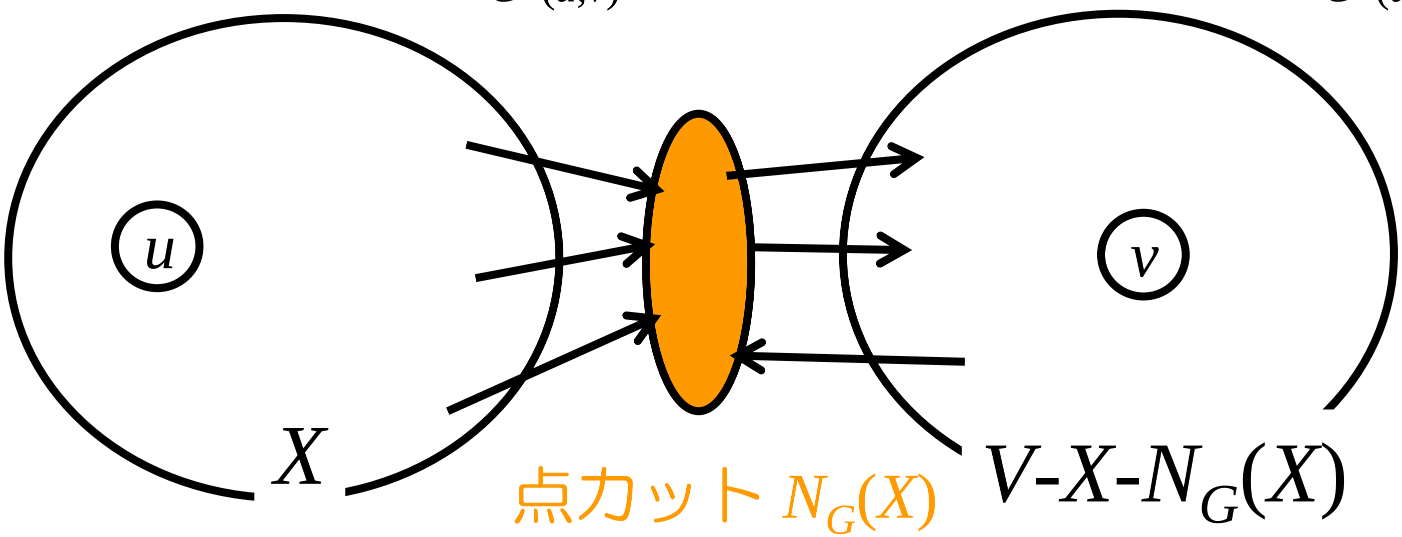
uから v への間の局所点連結度 (local vertex-connectivity)

・$(u,v) \notin E \rightarrow \kappa_G(u, v) = \min \{ \, \underline{|N_G^+(X)|} \mid u \in X, v \in V - X - N_G^+(X) \, \}$

X から出る辺の head の集合

・$(u,v) \in E \rightarrow \kappa_G(u, v)$

$= \min \{ \, |N_{G-(u,v)}^+(X)| \mid u \in X, v \in V - X - N_{G-(u,v)}^+(X) \} + 1$



グラフの点連結度

$\kappa(G) = \min \{ \, \kappa_G(u, v) \mid u, v \in V \, \}$

応用

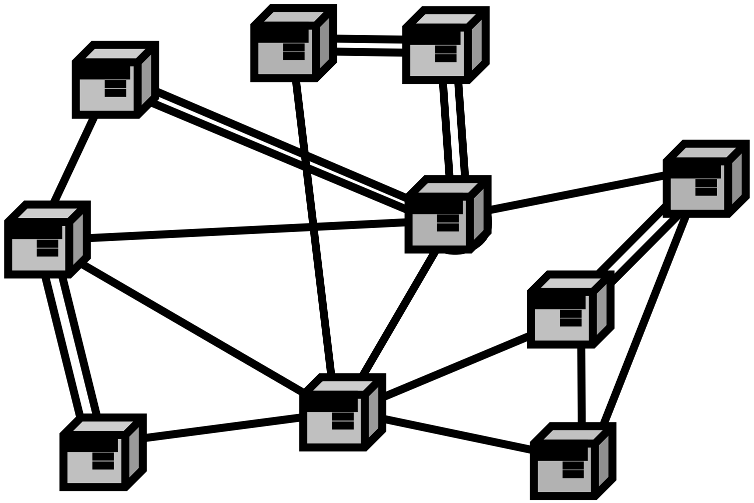
・ネットワークの耐故障性:

辺連結度が k : どの k–1 本の辺を削除しても,
グラフは連結である.

→ リンク故障に対するロバスト性

点連結度が k : どの k–1 個の点を削除しても,
グラフは連結である.

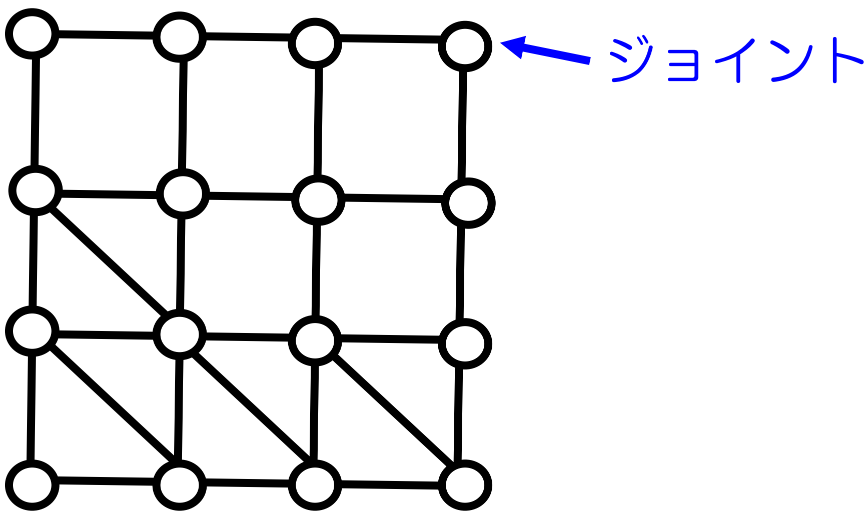
→ ノード故障に対するロバスト性

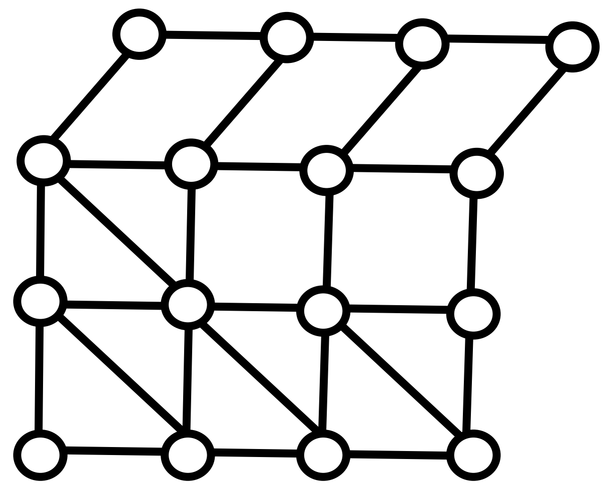


応用

・剛性理論

- 格子状のフレームワーク: 各ロッドは伸び縮みしない.
  ジョイント部で回転できる.
- 対角ロッドにより, フレームワークを rigid (一つのロッドの位置を固定すれば他のすべてのロッドの位置が一意に定まる) にしたい.





rigid でない

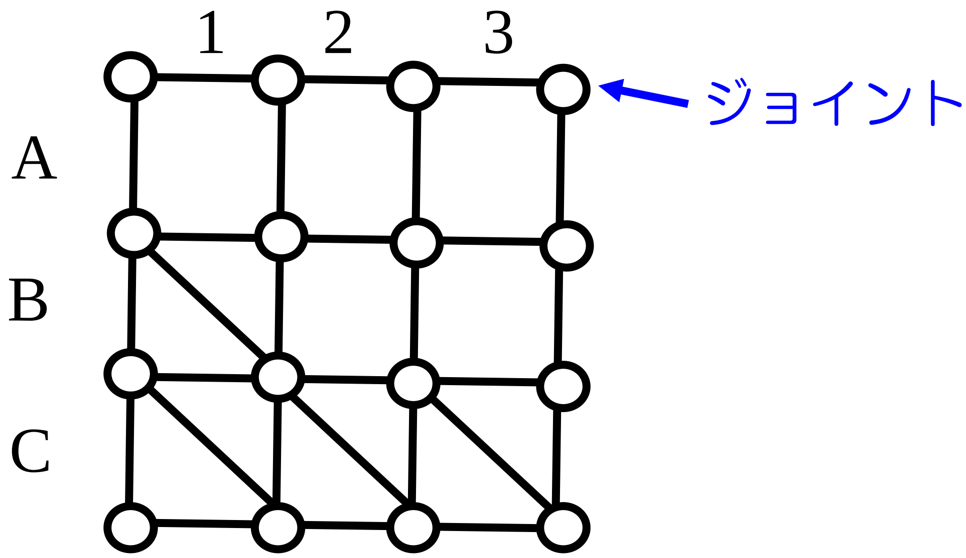
応用

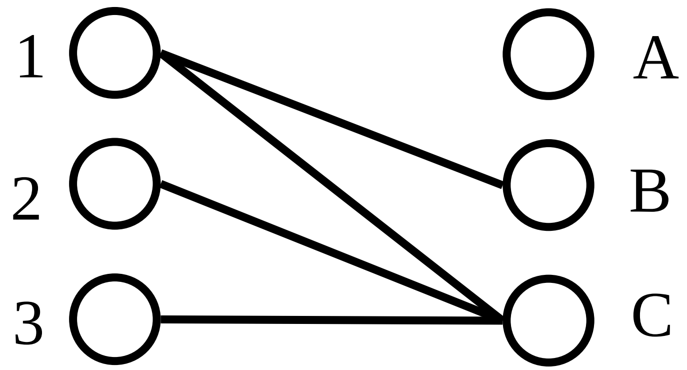
どの k–1 本の対角ロッド故障にも耐えられる ⇔ G:辺連結度 $\geq k$

・剛性理論

・格子状のフレームワーク: 各ロッドは伸び縮みしない. ジョイント部で回転できる.

・対角ロッドにより, フレームワークを rigid (一つのロッドの位置を固定すれば他のすべてのロッドの位置が一意に定まる) にしたい.





二部グラフ G

辺 – 対角ロッド

フレームワークが rigid

⇔ G が連結

[Bolker, Crapo 77]

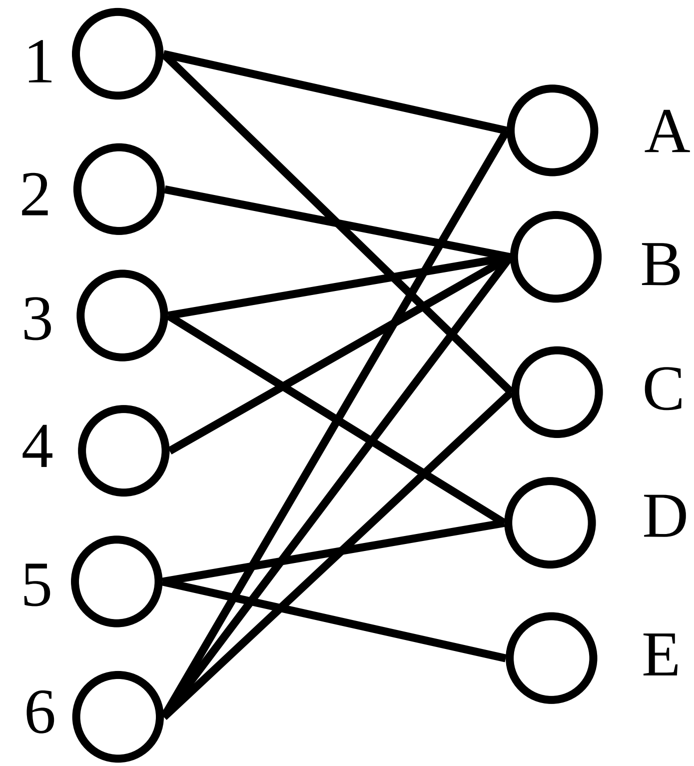
<u>応用</u>

G において, 各連結成分が 2-辺連結になっていればOK.

·(2次元)集計表におけるセル秘匿問題:

秘匿を必要とするデータ(セル)を含む場合, その情報が分からないようにするためには, どのセルを隠せばよいだろうか?

	1	2	3	4	5	6	計
A		4	7	3	3		21
B	4				2		26
C		8	6	5	7		30
D	8	9		6		5	43
E	4	4	5	9		2	32
計	19	28	34	27	28	16	152



二部グラフ G

辺 -- 隠しているセル

セル x の値が分かる.

$\Leftrightarrow$ x に対応する辺 e が, G において橋辺.

(i.e., $G-e$ の連結成分数 > G の連結成分数)

[Gusfield88]

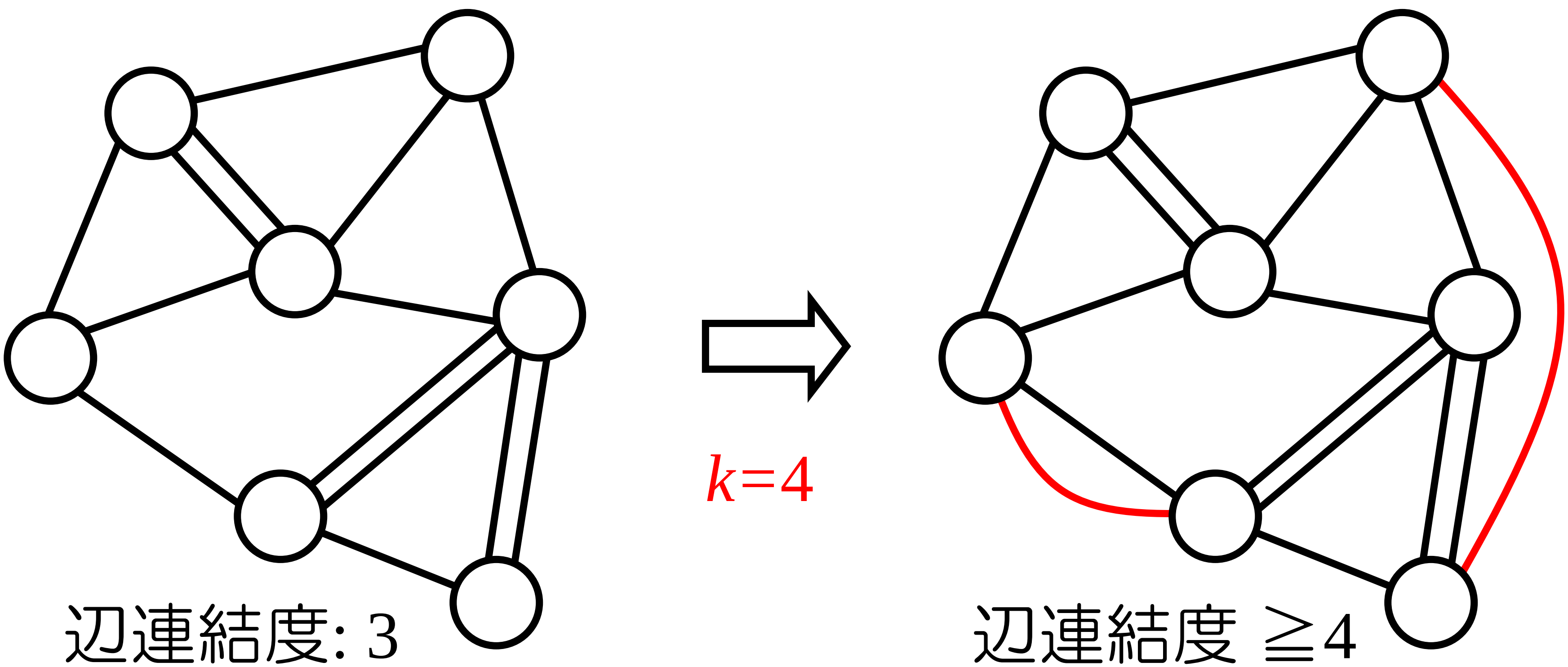
連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G + F$ ($= (V, E \cup F)$) の連結度 $\geqq k$.

$|F|$: 最小.



これまでの結果 (連結度増大問題)

[Eswaran, Tarjan 76]

無向グラフ, 辺連結度2
無向グラフ, 点連結度2
有向グラフ, 辺連結度1 (強連結)

[Plesník76]

無向グラフ, 辺連結度2
無向グラフ, 点連結度2

辺連結度

$n=|V|$

無向グラフ

[連結度要求]

k P [Watanabe, Nakamura87]

$r(u,v)$ (局所辺連結度要求) P [Frank92]

有向グラフ

k P [Frank92]

$r(u,v)$ (局所辺連結度要求) θ (log n)-近似

Ω(log n)-困難 ($r \in \{0,1\}$) [Frank92]

O(log n)-近似 [Kortsarz,Nutov06]

点連結度

$n = |V|$

無向グラフ

[連結度要求]

k — k を固定すれば P [Jackson, Jordán05]

$\kappa(G) = k - 1$ なら P [Végh10]

$r(u,v)$ (局所点連結度要求) — NP-困難 [Jordán95]

$\Omega(2^{\log^{1-\varepsilon} n})$-困難 $(r \in \{0,k\})$ [Nutov05]

$O(r_{\max} \log^2 r_{\max})$-近似 [Nutov09]

有向グラフ

k — P [Frank,Jordán95]

$r(u,v)$ (局所点連結度要求) — NP-困難 [Jordán95]

$\Omega(2^{\log^{1-\varepsilon} n})$-困難 $(r \in \{0,k\})$ [Nutov05]

$O(r_{\max} \log n)$-近似 [Kortsarz,Nutov06]

辺連結度増大問題

無向グラフ

- 最適値の下界
- グラフの辺連結度を 1 増加する.
- グラフの辺連結度を k に増加する.
- 一般化
  - 局所辺連結度 (local edge-connectivity),
    節点領域辺連結度 (node-to-area edge-connectivity),
    領域間辺連結度 (area-to-area edge-connectivity) の問題
  - 優モジュラ関数 (supermodular function),
    弱優モジュラ関数 (skew-supermodular function),
    模調関数 (modulotone function) の問題

辺連結度増大問題

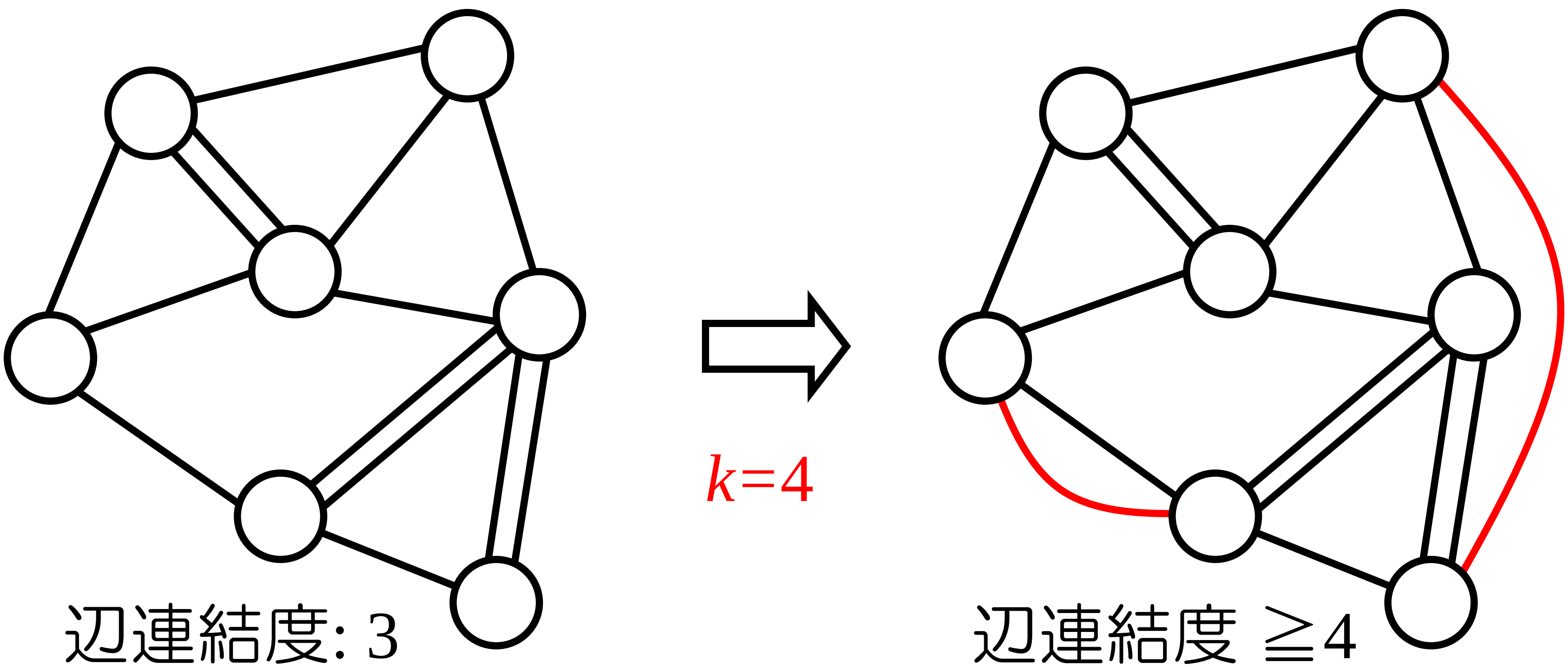
入力: グラフ $G = (V, E)$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

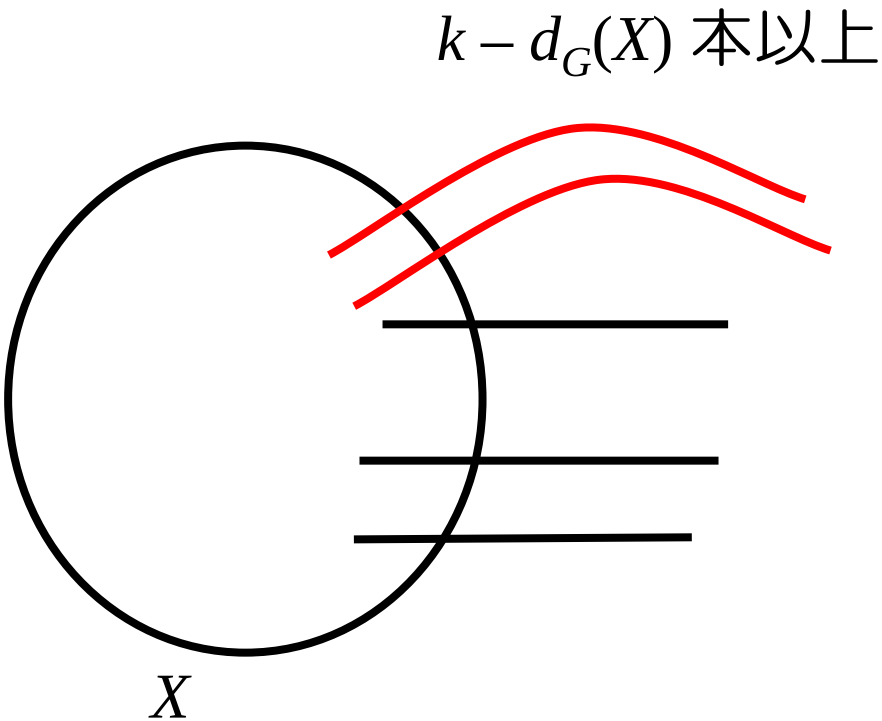
s.t. $G + F$ (= $(V, E \cup F)$) の辺連結度 $\geqq k$.

$d_{G+F}(X) \geqq k, \ \ \phi \neq {}^{\forall} X \subset V$

$|F|$: 最小.



最適値の下界値

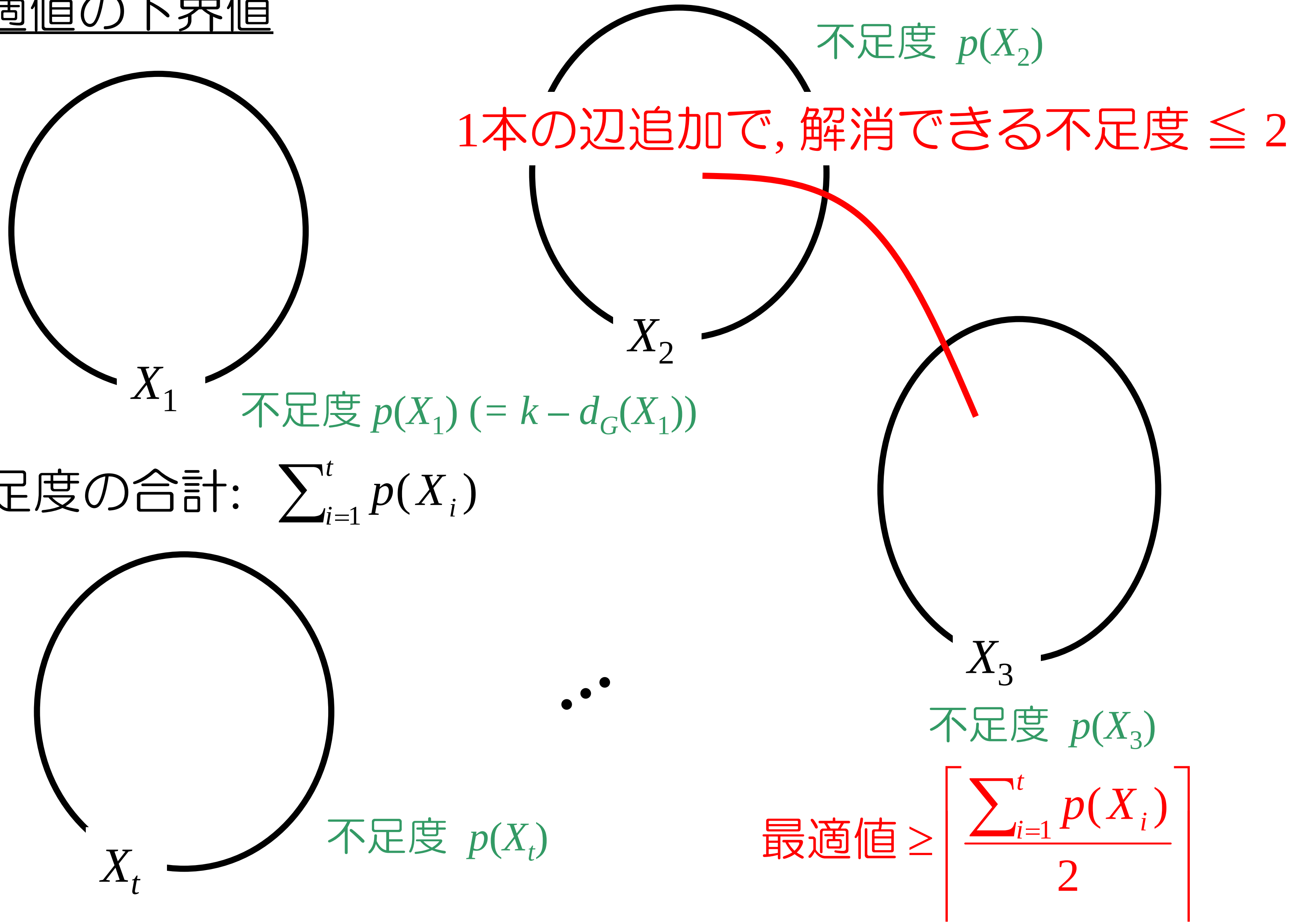


$d_G(X) < k$ なら X と $V - X$ の間に, $k - d_G(X)$ 本以上辺を加える必要がある.

→ X の不足度 という

$p(X) = k - d_G(X)$ とする.

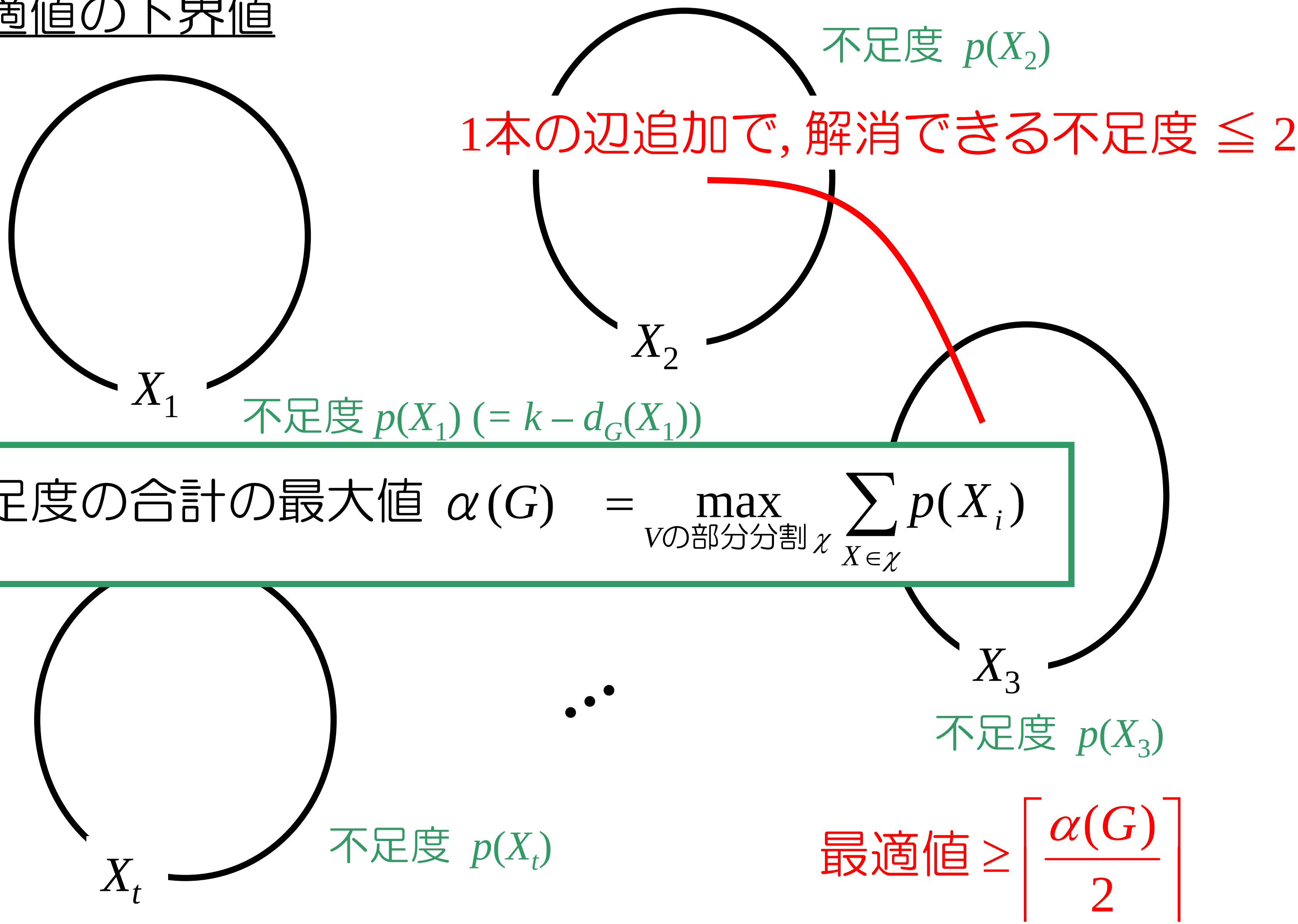
最適値の下界値



$\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$:互いに素な$V$の部分集合の族 ($V$の部分分割)

$d_G(X_i) < k$

最適値の下界値



不足度の合計の最大値 $\alpha(G) = \max_{V\text{の部分分割}\,\chi} \sum_{X \in \chi} p(X_i)$

$\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$:互いに素なVの部分集合の族 (Vの部分分割)

$d_G(X_i) < k$

$k \geqq 2$ の場合，最適値 $= \left\lceil \dfrac{\alpha(G)}{2} \right\rceil$ 　($k = 1$ の場合の問題は自明)

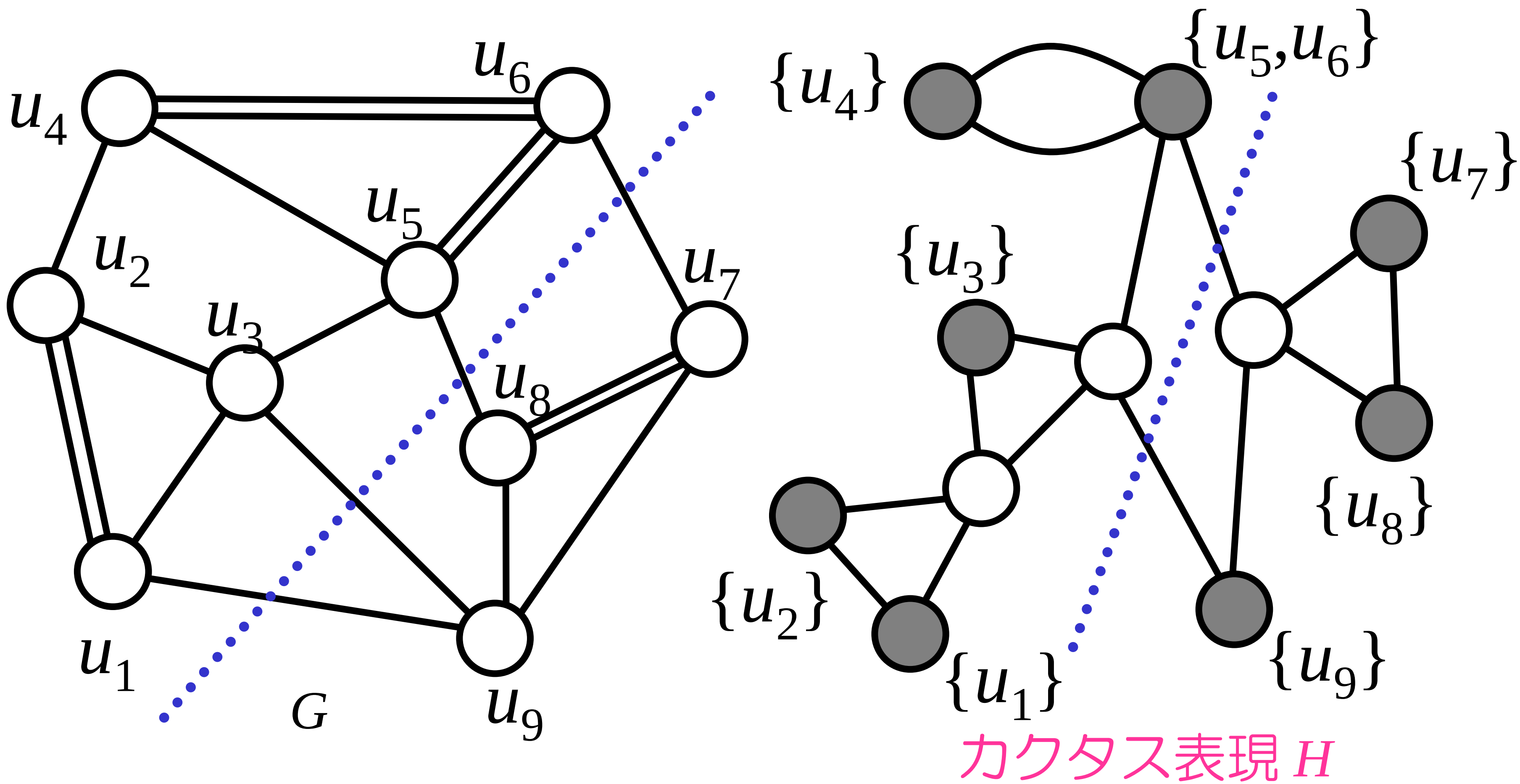
辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G) = k-1$ の場合)

不足度のあるカット=Gの最小カット

G のすべての最小カットの構造を表すカクタス表現を利用する.

カクタス表現 [Dinits, Karzanov, Lomonosov 76]

G のすべての最小カットの構造に対する表現.

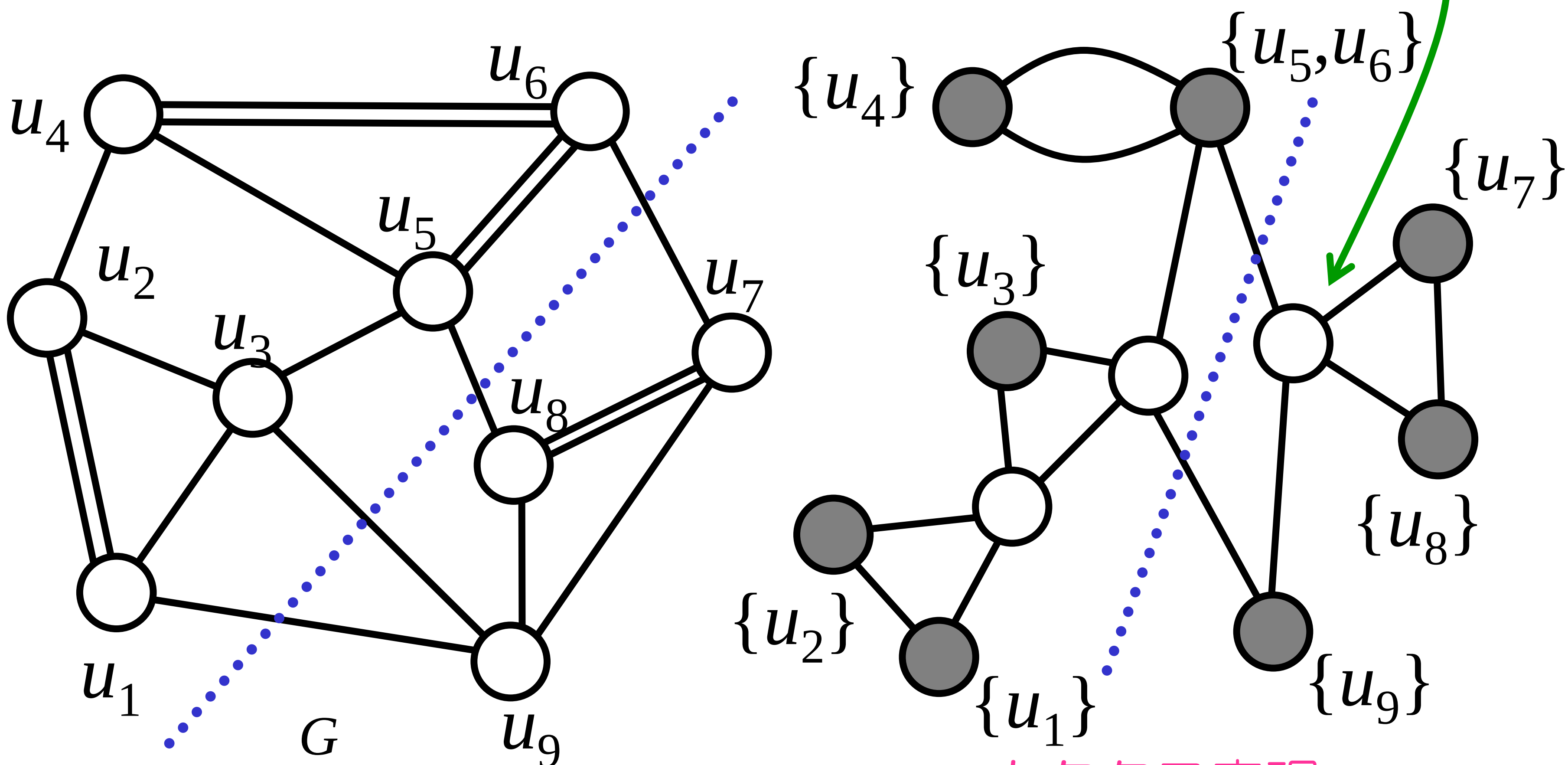


カクタス・・・隣り合う二つの閉路が丁度1点を共有するグラフ.

カクタス表現

$\varphi(v)=x$ なる $v\in V(G)$ が存在しない $V(H)$ の点 x (空点と呼ぶ).

G のすべての最小カットの構造に対する表現.

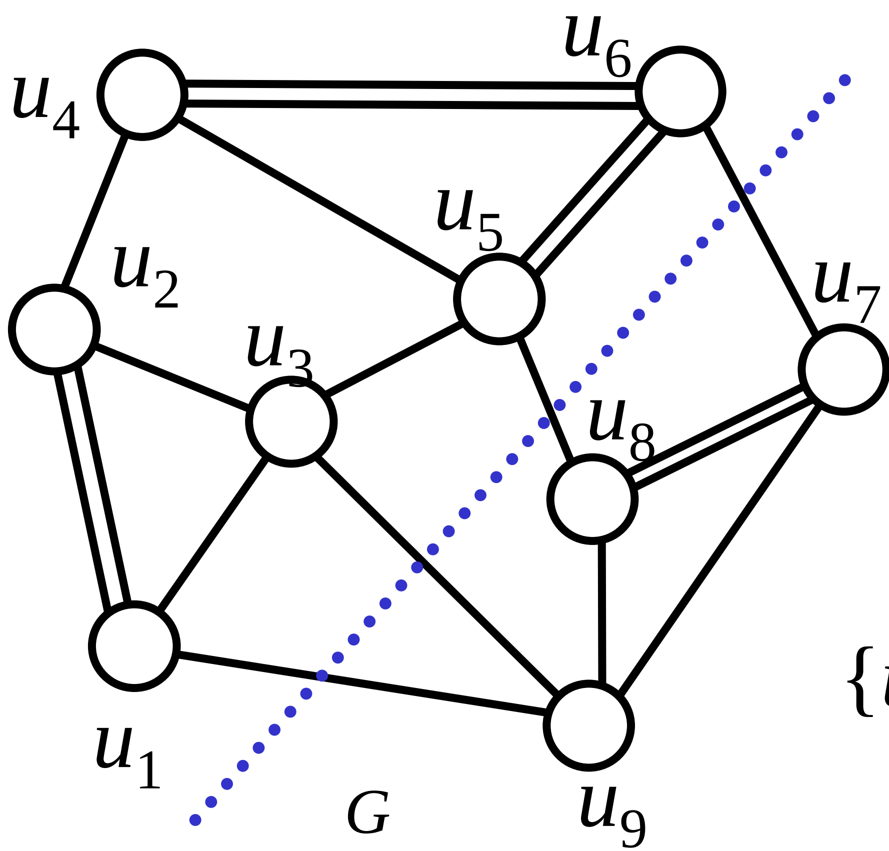


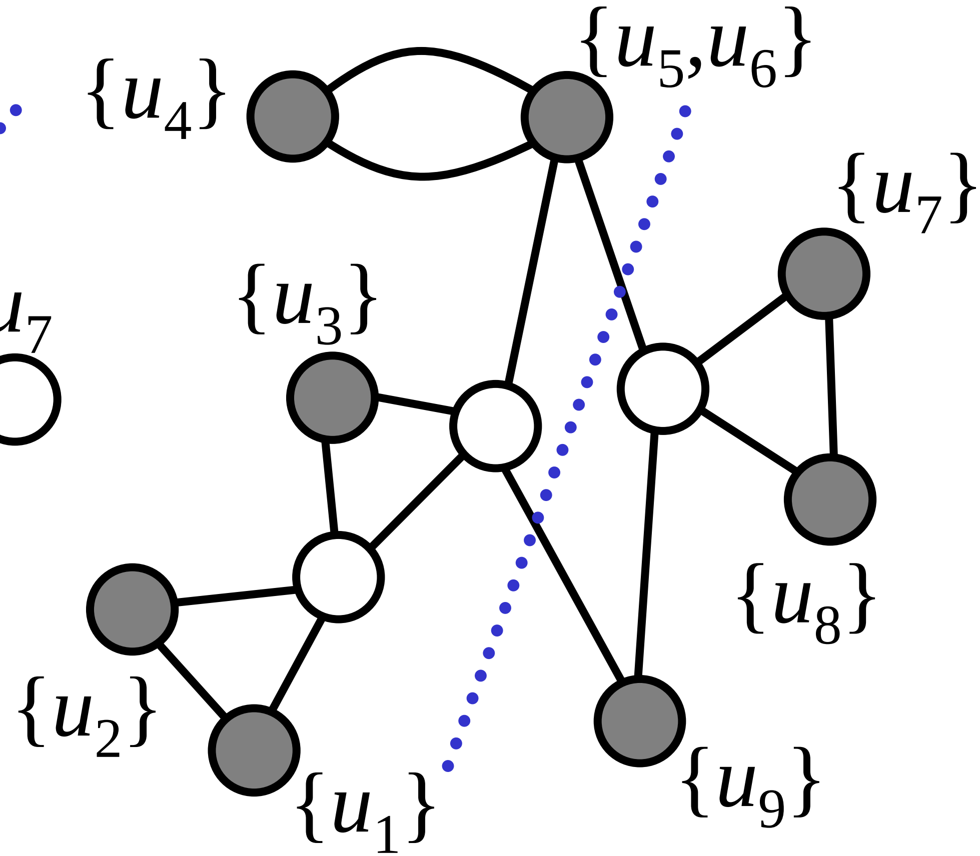
カクタス表現 H

$\varphi: V(G)\rightarrow V(H)$: 点の対応付け.

カクタス表現

G のすべての最小カットの構造に対する表現.





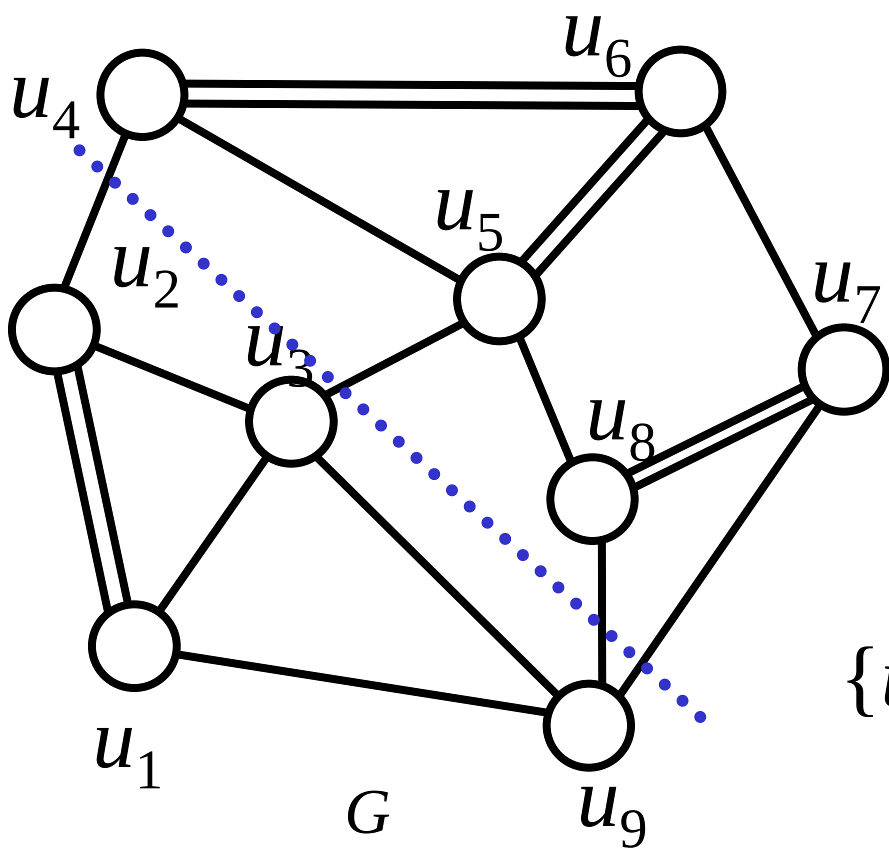
カクタス表現 H

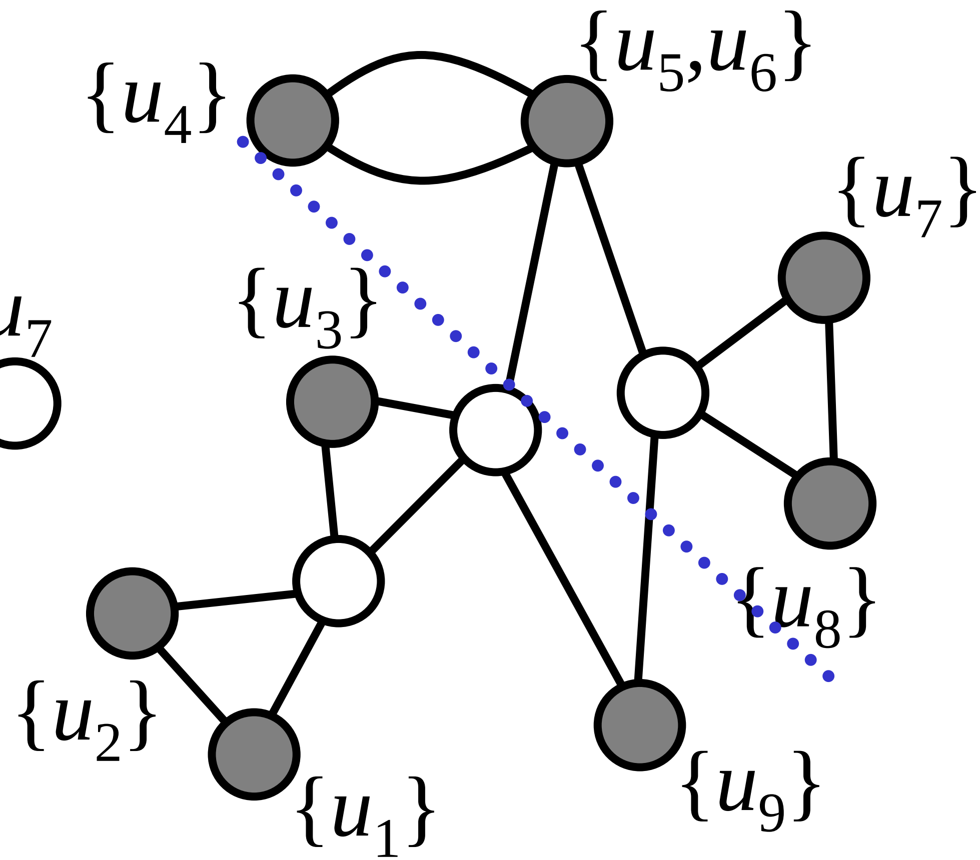
$\varphi : V(G) \to V(H)$: 点の対応付け.

(i) $S : H$の最小カット$\Rightarrow \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\} : G$の最小カット

カクタス表現

G のすべての最小カットの構造に対する表現.





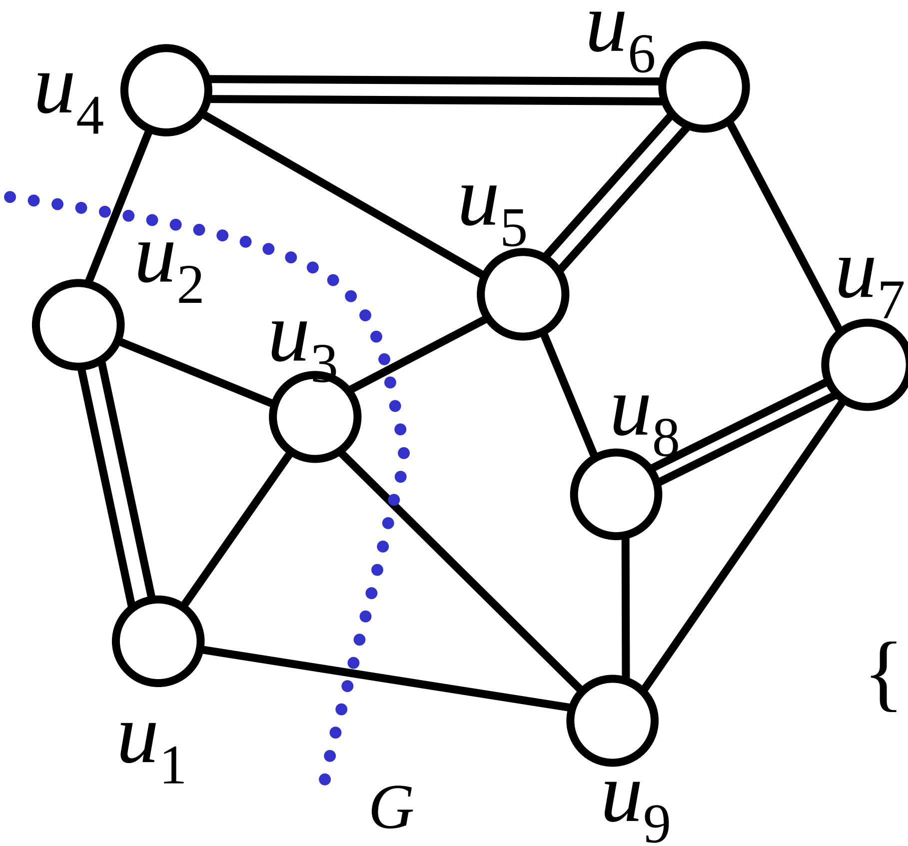
カクタス表現 H

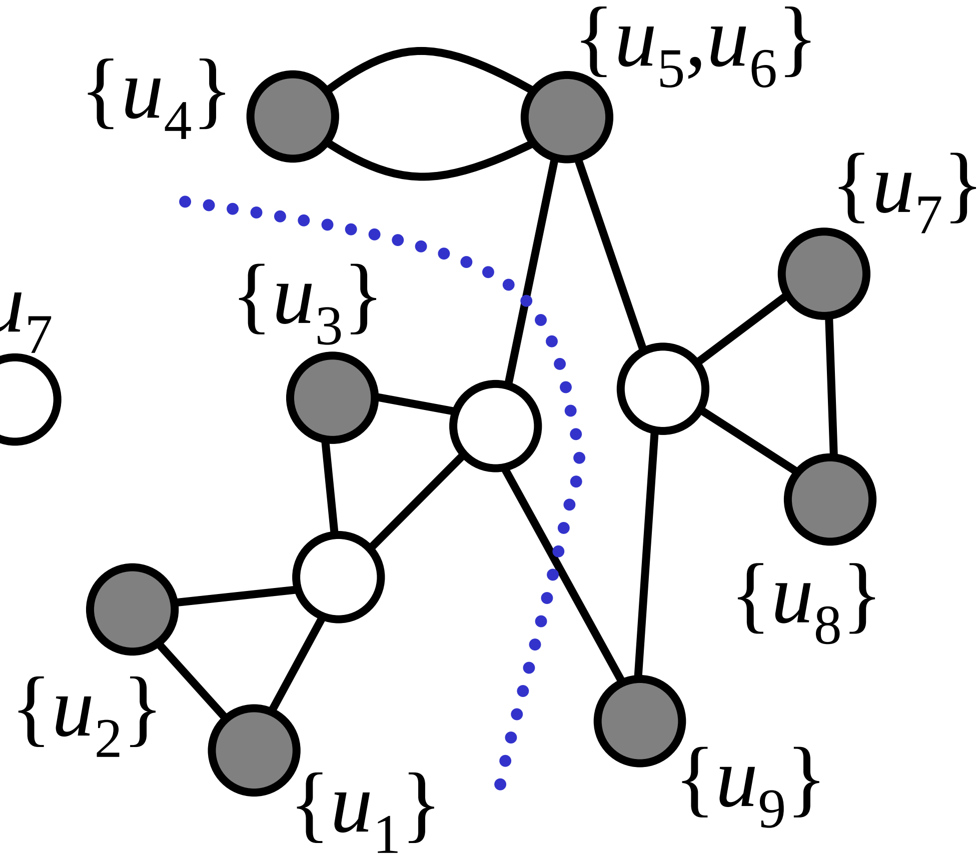
$\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$: 点の対応付け.

(i) $S : H$の最小カット$\Rightarrow \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\} : G$の最小カット

カクタス表現

G のすべての最小カットの構造に対する表現.





カクタス表現 H

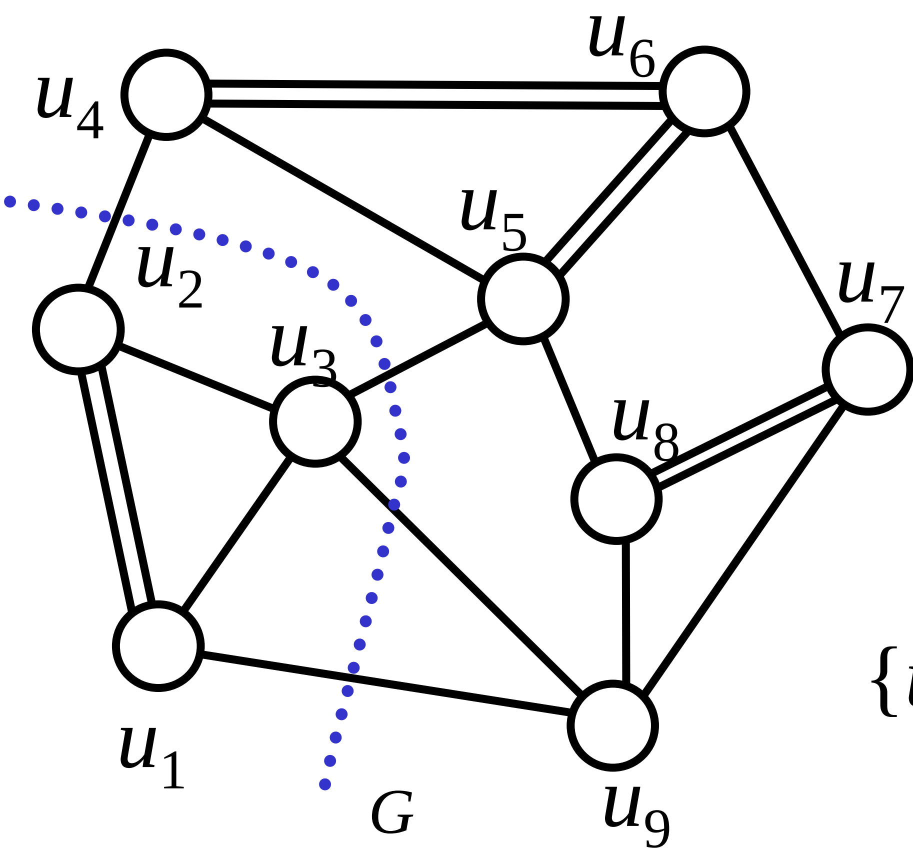
$\varphi: V(G) \to V(H)$: 点の対応付け.

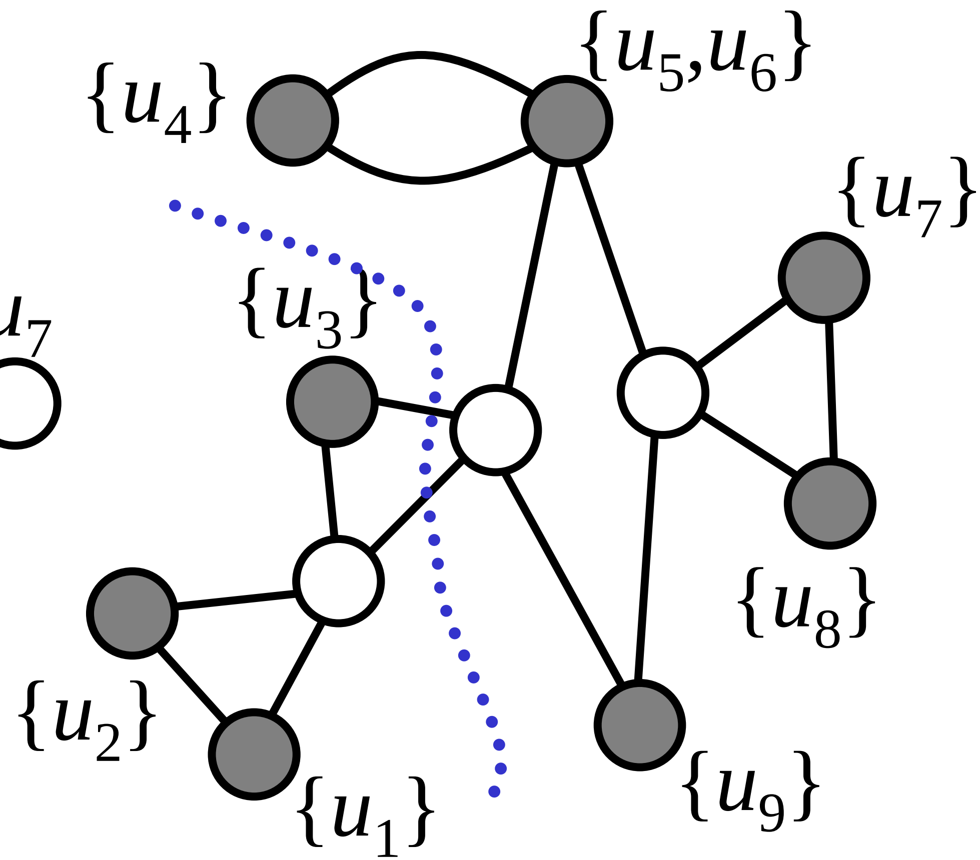
(i) $S: H$の最小カット $\Rightarrow \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}: G$の最小カット

(ii) $X: G$の最小カット $\Rightarrow \exists H$の最小カットS s.t. $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$

カクタス表現

G のすべての最小カットの構造に対する表現.



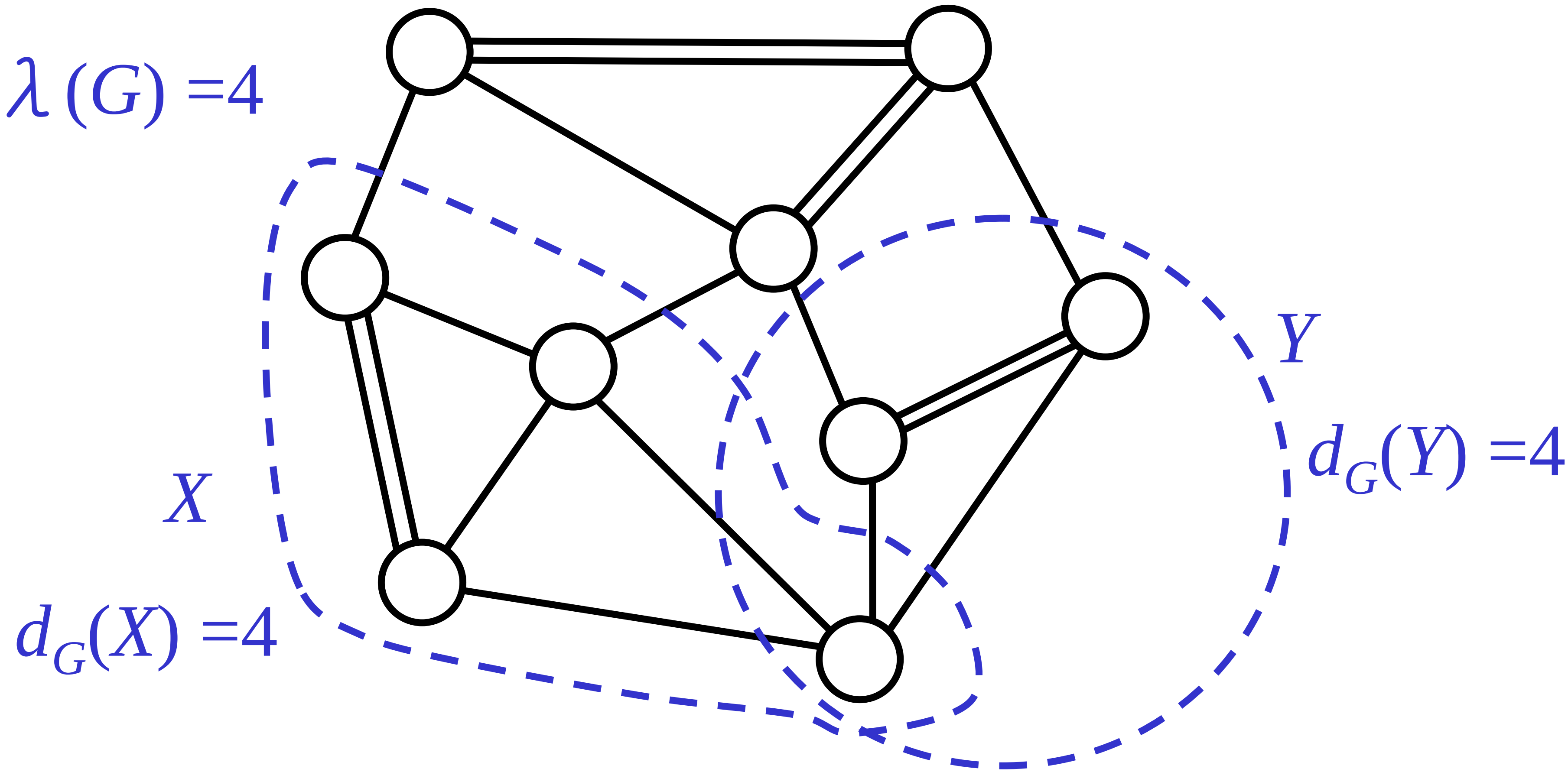


カクタス表現 H

$\varphi : V(G) \to V(H)$: 点の対応付け.

(i) $S : H$の最小カット$\Rightarrow \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\} : G$の最小カット

(ii) $X : G$の最小カット$\Rightarrow \exists H$の最小カットS s.t. $X = \{u \in V(G) \mid \varphi(u) \in S\}$



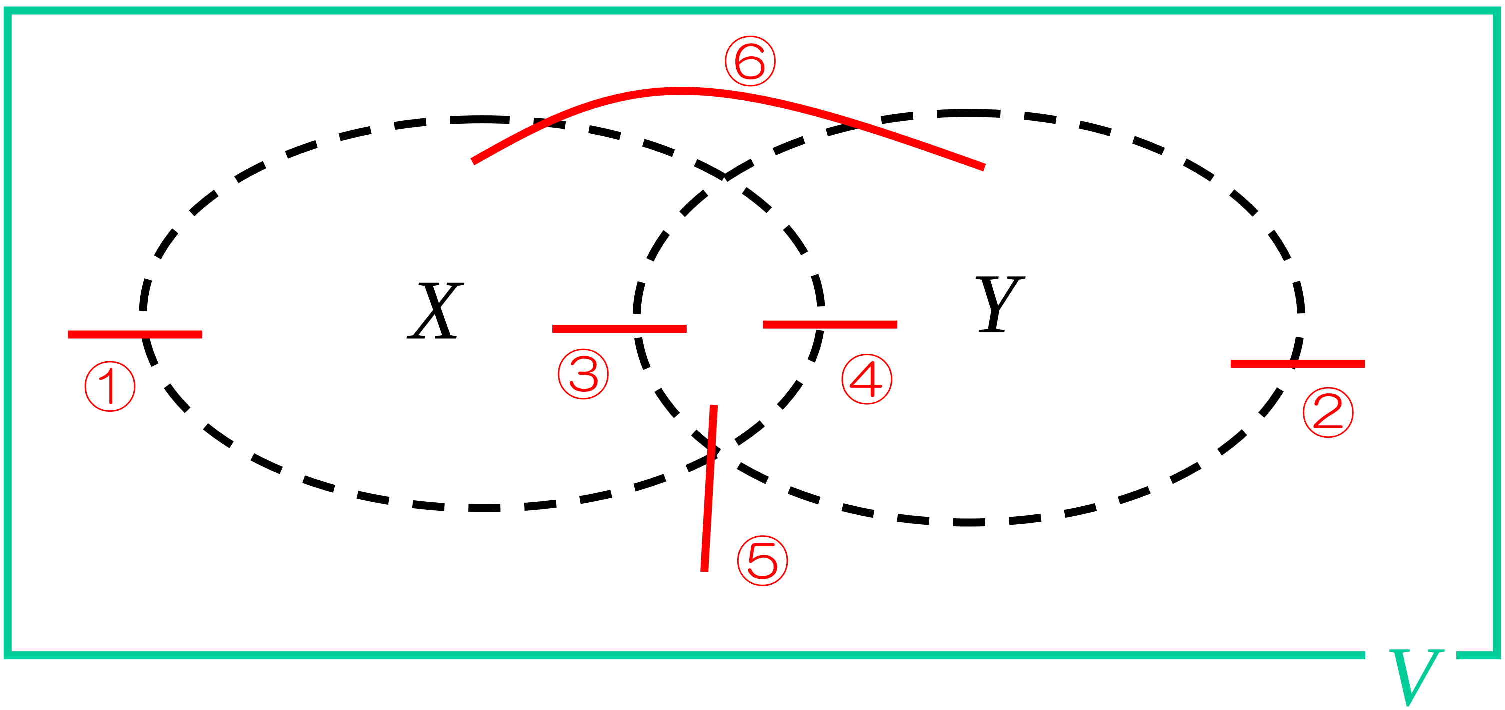
[定義]

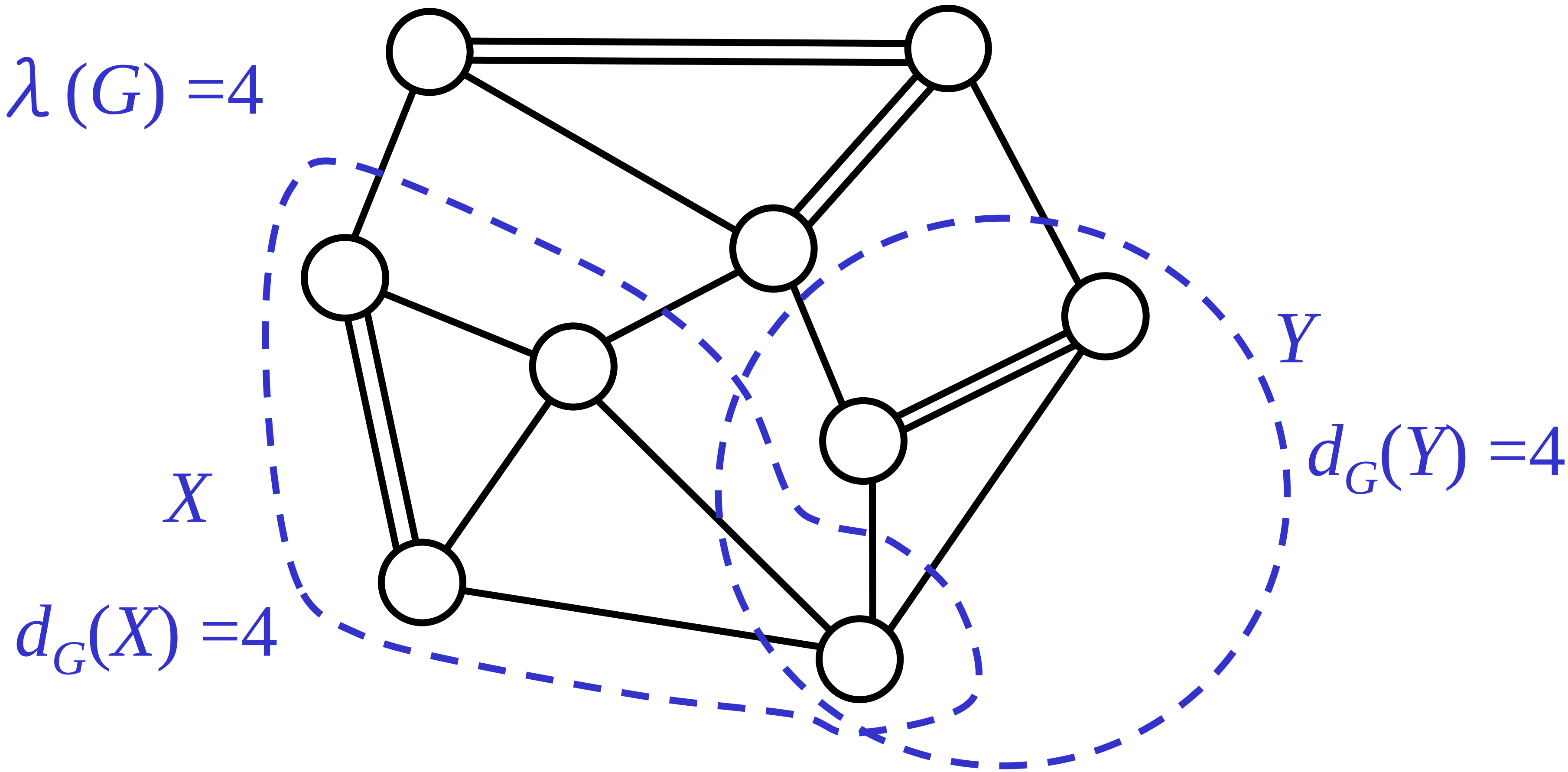
$X \cap Y, X-Y, Y-X, V-(X \cup Y) \neq \phi \Rightarrow X$ と Y は横断する (cross)

カット関数の劣モジュラ性 (submodularity)

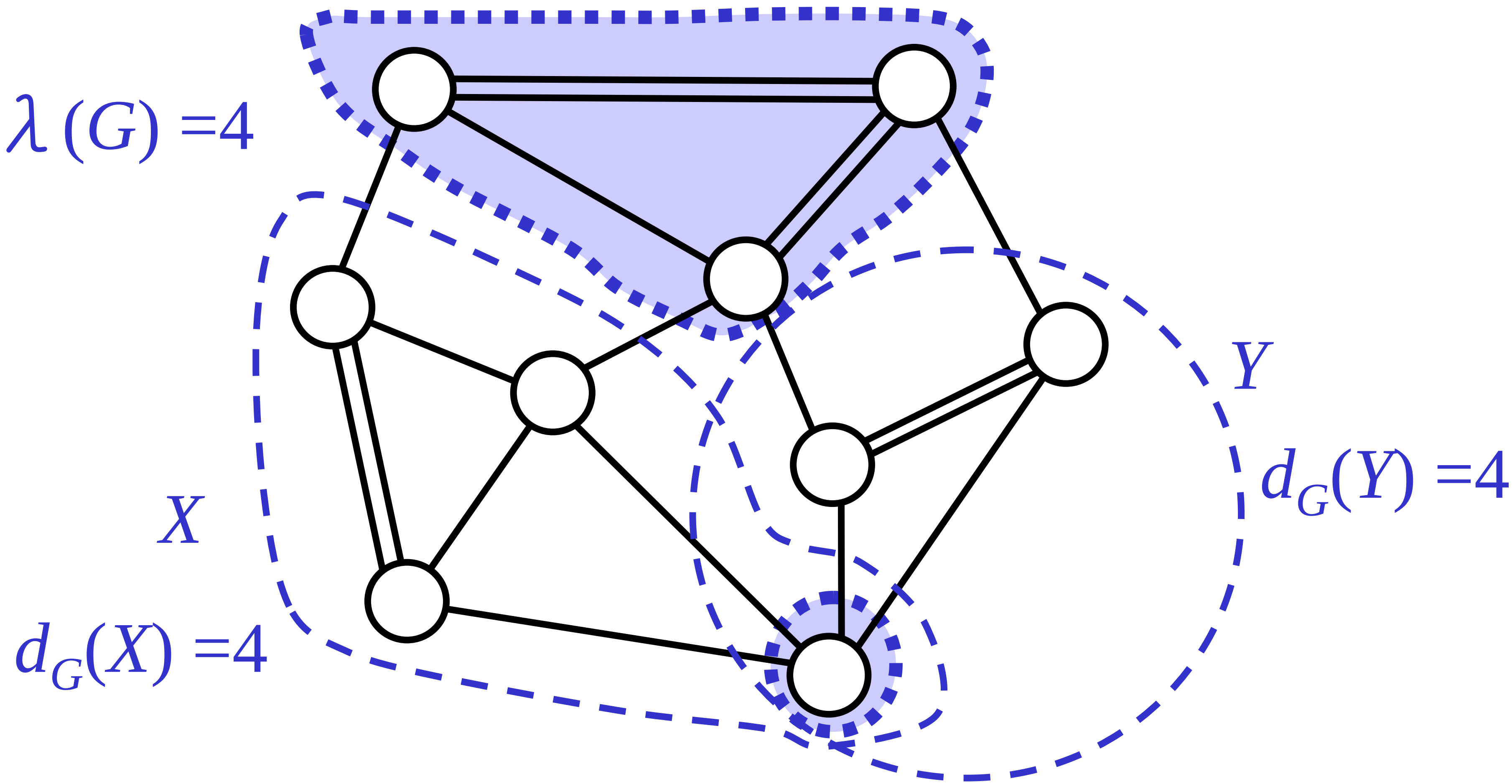
$$d_G(X) + d_G(Y) \geqq d_G(X \cap Y) + d_G(X \cup Y)$$

①④⑤⑥　②③⑤⑥　③④⑤　①②⑤



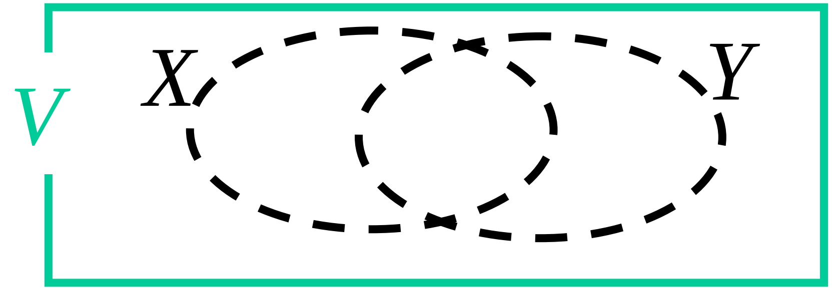


$$2\lambda(G) = \underset{=\lambda(G)}{d_G(X)} + \underset{=\lambda(G)}{d_G(Y)} \geqq \underset{\geqq \lambda(G)}{d_G(X \cap Y)} + \underset{\geqq \lambda(G)}{d_G(X \cup Y)} \geqq 2\lambda(G)$$



$$2\lambda(G) = \underset{=\lambda(G)}{d_G(X)} + \underset{=\lambda(G)}{d_G(Y)} \geqq \underset{=\lambda(G)}{d_G(X \cap Y)} + \underset{=\lambda(G)}{d_G(X \cup Y)} \geqq 2\lambda(G)$$

カット関数の劣モジュラ性 (submodularity)



$$d_G(X)+d_G(Y) \geqq d_G(X \cap Y)+d_G(X \cup Y)$$

[正モジュラ性 (posi-modularity)]

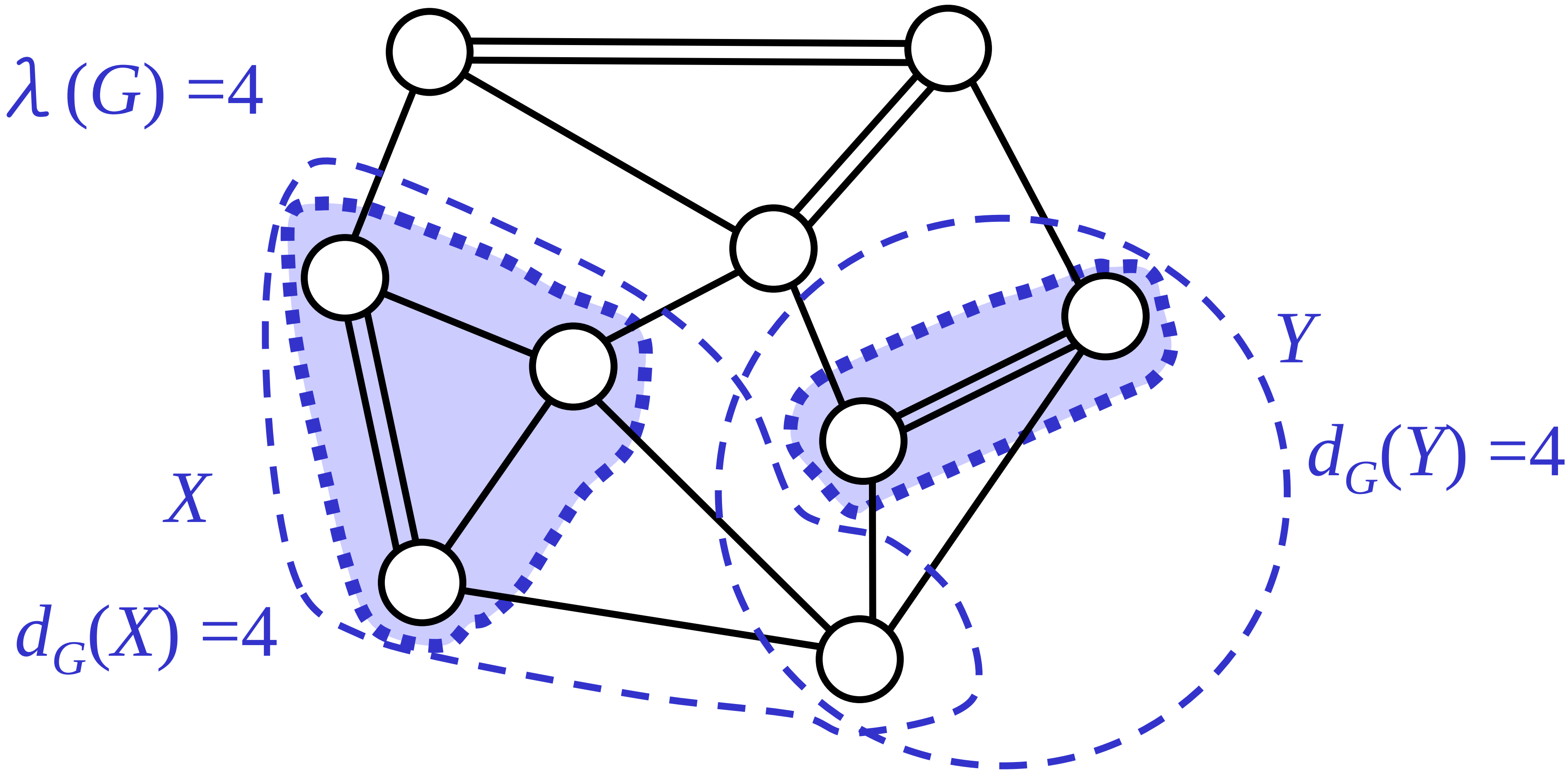
$$d_G(X)+d_G(Y) \geqq d_G(X-Y)+d_G(Y-X)$$

||

$$(d_G(X)+d_G(V-Y) \geqq d_G(X \cap (V-Y))+d_G(X \cup (V-Y))$$

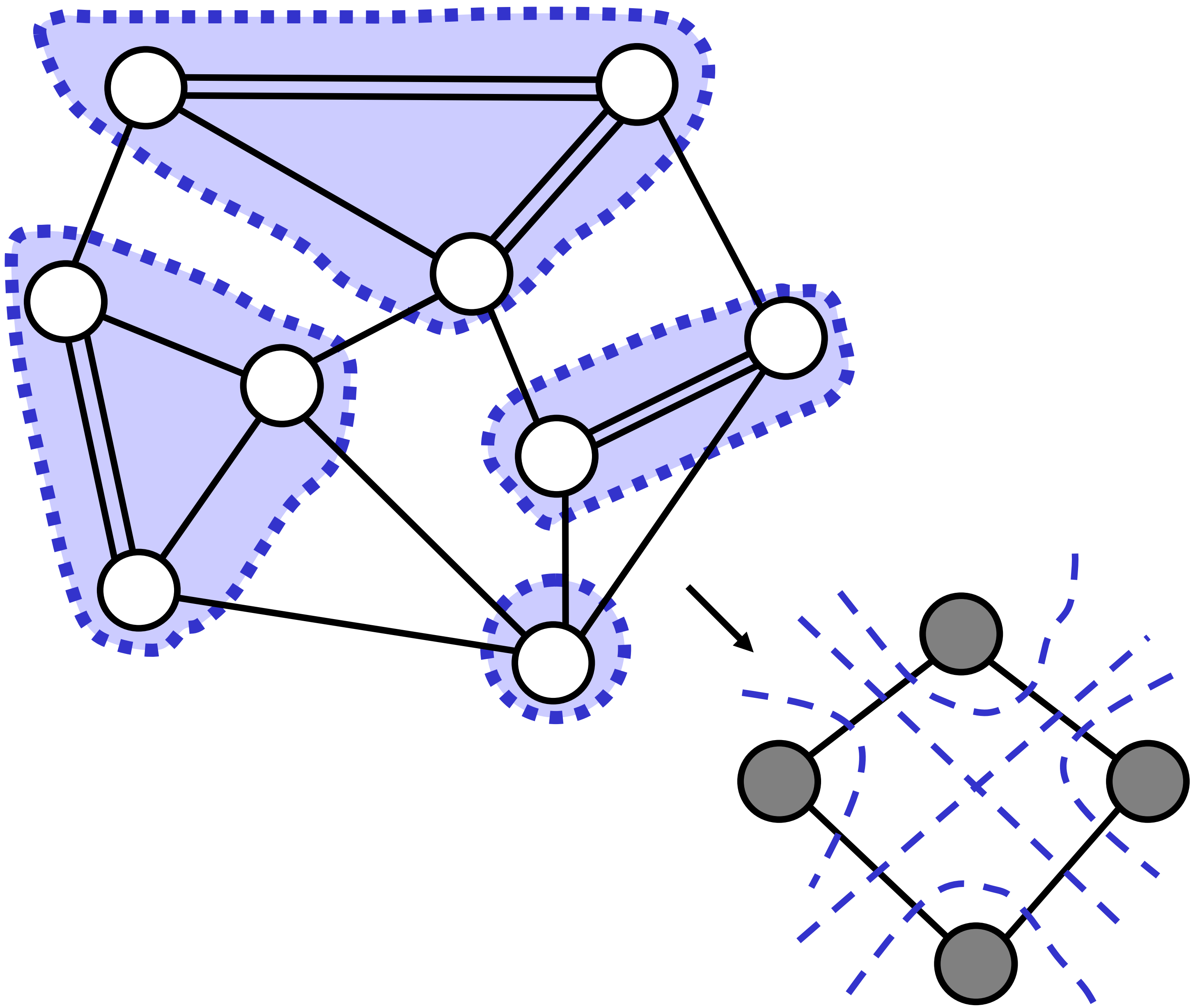
$$= d_G(X-Y)+d_G(V-(Y-X))$$

$$= d_G(X-Y)+d_G(Y-X) \qquad)$$



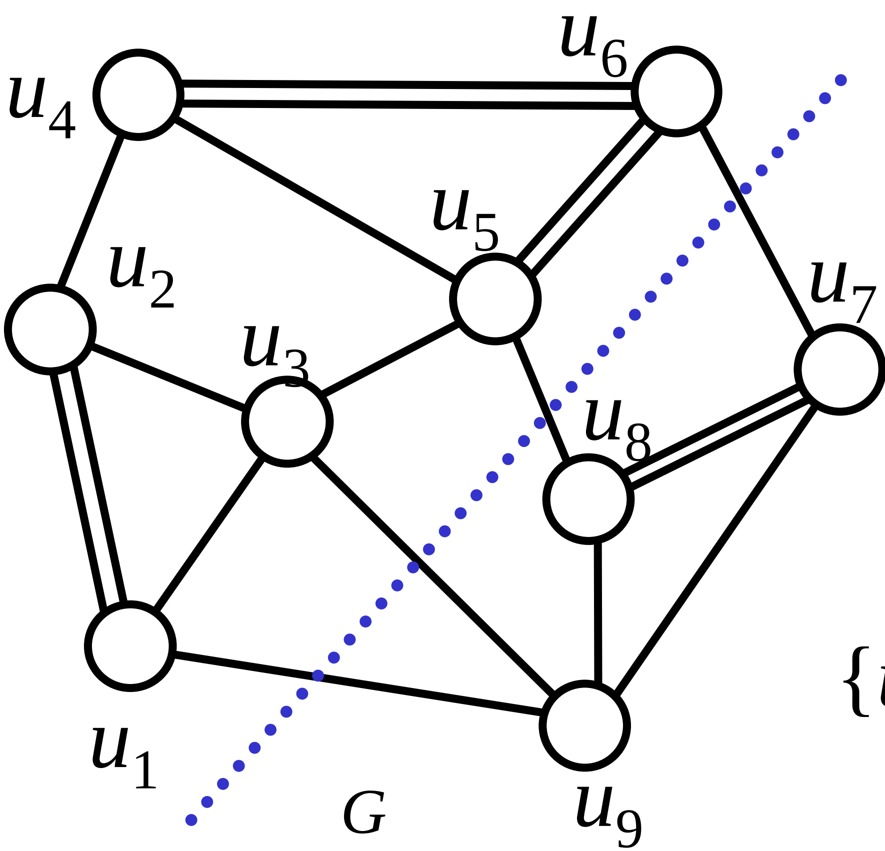
$$\underbrace{d_G(X)}_{=\lambda(G)} + \underbrace{d_G(Y)}_{=\lambda(G)} \geqq \underbrace{d_G(X-Y)}_{=\lambda(G)} + \underbrace{d_G(Y-X)}_{=\lambda(G)}$$

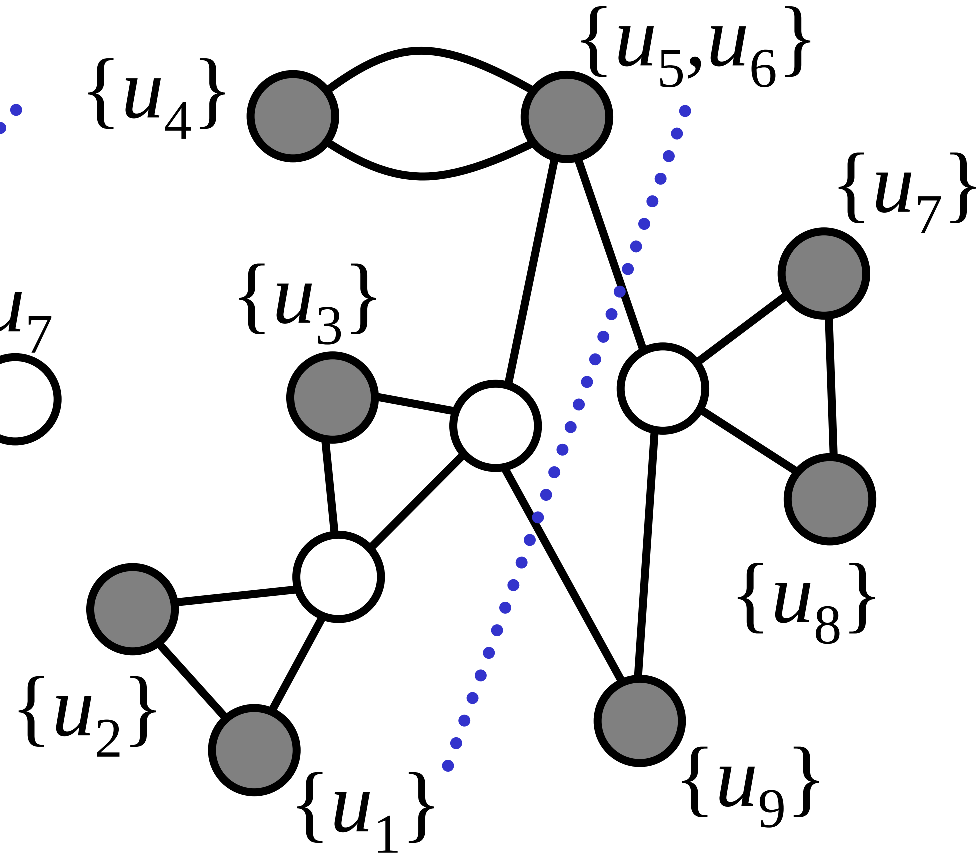
$\lambda(G) = 4$



カクタス表現

G のすべての最小カットの構造に対する表現.





カクタス表現 H

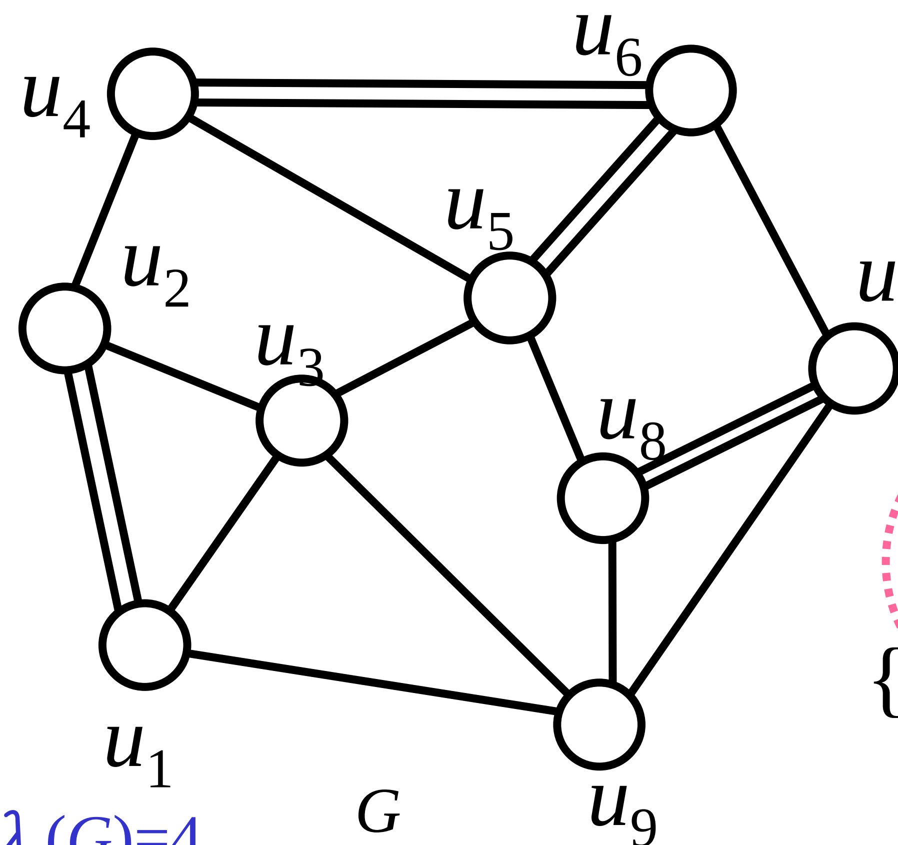
O(mn+n^2log$n$) 時間で計算可能 [Nagamochi et al.03]

辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G)=k-1$ の場合)

$\boxed{\alpha(G)=7}$

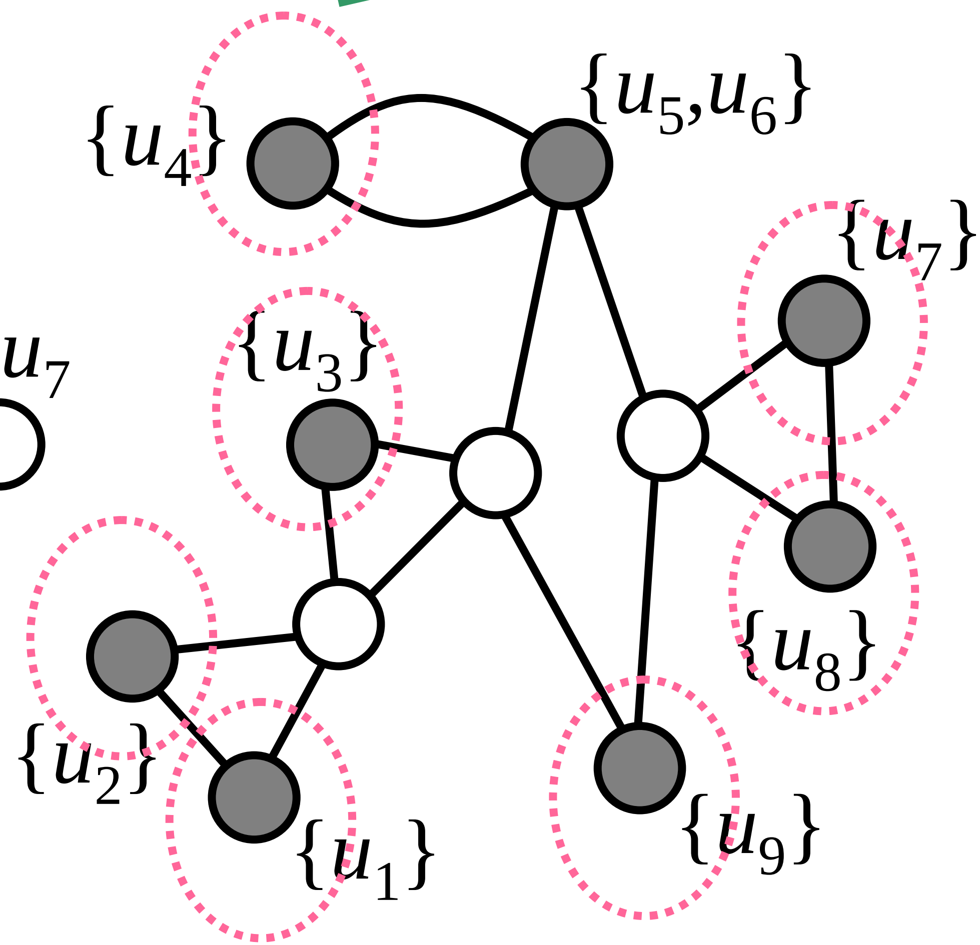
不足度のあるカット=Gの最小カット

それぞれ不足度: 1



G

$\lambda(G)=4$



カクタス表現 H

互いに素

Gの極小最小カット X ($\phi \neq {}^{\forall}X' \subset X$ は最小カットでない)--- H の次数2の点

$\alpha(G)$ =極小最小カットの数 = H の次数2の点の数

辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G) = k-1$ の場合)

$\alpha(G) = t = 7$

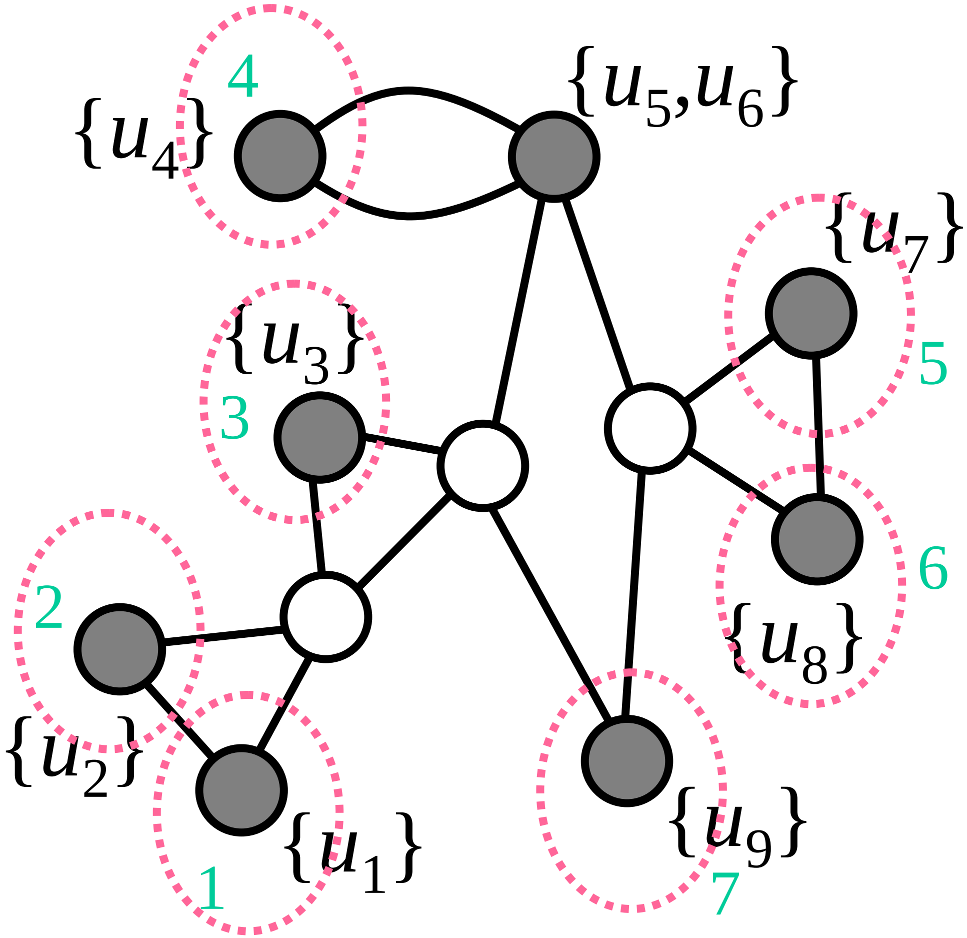
(1) H は, オイラーグラフ.
→オイラー閉路を求める.
出現順に, 次数2の点に番号付けを行う.

右の例では $t = 7$

(2) (次数2の点の数を t とする.)
i 番目の点と $i + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 番目の点を結ぶ.

$(i = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil)$

(ただし, t 奇数のとき, $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 番目は1番目とする)



カクタス表現 H

辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G)=k-1$ の場合)

$\alpha(G)=t=7$

(1) H は, オイラーグラフ.

→オイラー閉路を求める.

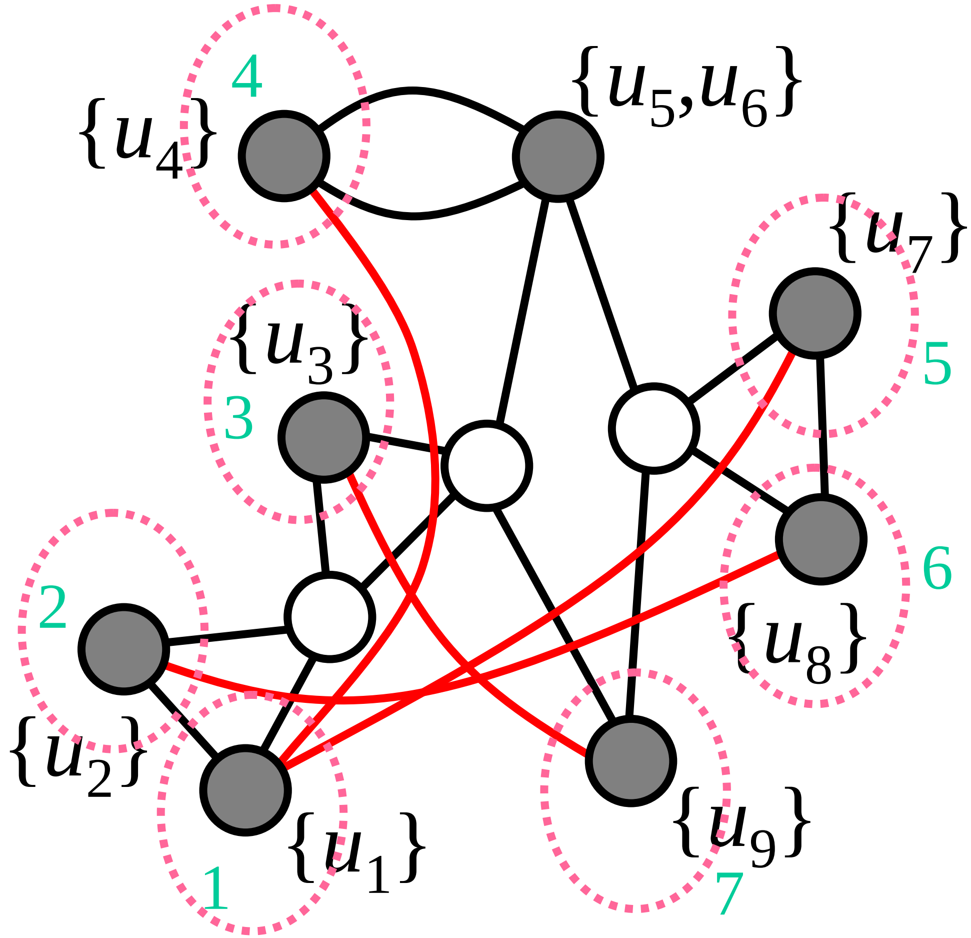
出現順に, 次数2の点に番号付けを行う.

右の例では $t=7$

(2) (次数2の点の数を t とする.)

i 番目の点と $i+\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 番目の点を結ぶ.

$$(i=1,2,\ldots,\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil)$$

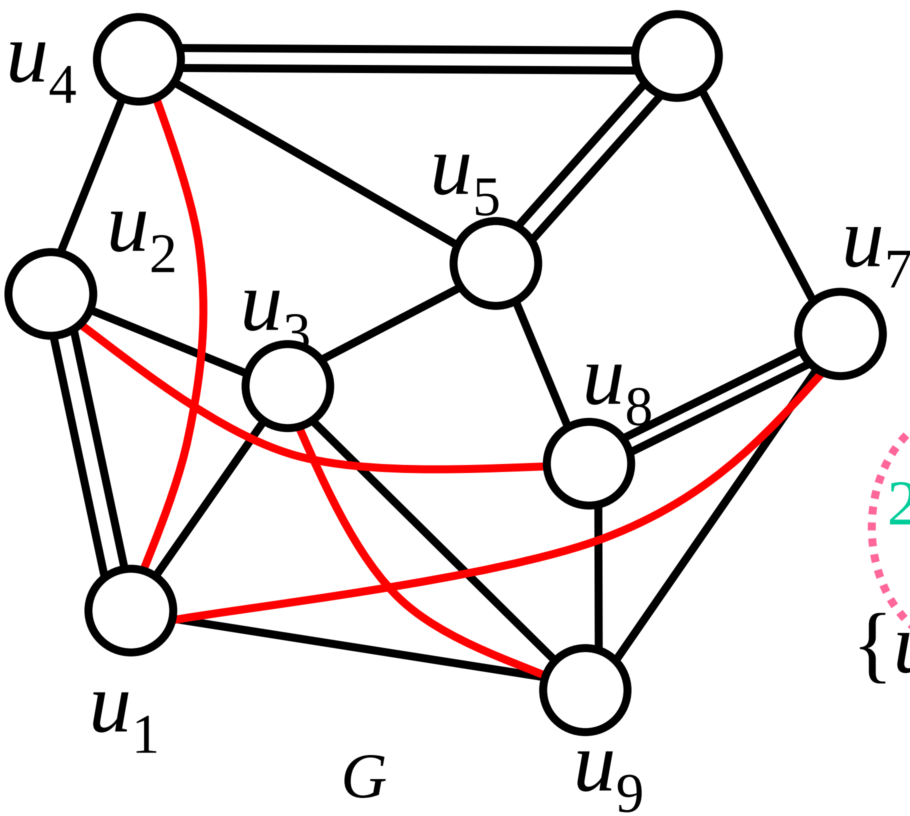


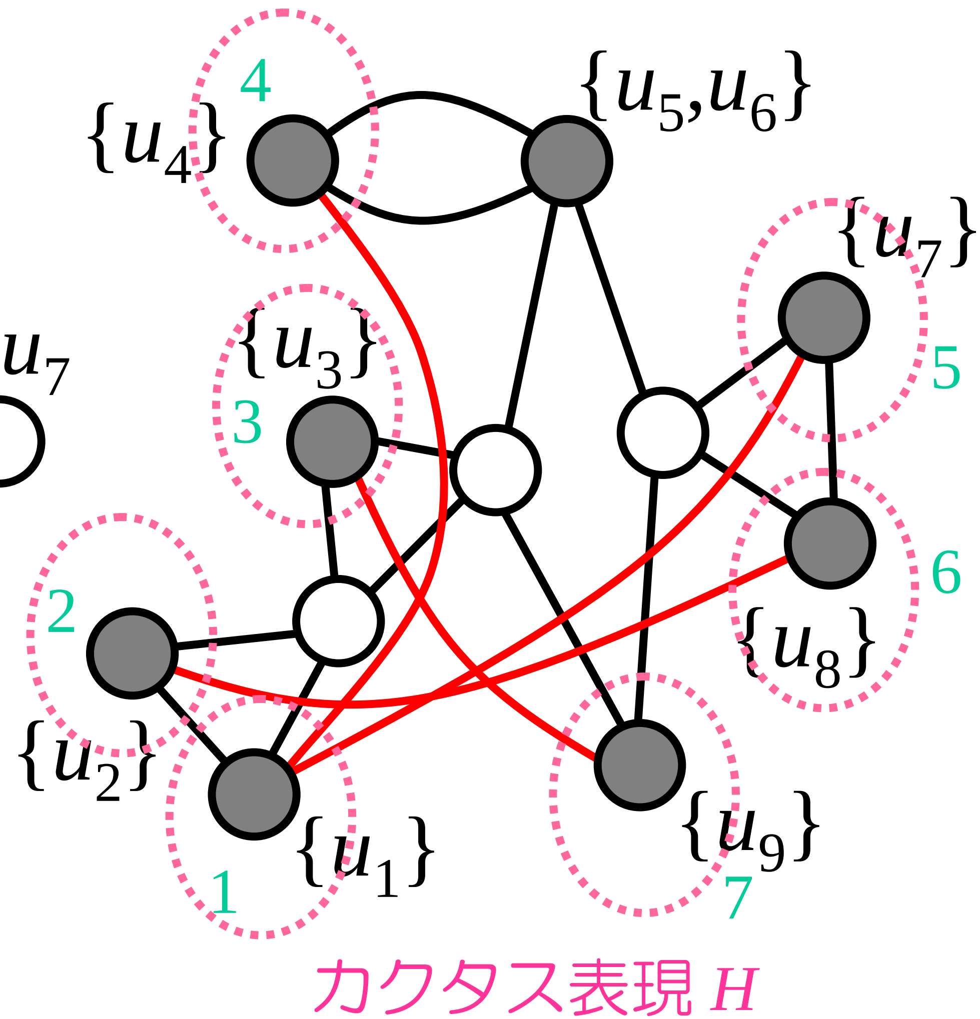
カクタス表現 H

(ただし, t 奇数のとき, $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil+\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 番目は1番目とする)

辺連結度を1上げる問題 ($\lambda(G)= k-1$ の場合)

$\alpha(G)=t= 7$





Gが一般の場合 ($\lambda(G)= k-1$ の仮定がない場合)

1. $\alpha(G)$ の計算

2. 辺分離 (edge-splitting) に基づくアルゴリズム

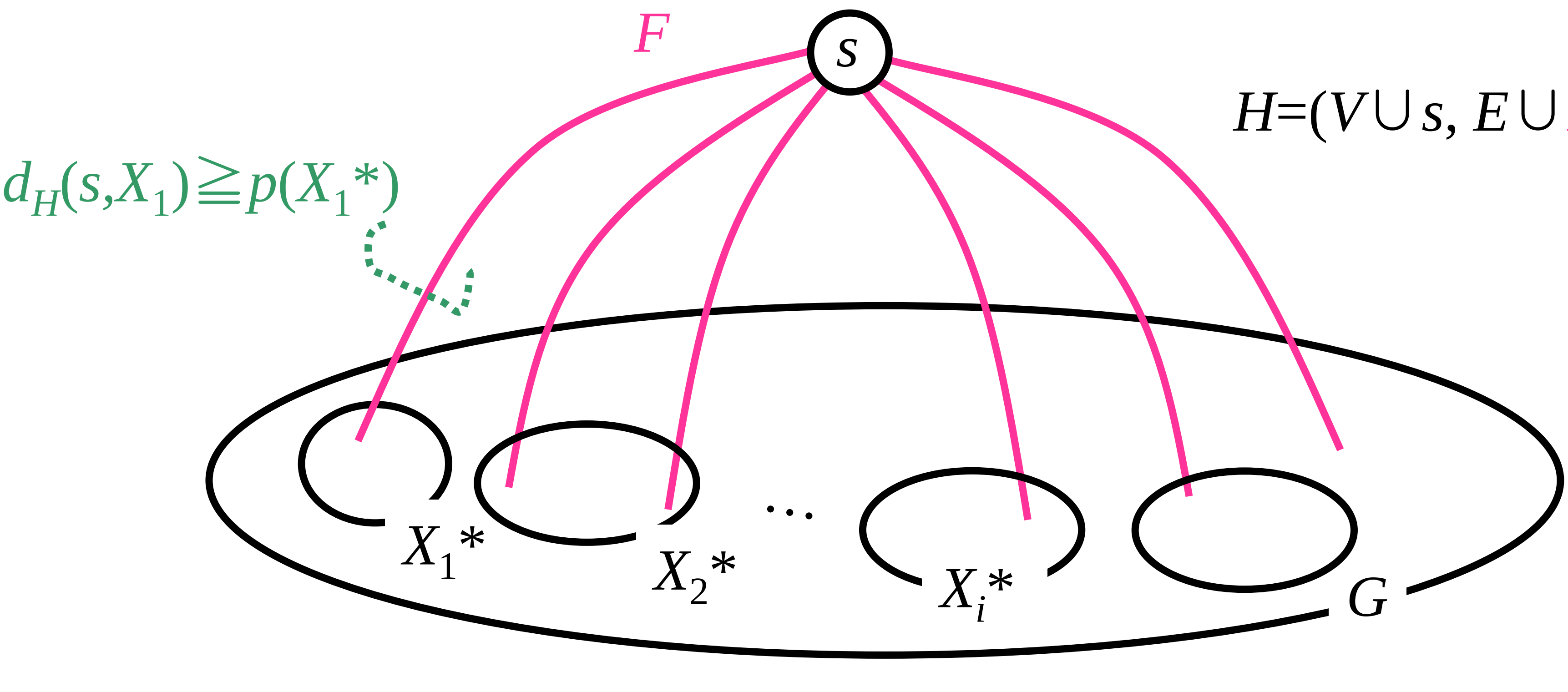
$\alpha(G)$ の計算

(*)をみたす任意のFに対し, $|F| \geqq \alpha(G)$

- G に新しい点 s を加える.
- (*) が成り立つように, G と s の間に辺を加える.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$\{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_t^*\}$: $\alpha(G) = \sum_{i=1}^{t} p(X_i)$ をみたす V の部分分割



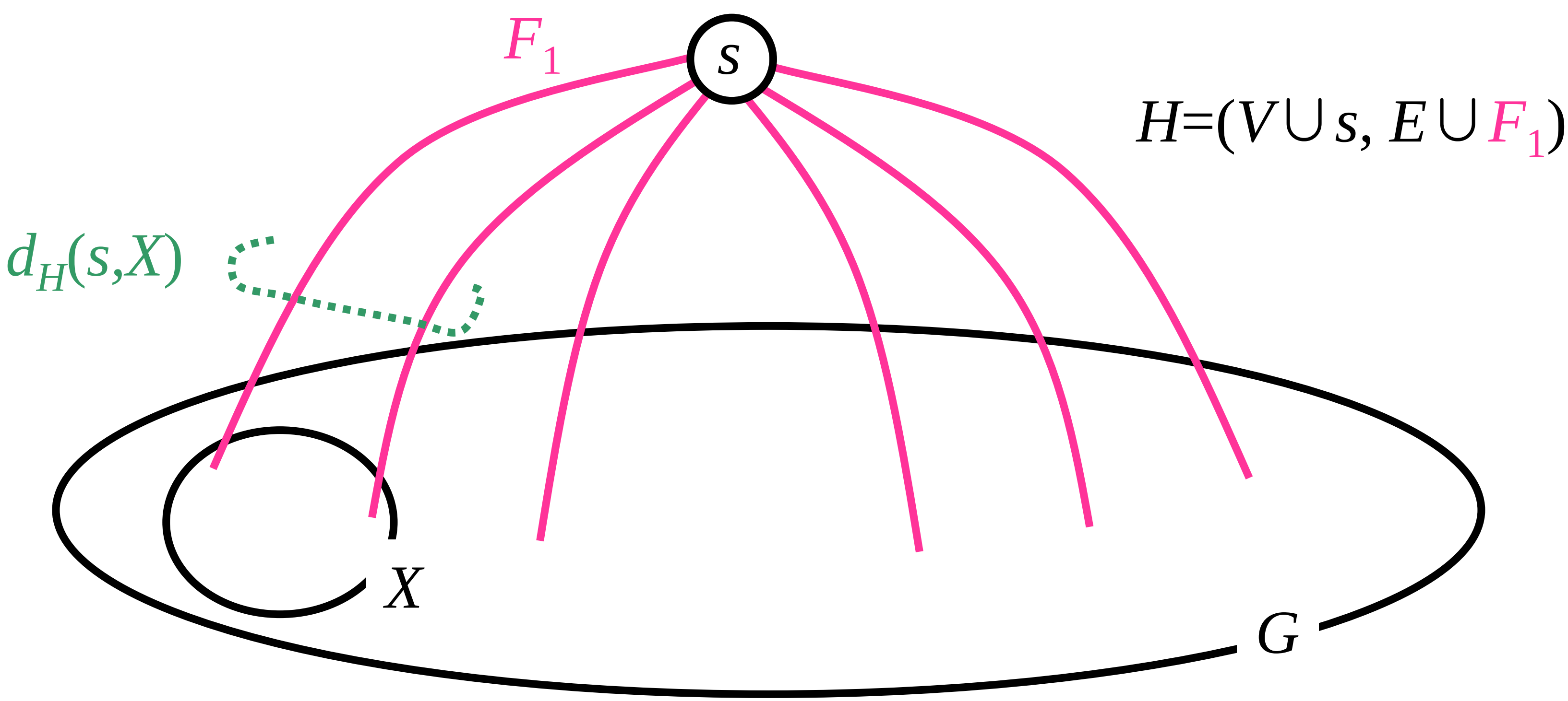
$\alpha(G)$ の計算

・G に新しい点 s を加える.

・(*) が成り立つように, G と s の間に辺を加える.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

F_1 : (*) をみたす極小な辺集合とする.



F_1 : (*) をみたす極小な辺集合.

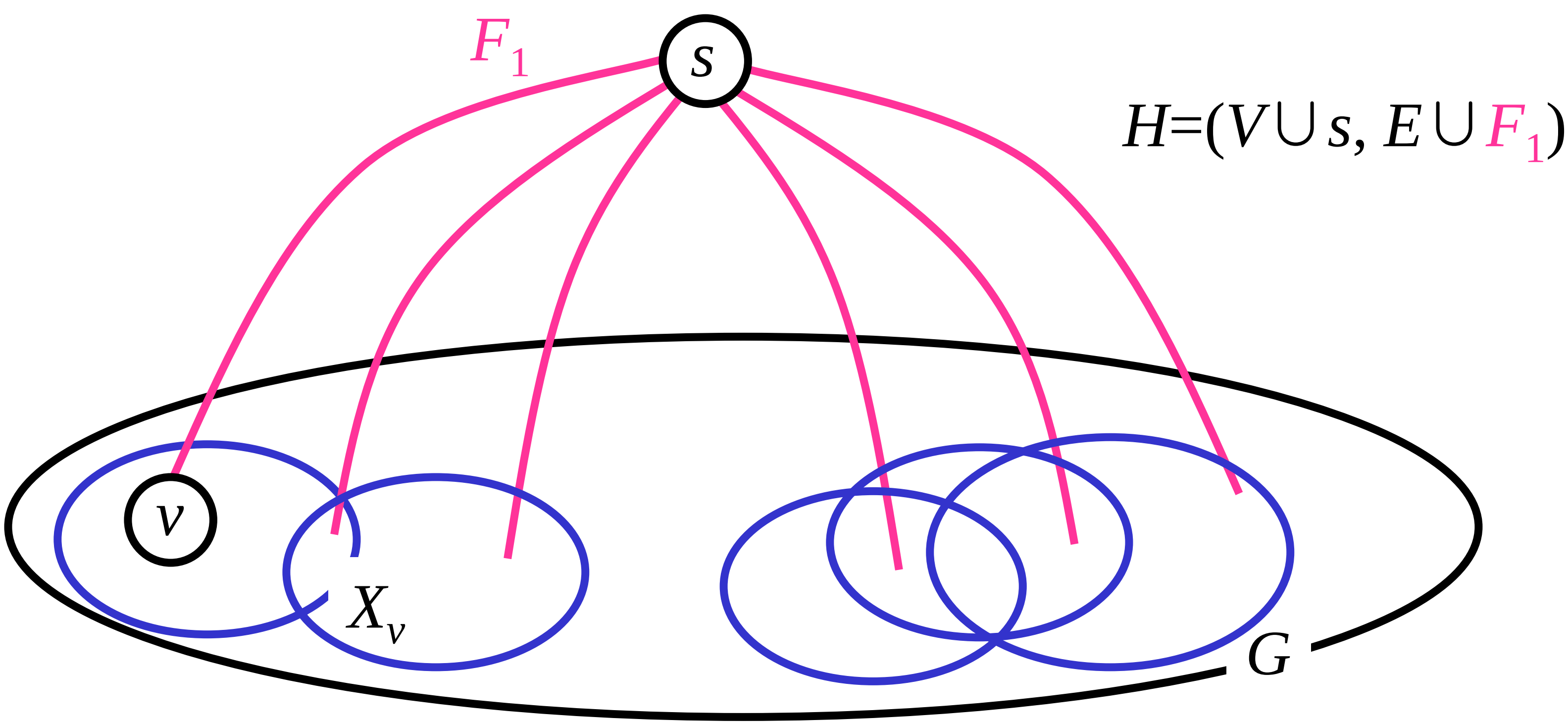
$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

F_1 : 極小より, 各辺 $(s,v) \in F_1$ に対し,

$$d_H(s, X_v) = p(X_v), \quad v \in X_v \subset V$$

をみたすカット X_v が存在する.

タイトセット (tight set)



関数 p の性質

(i) $p(X)+p(Y)\le p(X-Y)+p(Y-X)$ (負モジュラ, nega-modular)

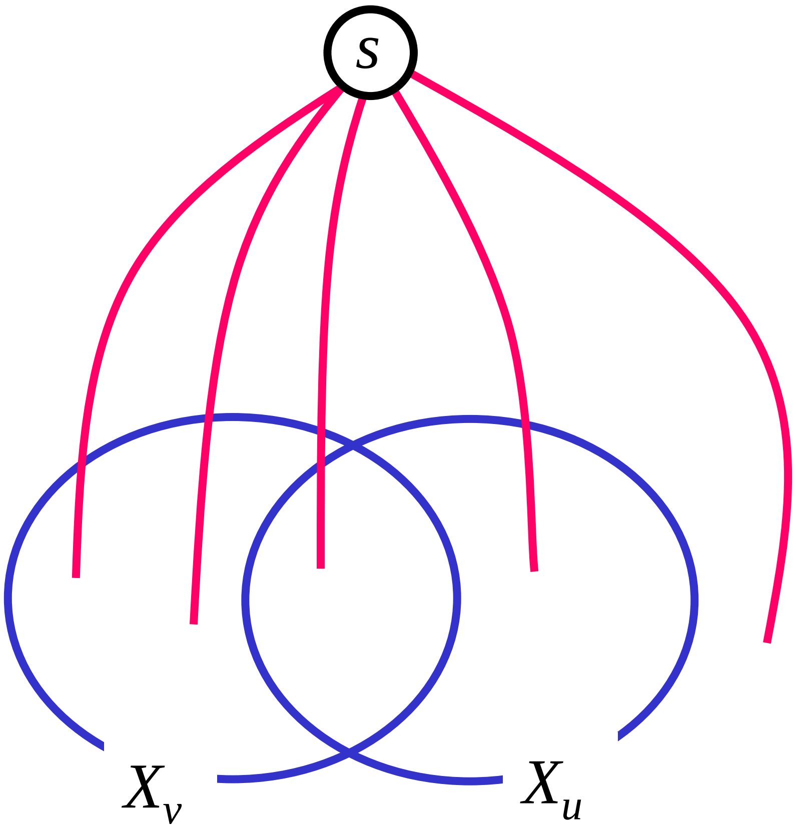
(ii) $p(X)+p(Y)\le p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$ (優モジュラ, supermodular)

$p(X)=k-d_G(X)$, $p(Y)=k-d_G(Y)$

(i) $d_G(X)+d_G(Y) \geqq d_G(X-Y)+d_G(Y-X)$ より.

(ii) $d_G(X)+d_G(Y) \geqq d_G(X\cap Y)+d_G(X\cup Y)$ より.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$



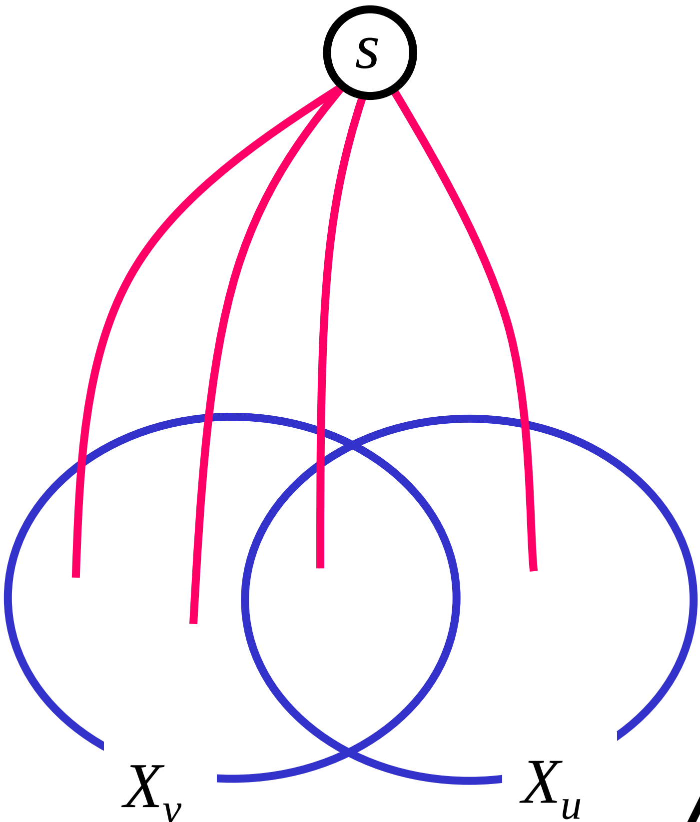
$\boxed{V - (X_u \cup X_v) \neq \phi \text{ の場合}}$

$$
\begin{aligned}
& d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v) \\
& = p(X_u) + p(X_v) \\
& \leq p(X_u \cap X_v) + p(X_u \cup X_v) \\
& \leq d_H(s, X_u \cap X_v) + d_H(s, X_u \cup X_v) \\
& = d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow d_H(s, X_u \cup X_v) = p(X_u \cup X_v)$$

$X_u \cup X_v$ もタイトセット.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

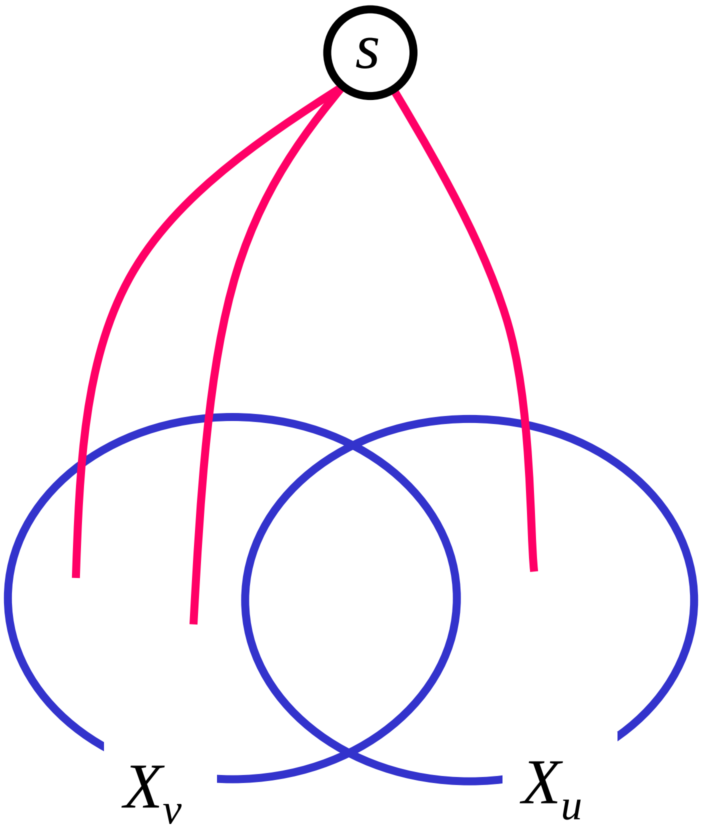


$\boxed{X_u \cup X_v = V \text{ の場合}}$

$$d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v)$$
$$= p(X_u) + p(X_v)$$
$$= p(X_v - X_u) + p(X_u - X_v)$$
$$\leq d_H(s, X_v - X_u) + d_H(s, X_u - X_v)$$
$$= d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v) - d_H(s, X_u \cap X_v)$$

$$p(X_u) = k - d_G(X_u) = k - d_G(V - X_u)$$
$$= k - d_G(X_v - X_u) = p(X_v - X_u)$$

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$



$\boxed{X_u \cup X_v = V \text{ の場合}}$

$$d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v)$$
$$= p(X_u) + p(X_v)$$
$$= p(X_v - X_u) + p(X_u - X_v)$$
$$\leq d_H(s, X_v - X_u) + d_H(s, X_u - X_v)$$
$$= d_H(s, X_u) + d_H(s, X_v) - 2d_H(s, X_u \cap X_v)$$
$$\Rightarrow d_H(s, X_u - X_v) = p(X_u - X_v)$$
$$d_H(s, X_v - X_u) = p(X_v - X_u)$$
$$d_H(s, X_u \cap X_v) = 0$$

$X_u - X_v$, $X_v - X_u$ もタイトセット.

F_1 : (*) をみたす極小な辺集合.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

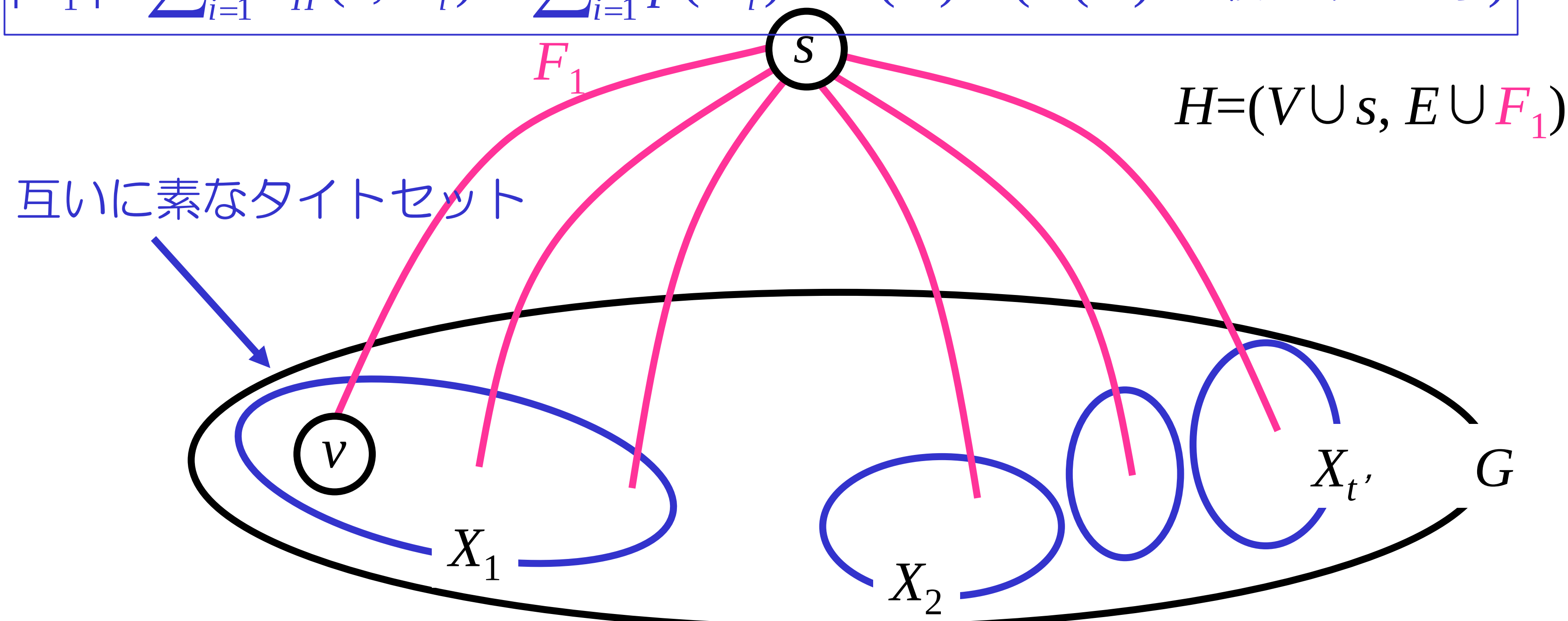
F_1 : 極小より, 各辺 $(s,v) \in F_1$ に対し,

$$d_H(s, X_v) = p(X_v), \quad v \in X_v \subset V$$

をみたすカット X_v が存在する.

よって, $|F_1| = \alpha(G)$

$$|F_1| = \sum_{i=1}^{t'} d_H(s, X_i) = \sum_{i=1}^{t'} p(X_i) \leq \alpha(G) \quad (\alpha(G)\text{の最大性より})$$

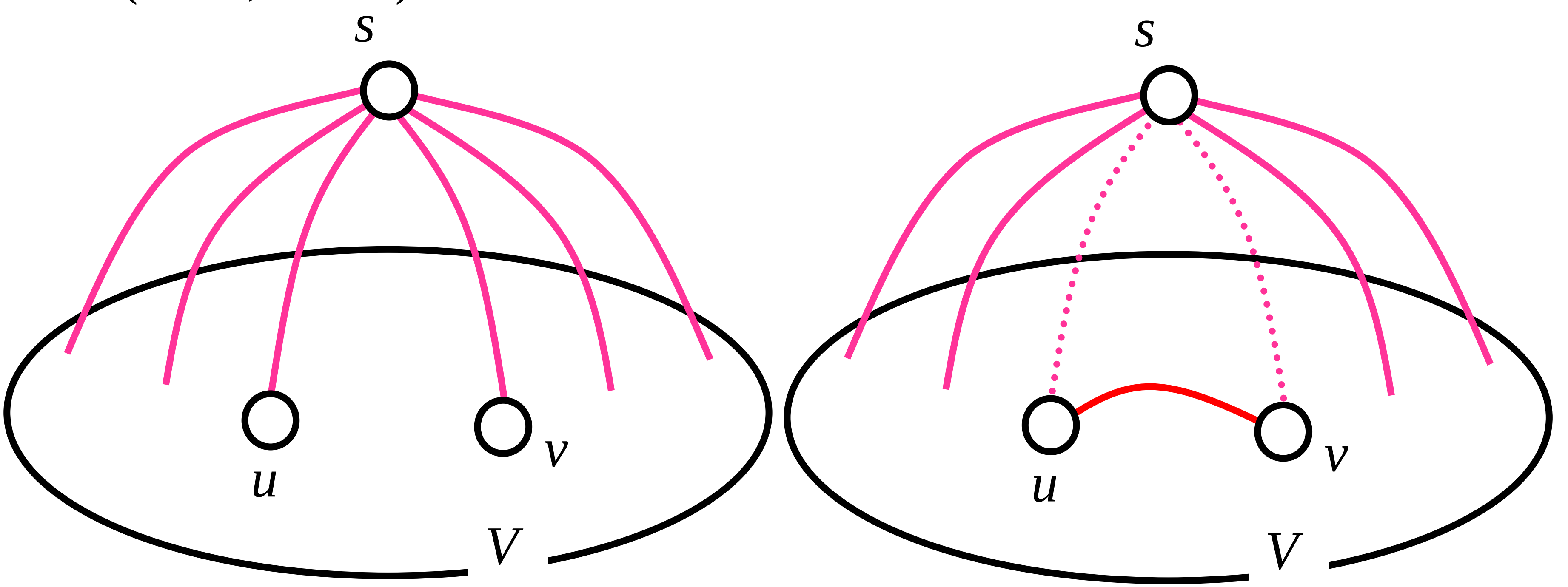


辺分離 (edge-splitting)

(s,u) と (s,v) を辺分離する:　(s,u) と (s,v) を削除して,

新しい辺 (u,v) を追加する.

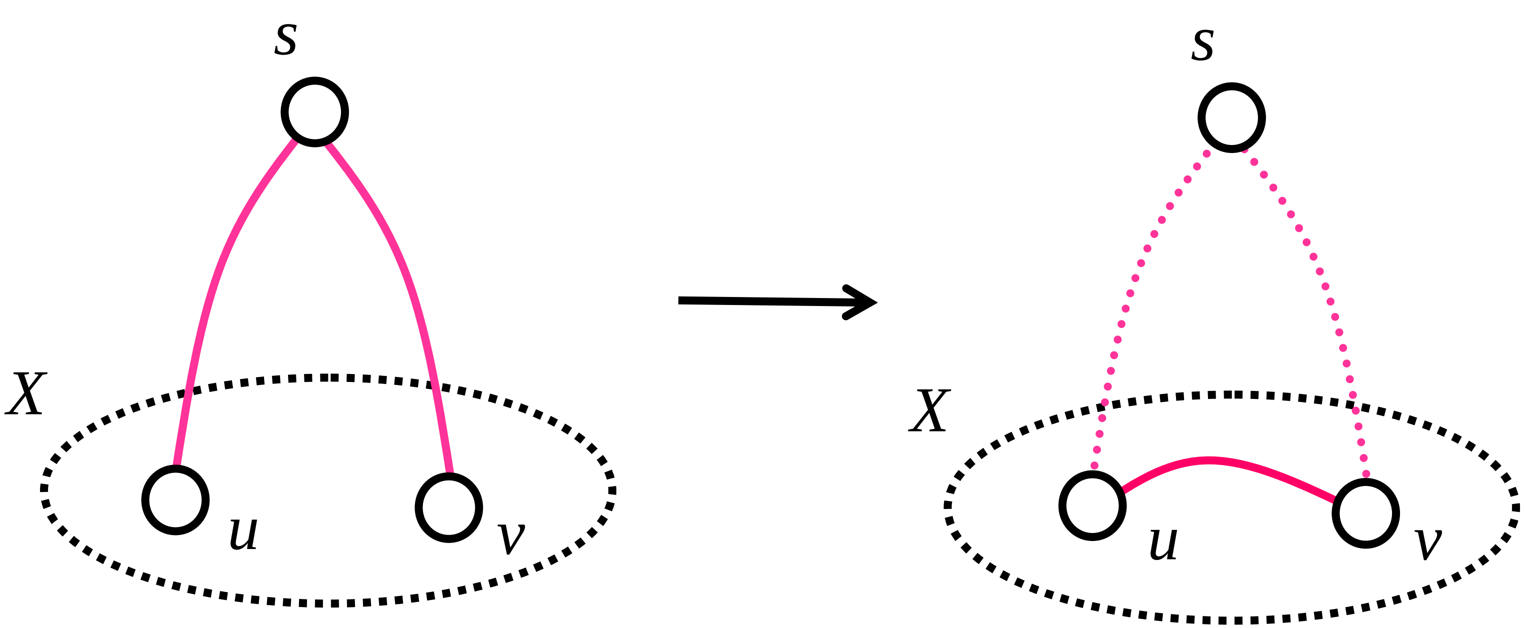
$H=(V\cup s,\, E\cup F)$　　　　H'



辺分離 (edge-splitting)

(s,u) と (s,v) を辺分離する: (s,u) と (s,v) を削除して,
新しい辺 (u,v) を追加する.

$H=(V\cup s,\ E\cup F)$ H'



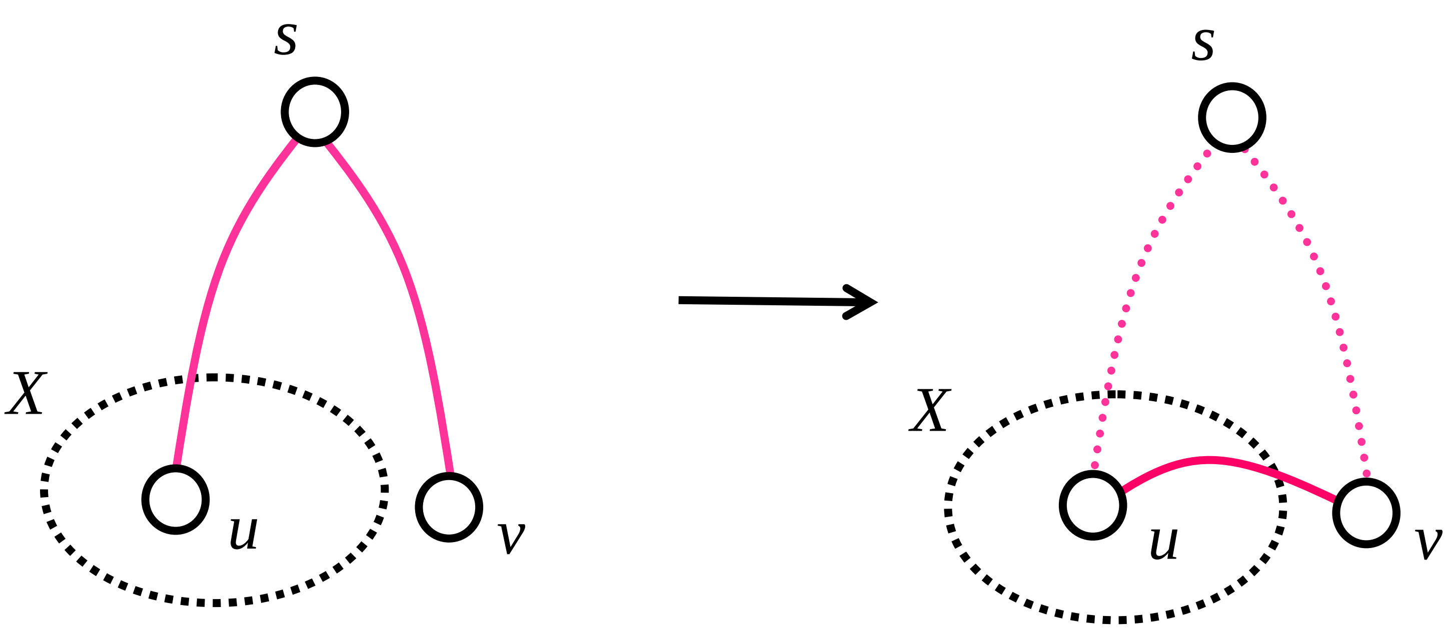
$X \subseteq V : \{u,v\} \subseteq X \Rightarrow d_{H'}(X) = d_H(X) - 2$

辺分離 (edge-splitting)

(s,u) と (s,v) を辺分離する: (s,u) と (s,v) を削除して,

新しい辺 (u,v) を追加する.

$H=(V\cup s, E\cup F)$ H'



他の $X \subseteq V \Rightarrow d_{H'}(X) = d_H(X)$

$p(X)=k-d_G(X)$

辺分離 (edge-splitting)

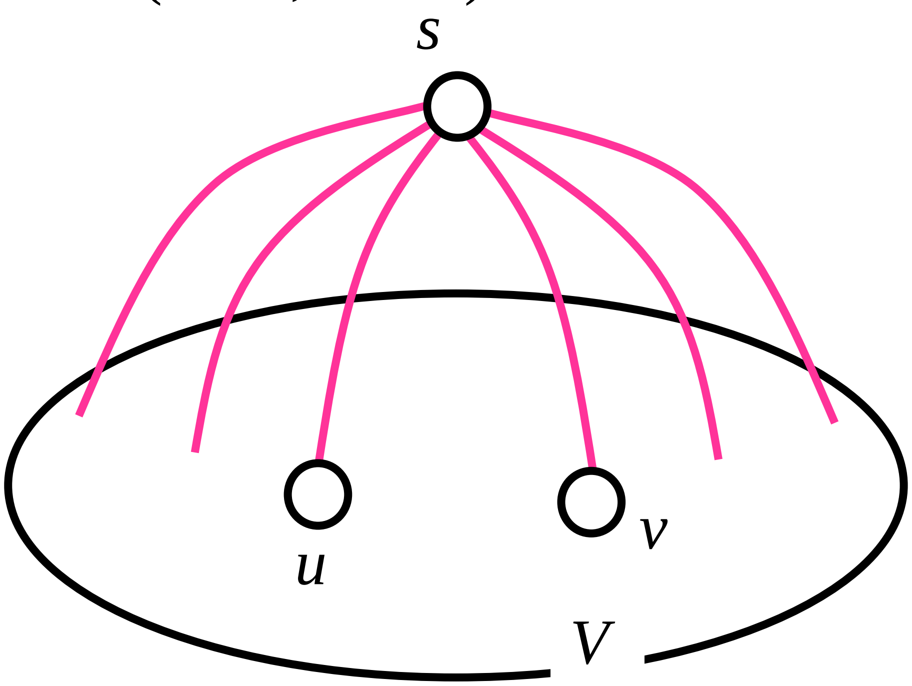
$$d_H(s,X)\geq p(X),\quad \phi\neq\forall X\subset V \qquad (*)$$

[定理1][Lovász79] $p(X)=k-d_G(X)$, H: (*)をみたす, $d_H(s)$: 偶数, $k\geqq 2$

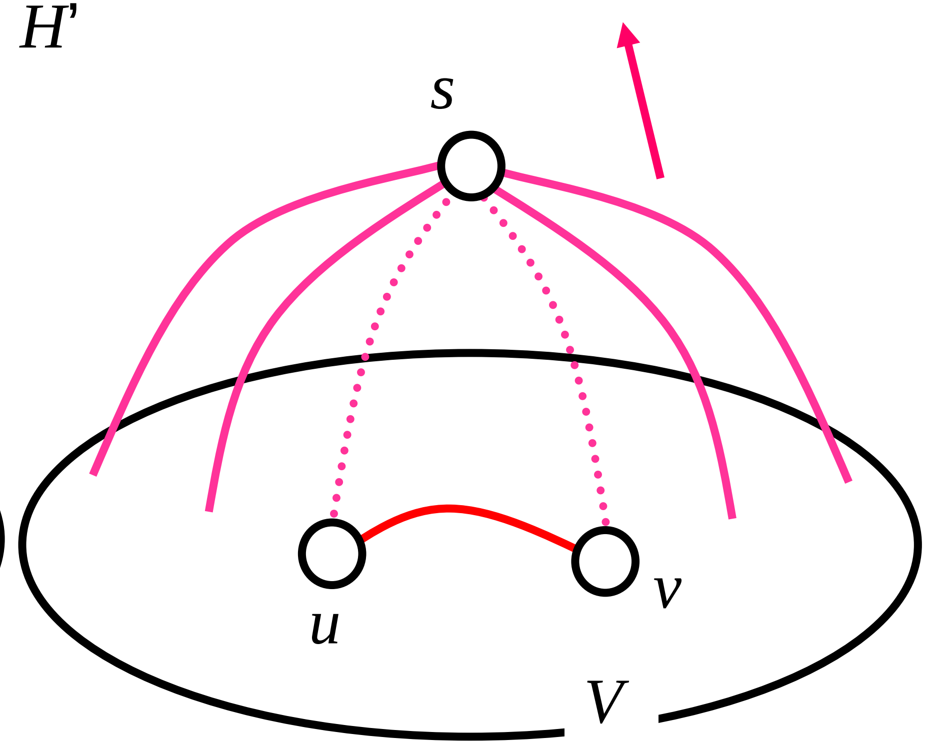
$\Rightarrow$ $\forall$辺(s,u)に対し, $\{(s,u),(s,v)\}$が(*)を保存する辺分離のペアである辺 (s,v) が存在する.

$$d_{H'}(s,X)\geq k-d_{G+\{(u,v)\}}(X),\quad \phi\neq\forall X\subset V$$

$H=(V\cup s, E\cup F)$



H'

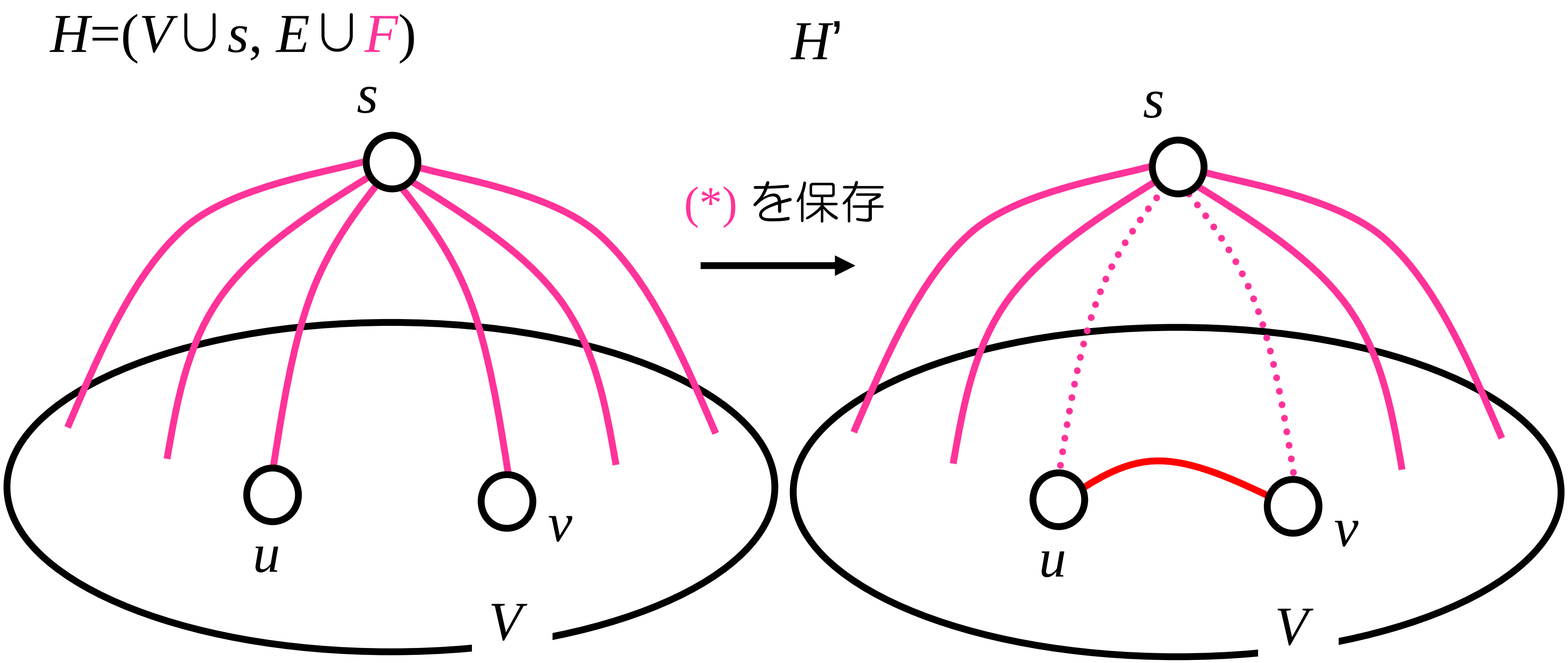


(1) (*) を満たし, $d_H(s) = \alpha(G)$ である $H = (V \cup s, E \cup F)$ を構成する.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

(2) $\alpha(G)$ が奇数の場合は, s と V の間に辺を 1 本加える (s の次数を偶数にする).

(3) s の次数が 0 になるまで, (*) を保存する辺分離を繰り返す (定理1).



(1) (*) を満たし, $d_H(s) = \alpha(G)$ である $H = (V \cup s, E \cup F)$ を構成する.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$$|E'| = \left\lceil \frac{\alpha(G)}{2} \right\rceil$$

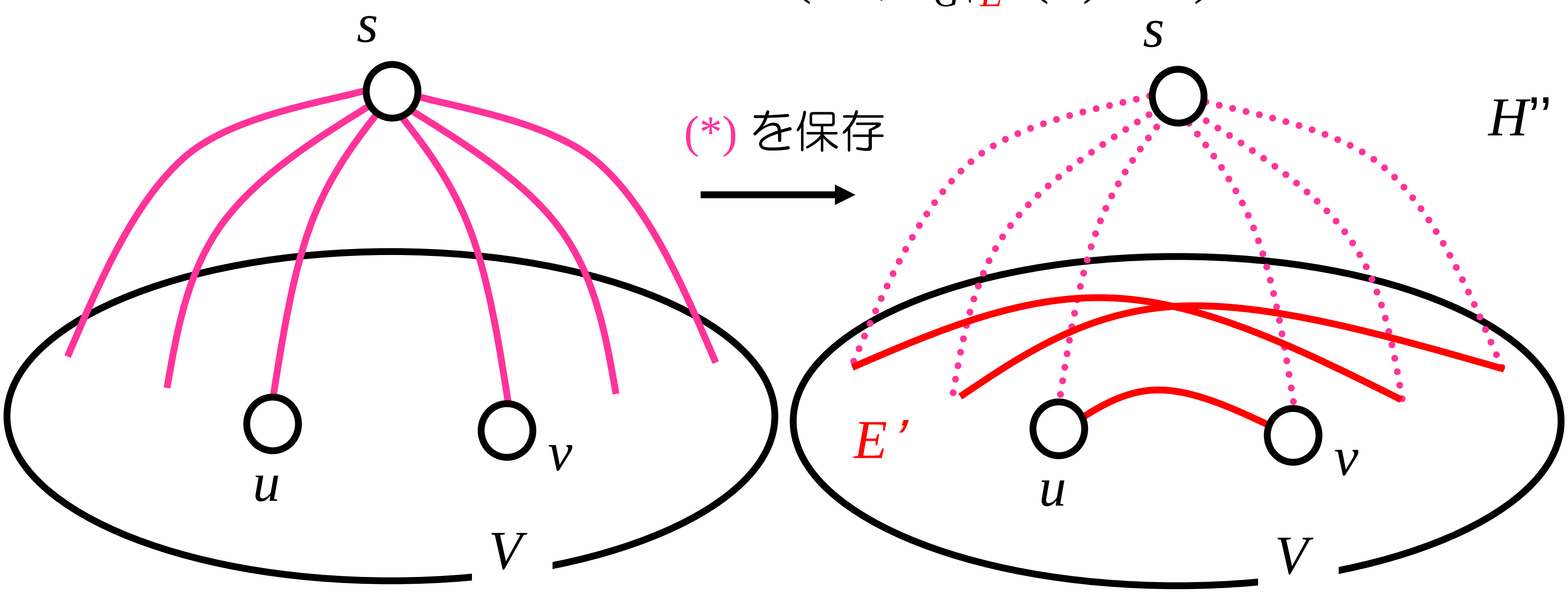
(2) $\alpha(G)$ が奇数の場合は, s と V の間に辺を 1 本加える (s の次数を偶数にする).

(3) s の次数が 0 になるまで, (*) を保存する辺分離を繰り返す (定理1).

$$0 \geqq p(X) = k - d_{G+E'}(X) \qquad \phi \neq \forall X \subset V$$

$$(\text{i.e., } d_{G+E'}(X) \geqq k)$$

$H = (V \cup s, E \cup F)$



$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V$ (*)

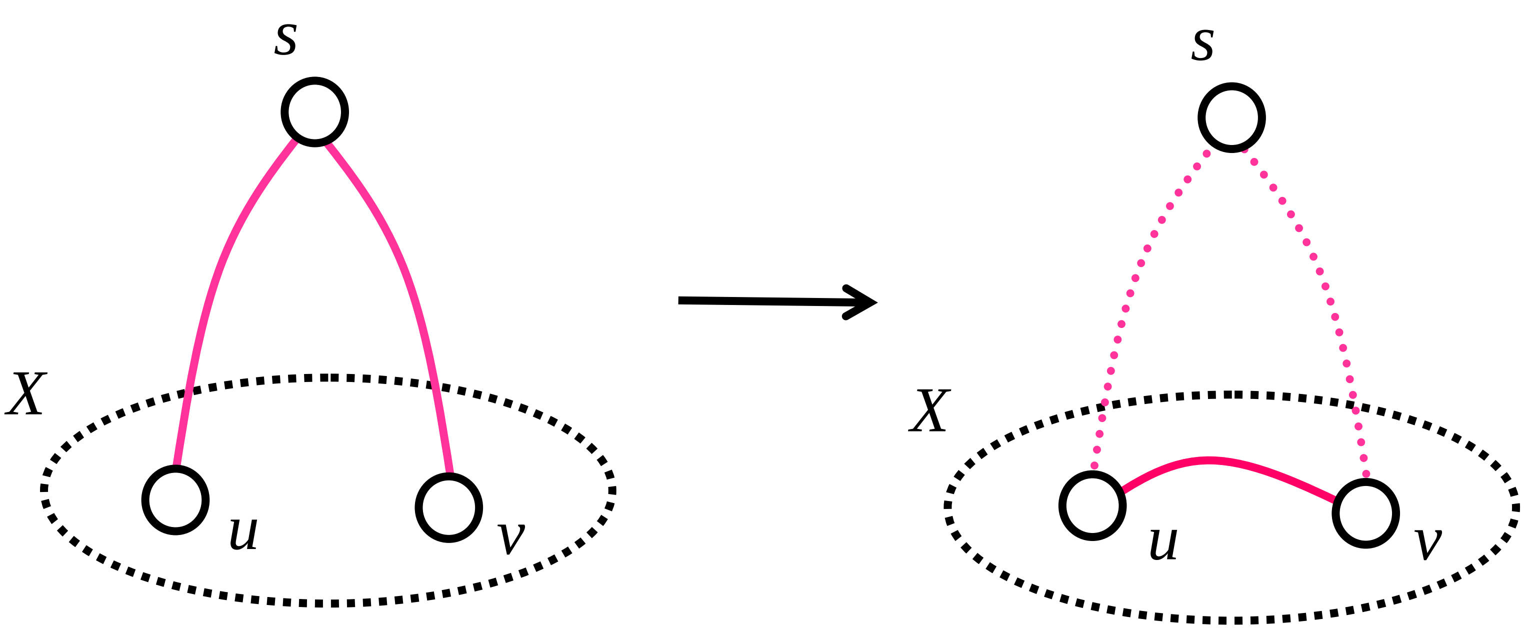
危険カット (dangerous cut) $X \subset V$:

$2 \leqq d_H(s,X) \leqq p(X)+1$ をみたすカット $X \subset V$

$\{(s,u),(s,v)\}$が(*)を保存する辺分離のペア

$\Leftrightarrow$ u,v を含む危険カットが存在しない.

$H=(V \cup s,\ E \cup F)$ H'



$X \subseteq V : \{u,v\} \subseteq X \ \Rightarrow\ d_{H'}(X) = d_H(X) - 2$

仮定: $k \geqq 2$, $H = (V \cup s, E \cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

ここでは, (*) を保存する F の辺の辺分離ペアが存在することを示す.

$p_{\max} = \max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

[Bernáth, Király08]

(Case-1) $p_{\max} = 1$ の場合.

$\forall X \subset V$: $p(X) = k - d_G(X) \leqq 1$ より, $\lambda(G) = k - 1$.

G の任意の極小最小カット Y_i に対し, (*) より 辺 $(s, y_i) \in F$, $y_i \in Y_i$ が存在する.

⇒ 「辺連結度を1上げる場合」において, 新しい辺で結ばれる G の極小最小カット のペア Y_i, Y_j に対し, (s, y_i) と (s, y_j) は (*) を保存する辺分離ペア.

仮定: $k \geqq 2$, $H = (V \cup s, E \cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$p_{\max} = \max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y) = p_{\max}$ である極小カットとする.

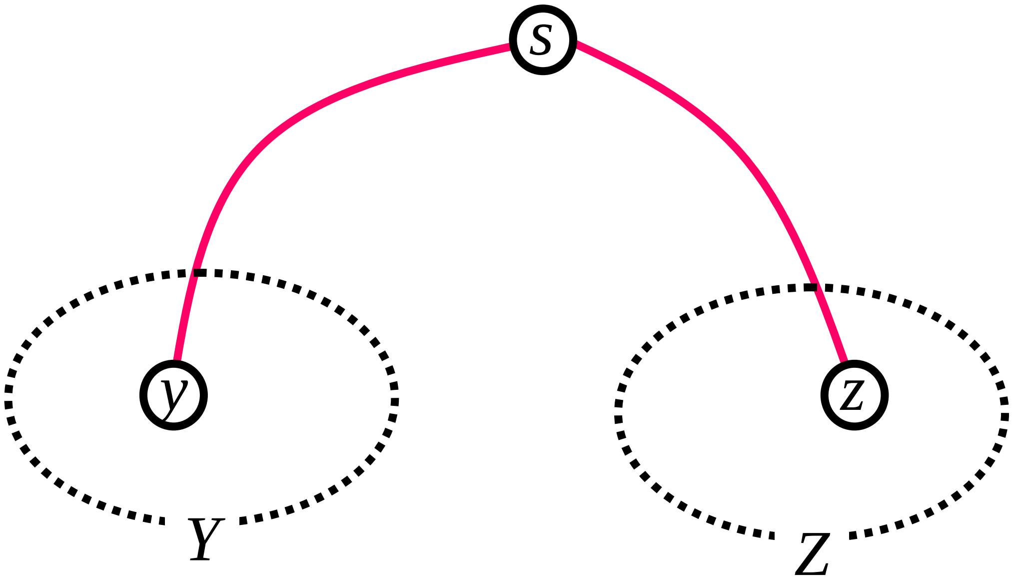
$p(V - Y) = k - d_G(V - Y) = k - d_G(Y) = p(Y) = p_{\max}$.

Z : $p(Z) = p_{\max}$ かつ $Z \subseteq V - Y$ である極小カットとする.

$p_{\max} > 0$ より, $(s, y) \in F$, $y \in Y$, $(s, z) \in F$, $z \in Z$ が存在する.

このとき, (s,y) と (s,z) は

(*) を保存する辺分離ペア.



仮定: $k \geqq 2$, $H=(V \cup s, E \cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \quad (*)$$

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y)=p_{\max}$である極小カット.

Z : $p(Z)=p_{\max}$かつ $Z \subseteq V-Y$ である極小カット.

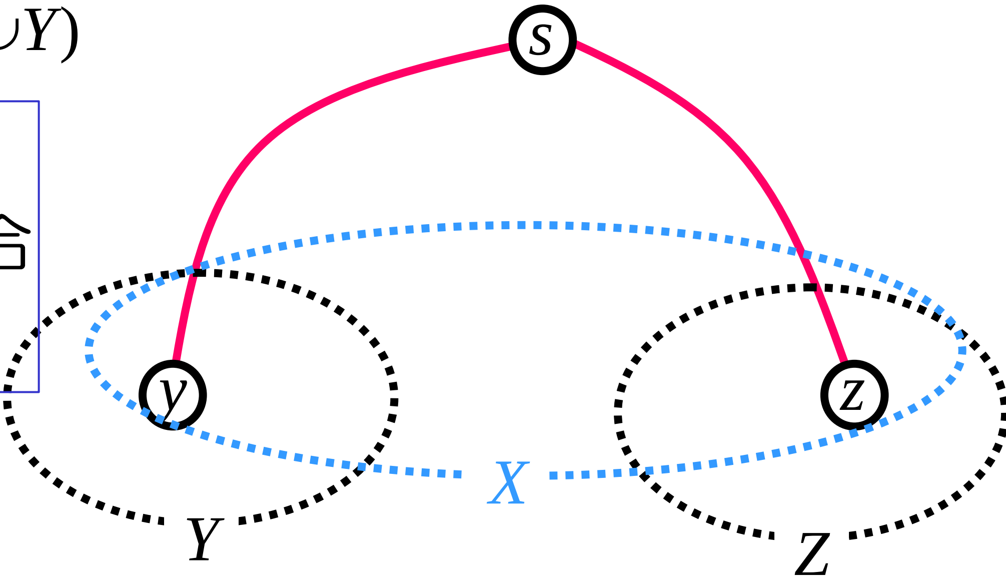
y, z を含む危険カット X があると仮定する.

$$\underline{d_H(s, X)-1}+p_{\max} \leq \underline{p(X)}+p(Y)$$
$$\leq p(X \cap Y)+p(X \cup Y)$$

(i) $X \cup Y = V$の場合

(ii) $X \cup Y \neq V$, $X \cup Y \cup Z = V$の場合

(iii) $X \cup Y \cup Z \neq V$の場合



仮定: $k \geqq 2$, $H=(V\cup s, E\cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s,X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \quad (*)$$

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

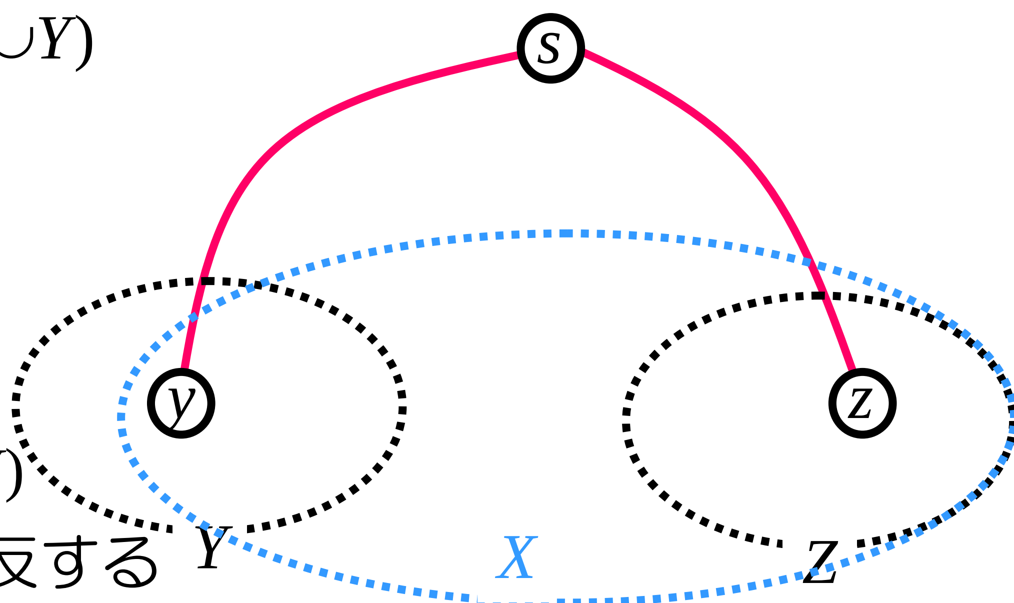
(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y)=p_{\max}$である極小カット.

Z : $p(Z)=p_{\max}$かつ $Z \subseteq V-Y$ である極小カット.

y, z を含む危険カット X があると仮定する.

$$\underline{d_H(s,X)-1}+p_{\max} \leq \underline{p(X)}+p(Y)$$
$$\leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$$



(i) $X\cup Y=V$の場合

$$d_H(s,X)-1+p_{\max} \leq p(X)+p(Y)$$

p:対称

$$= \underline{p(V-X)}+p(V-Y)$$

Y:極小

$$\leq \underline{p_{\max}}-1+d_H(s,X-Y)$$

$d_H(s,X\cap Y)\geq 1$ に反する

仮定: $k \geqq 2$, $H=(V\cup s, E\cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s,X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \quad (*)$$

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y)=p_{\max}$である極小カット.

Z : $p(Z)=p_{\max}$かつ $Z \subseteq V-Y$ である極小カット.

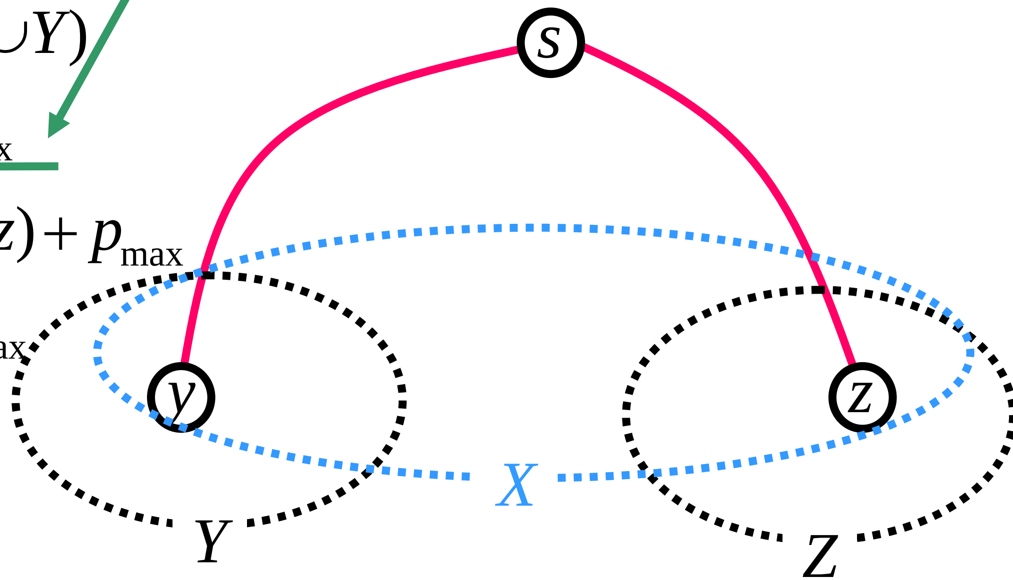
y, z を含む危険カット X があると仮定する.

$$\begin{aligned} d_H(s,X)-1+p_{\max} &\leq p(X)+p(Y) \\ &\leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y) \\ &\leq d(s,X\cap Y)+p_{\max} \\ &\leq d_H(s,X)-d_H(s,z)+p_{\max} \\ &\leq d_H(s,X)-1+p_{\max} \end{aligned}$$

$\boxed{X\cup Y \neq V \text{ が成り立つ}}$

よって, $p(X\cup Y)=p_{\max}$,

$d_H(s,X-Y)=d_H(s,z)=1.$



仮定: $k \geqq 2$, $H=(V\cup s, E\cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s,X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y)=p_{\max}$である極小カット.

Z : $p(Z)=p_{\max}$かつ $Z \subseteq V-Y$ である極小カット.

y, z を含む危険カット X があると仮定する.

$p(X\cup Y)=p_{\max}$,

$d_H(s, X-Y)=d_H(s,z)=1.$

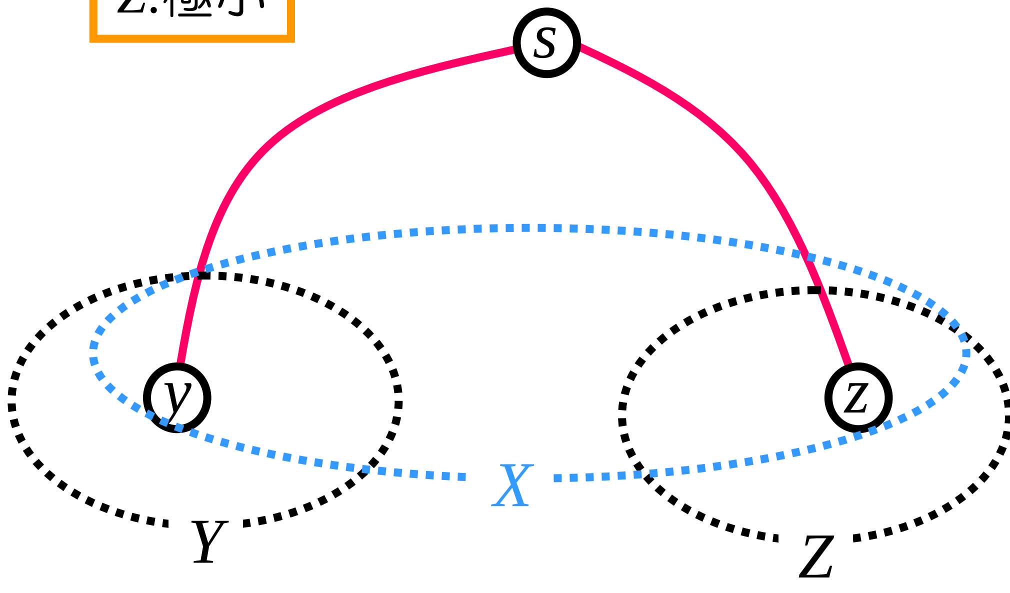
$$2p_{\max}=p(X\cup Y)+p(Z)$$

$\boxed{(ii)\ X\cup Y\cup Z=V \text{の場合}}$

$$=p(Z-(X\cup Y))+p(X\cup Y-Z)$$

$$\leq(p_{\max}-1)+p_{\max}$$

$\boxed{Z\text{:極小}}$



仮定: $k \geqq 2$, $H=(V \cup s, E \cup F)$: (*) をみたす, $d_H(s)$: 偶数.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

$p_{\max}=\max\{p(X) \mid X \subset V\}$ とする.

(Case-2) $p_{\max} \geqq 2$ の場合.

$Y \subset V$: $p(Y)=p_{\max}$である極小カット.

Z : $p(Z)=p_{\max}$かつ $Z \subseteq V-Y$ である極小カット.

y, z を含む危険カット X があると仮定する.

$$p(X \cup Y) = p_{\max},$$

$$d_H(s, X-Y) = d_H(s, z) = 1.$$

一方, $d_H(s,Z) \geqq p(Z) = p_{\max} \geqq 2$

これは, $d_H(s,X-Y)=1$ に反する.

したがって, (s,y) と (s,z) は
(*) を保存する辺分離ペア.

$$2p_{\max} = p(X \cup Y) + p(Z)$$

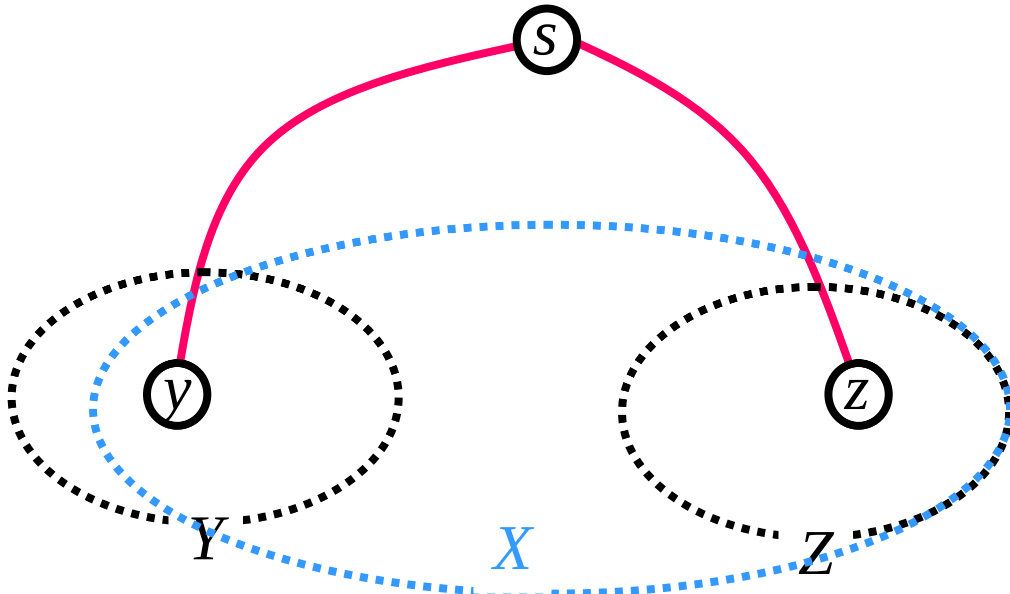
(iii) $X \cup Y \cup Z \neq V$ の場合

$$\leq p((X \cup Y) \cap Z) + p(X \cup Y \cup Z)$$

$$\leq 2p_{\max}$$

$$\Rightarrow p((X \cup Y) \cap Z) = p_{\max}$$

$\Rightarrow Z$ の極小性より $Z \subseteq X \cup Y$



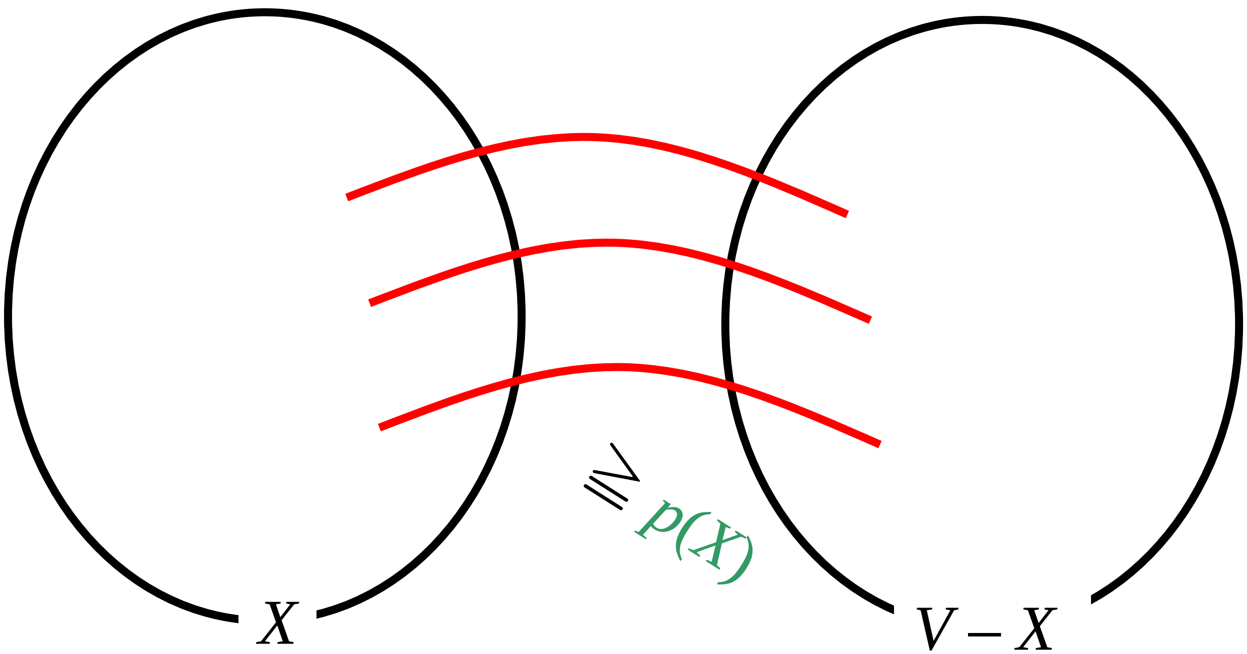
p-カバー問題

入力: 有限集合 V, 関数 p: $2^V \longrightarrow Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{(V,F)}(X) \geqq p(X)$, $\phi \neq {}^\forall X \subset V$.

$|F|$: 最小.



辺連結度

$n=|V|$,

$m=|\{\{u,v\} \mid (u,v)\in E\}|$

無向グラフ

[連結度要求]

k

P [Watanabe, Nakamura87]

O($mn + n^2\log n$) 時間 [Nagamochi03]

[一般化]

p-カバー問題

p: 対称横断優モジュラ関数 P [Benczur, Frank 99]

(symmetric crossing supermodular)

$(\cdot\, p(X) = p(V-X),\ X \subseteq V$

$\cdot\, X,Y \subseteq V$: 互いに横断かつ $p(X), p(Y) > 0$

$\Rightarrow p(X) + p(Y) \le p(X\cap Y) + p(X\cup Y)\,)$

[別の一般化]

[連結度要求]

$r(u,v)$ (局所辺連結度要求) P [Frank92]

局所辺連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r(u,v) \in Z_+$, $u,v \in V$.

出力: 辺集合 F

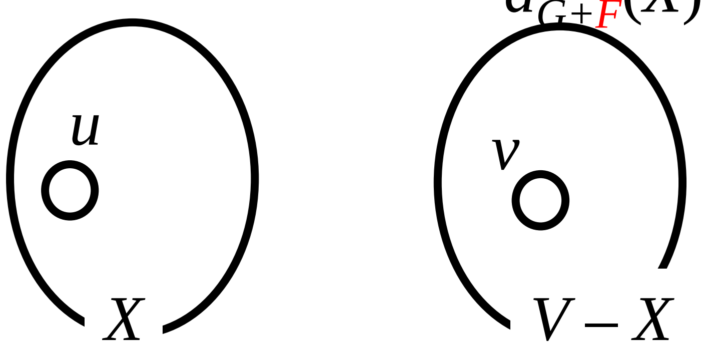
s.t. $G+F$ の局所辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,v) \geq r(u,v)$, $u,v \in V$.

$|F|$: 最小.

$d_{G+F}(X) \geqq \max\{r(u,v) \mid u \in X, v \in V-X\}$

$\forall \phi \neq X \subset V$.

$R(X)$ で表す.



[別の一般化]

[連結度要求]

$r(u,v)$ (局所辺連結度要求)　　P　　[Frank92]

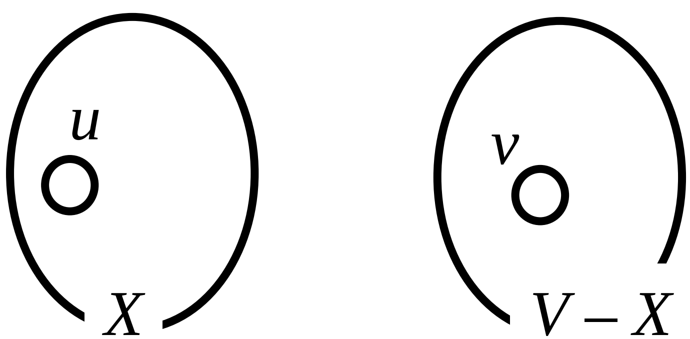
局所辺連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r(u,v) \in Z_+$, $u,v \in V$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ の局所辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,v) \geqq r(u,v)$, $u,v \in V$.

$|F|$: 最小.



不足度

$p(X)=R(X)- d_G(X)$

局所辺連結度増大問題

p : 優モジュラではない.

$r(u_1,v_1)=k$

$r(u_2,v_2)=k$

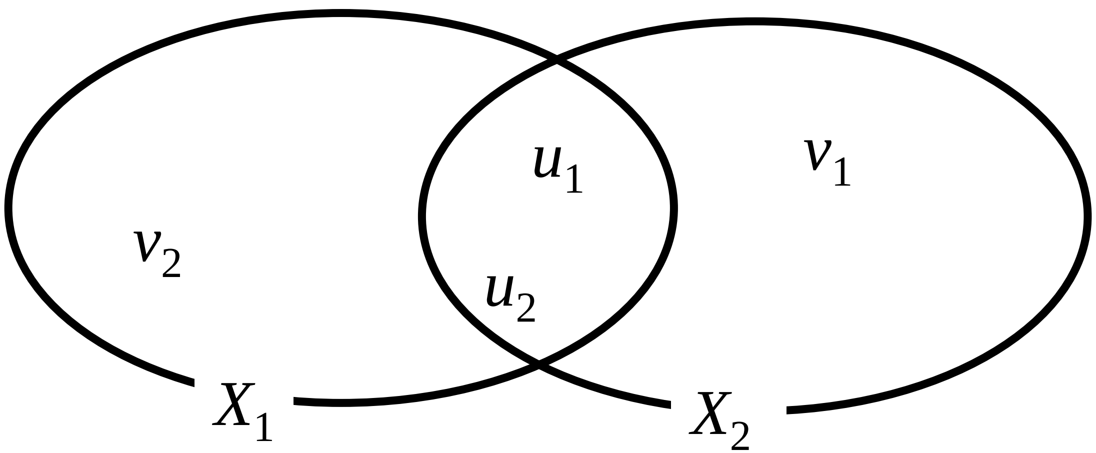
$r(u,v)=0$, 他の u, v

$R(X_1)=r(u_1,v_1)=k$

$R(X_2)=r(u_2,v_2)=k$

$R(X_1\cap X_2)=r(u_1,v_1)=k$

$R(X_1\cup X_2)=0$



$R(X_1-X_2)=r(u_2,v_2)=k$

$R(X_2-X_1)=r(u_1,v_1)=k$

$$R(X_1)+R(X_2)>R(X_1\cap X_2)+R(X_1\cup X_2)$$

$$R(X_1)+R(X_2)\le R(X_1-X_2)+R(X_2-X_1)$$

局所辺連結度増大問題

$R(X_1)+R(X_2)\le R(X_1\cap X_2)+R(X_1\cup X_2)$ と

$R(X_1)+R(X_2)\le R(X_1-X_2)+R(X_2-X_1)$ の少なくとも一方は成り立つ.

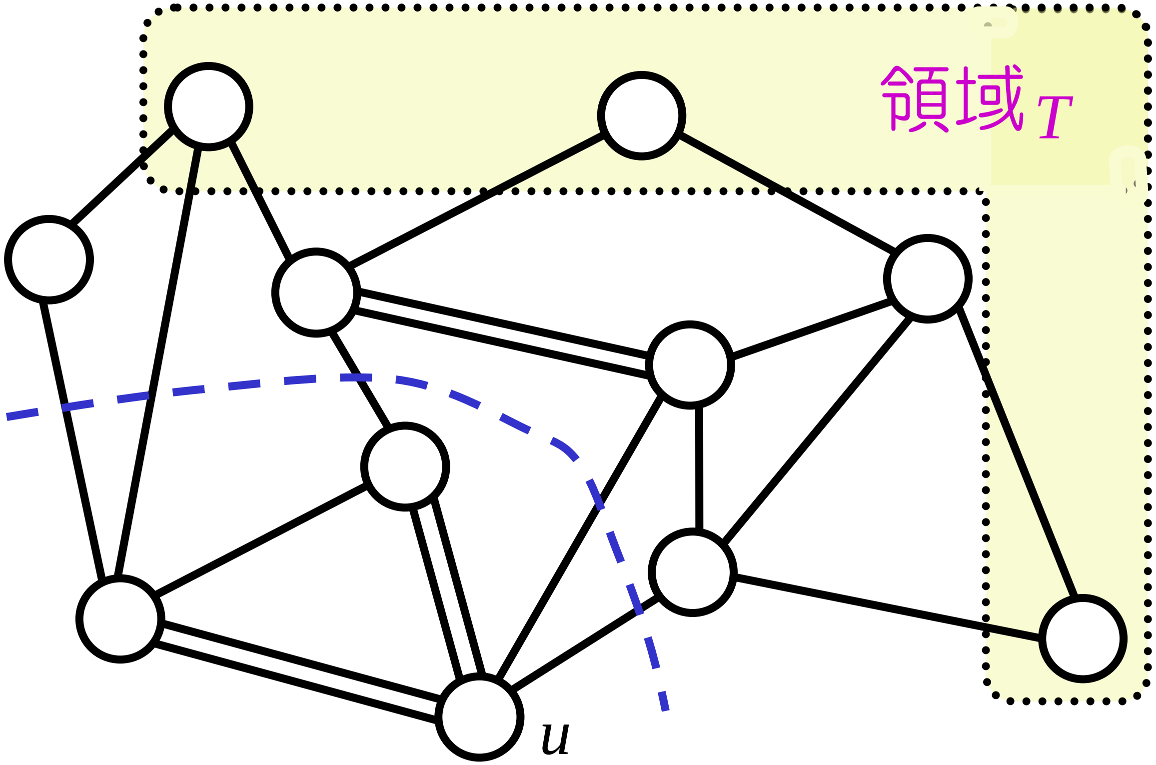
R : 弱優モジュラ (skew-supermodular)

$\Rightarrow p$: 弱優モジュラ

節点領域辺連結度増大問題

節点領域辺連結度 (Node to Area edge-connectivity, NA辺連結度)

[Ito 94]



・点 u と点集合 (領域) T 間の辺連結度

$$\lambda_G(u, T) = \min \{ d_G(X) \mid u \in X, T \in V - X \} \quad =5$$

NA辺連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 領域族 $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\ldots,T_q\}$, $T_i \subseteq V$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u と T 間のNA辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,T) \geqq k$, $u \in V, T \in \mathcal{T}$.

$|F|$: 最小.

[連結度要求]

$k = 1$	NP困難	[Miwa, Ito 99]
$k \geqq 2$	P	[Ishii et al. 03]

NA辺連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 領域族 $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\ldots,T_q\}$, $T_i \subseteq V$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

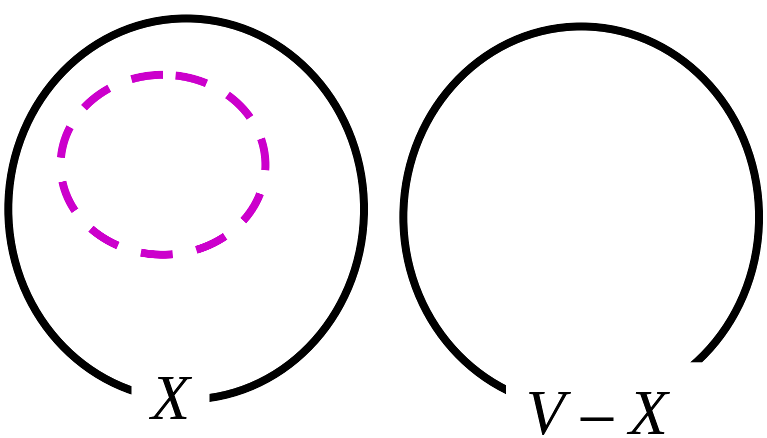
s.t. $G+F$ における

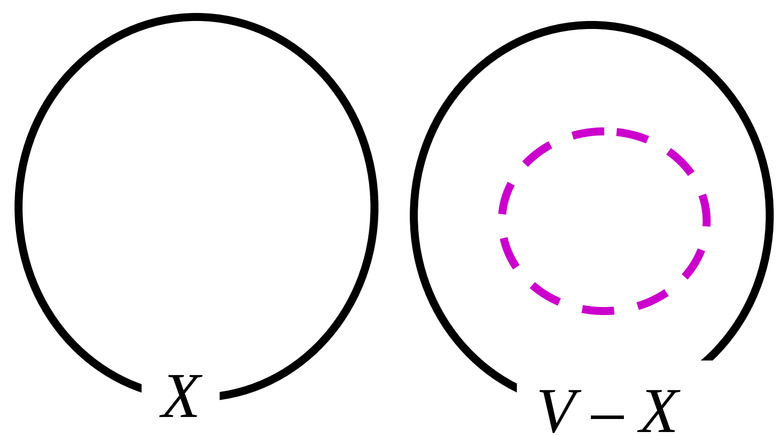
u と T 間のNA辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,T) \geqq k$, $u \in V, T \in \mathcal{T}$.

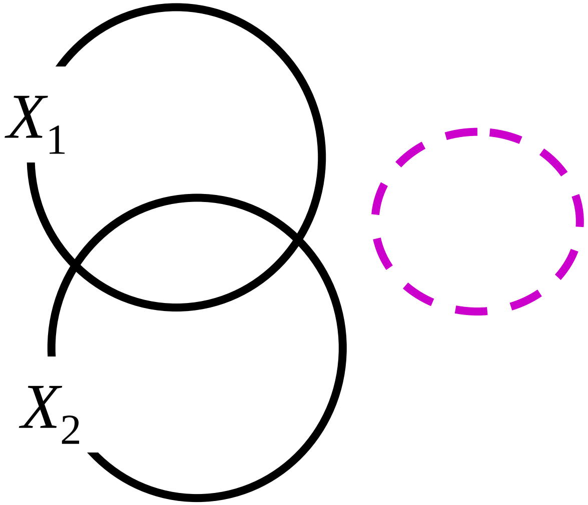
$|F|$: 最小.

不足度: $\exists T \in \mathcal{T}$ s.t. $X \supseteq T$ or $X \cap T = \phi$ $\Rightarrow$ $p(X)=k-d_G(X)$

弱優モジュラ

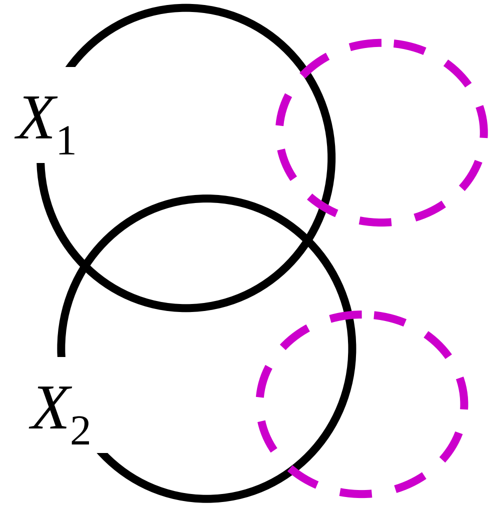




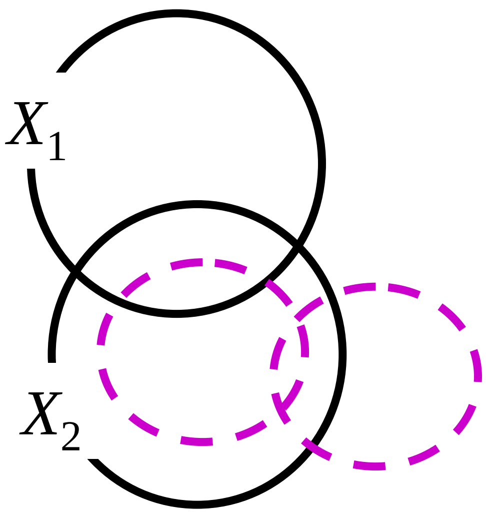


$$p(X_1)+p(X_2)\le p(X_1\cap X_2)+p(X_1\cup X_2)$$

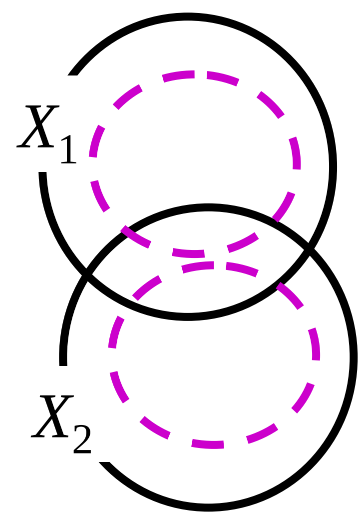
$$p(X_1)+p(X_2)\le p(X_1-X_2)+p(X_2-X_1)$$



$$p(X_1)+p(X_2)\le p(X_1-X_2)+p(X_2-X_1)$$



$$p(X_1)+p(X_2)\le p(X_1\cap X_2)+p(X_1\cup X_2)$$



$$p(X_1)+p(X_2)\le p(X_1-X_2)+p(X_2-X_1)$$

NA辺連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 領域族 $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\ldots,T_q\}$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

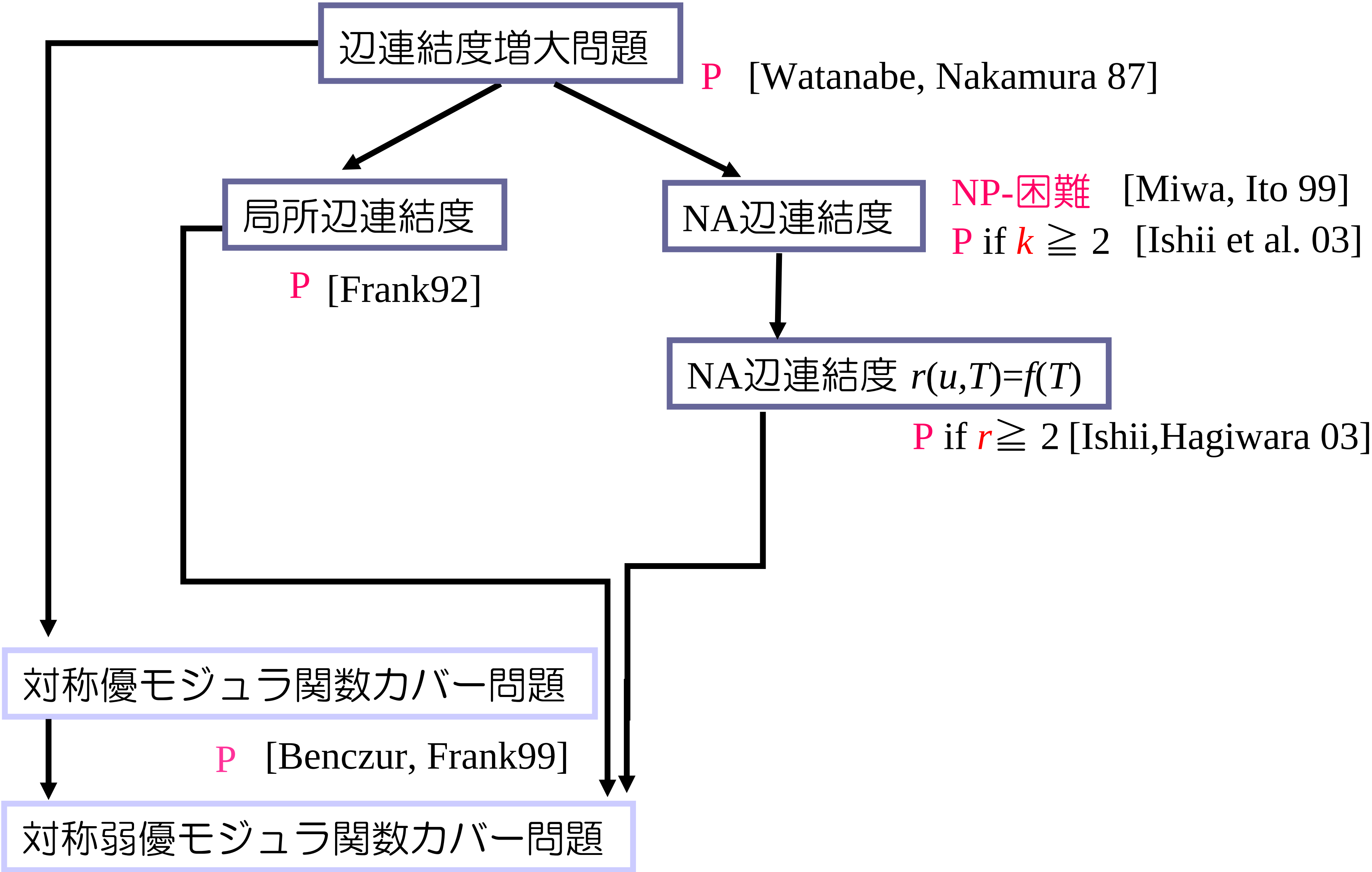
u と T 間のNA辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,T) \geqq k$, $u \in V, T \in \mathcal{T}$.

$|F|$: 最小.

[連結度要求]

$k = 1$	NP困難	[Miwa, Ito 99]
$k \geqq 2$	P	[Ishii et al. 03]
$r(u,T)=f(T) \geqq 2$ (Tに依存)	P	[Ishii, Hagiwara 03]

→ p : 弱優モジュラ


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度
NP-困難 [Miwa, Ito 99]
P if $k \geqq 2$ [Ishii et al. 03]
NA辺連結度 $r(u,T)=f(T)$
P if $r \geqq 2$ [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題

r^*-増大問題

入力: グラフ $G=(V, E)$, 要求関数 $r^*: 2^V \rightarrow Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{G+F}(X) \geqq r^*(X), \ \phi \neq \forall X \subset V.$

$|F|$: 最小.

辺連結度増大問題 --- $r^*(X)=k$

局所辺連結度増大問題 --- $r^*(X)=\max\{r(u,v) \mid u \in X \subseteq V-v\}$

NA辺連結度増大問題 --- $r^*(X)=\max\{r(u,T) \mid u \in X \subseteq V-T, T \in \mathcal{T}\}$

NA辺連結度増大問題 --- $r^*(X)=\max\{f(T) \mid T \cap X=\phi, T \in \mathcal{T}\}$

($r(u,T)=f(T)$ の場合)

r^*-増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r^*: 2^V \rightarrow Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{G+F}(X) \geqq r^*(X), \ \phi \neq \forall X \subset V.$

$|F|$: 最小.

---

r^* : 単調非増加関数(monotone nonincreasing)の場合

$(\phi \neq X \subseteq Y \subset V \Rightarrow r^*(X) \geq r^*(Y)$ をみたす場合 $)$

同等

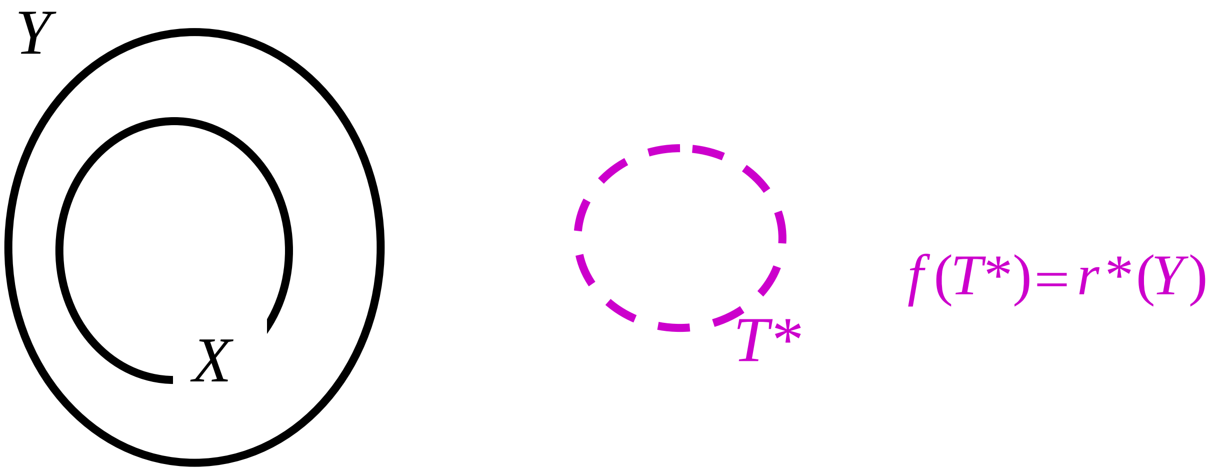
NA辺連結度増大問題 ---

$(r(u,T) = f(T)$ の場合$)$

$$r^*(X) = \max\{ f(T) \mid T \cap X = \phi, T \in \mathcal{T} \}$$

NA辺連結度増大問題 $(r(u,T)=f(T)$ の場合$)$:

$r^*(X)=\max\{f(T) \mid T\cap X=\phi, T\in\mathcal{T}\}$ である r^*-増大問題.



$$r^*(Y)=\max\{f(T) \mid T\cap Y=\phi, T\in\mathcal{T}\}$$

$$r^*(X)\geq f(T^*)=r^*(Y)$$

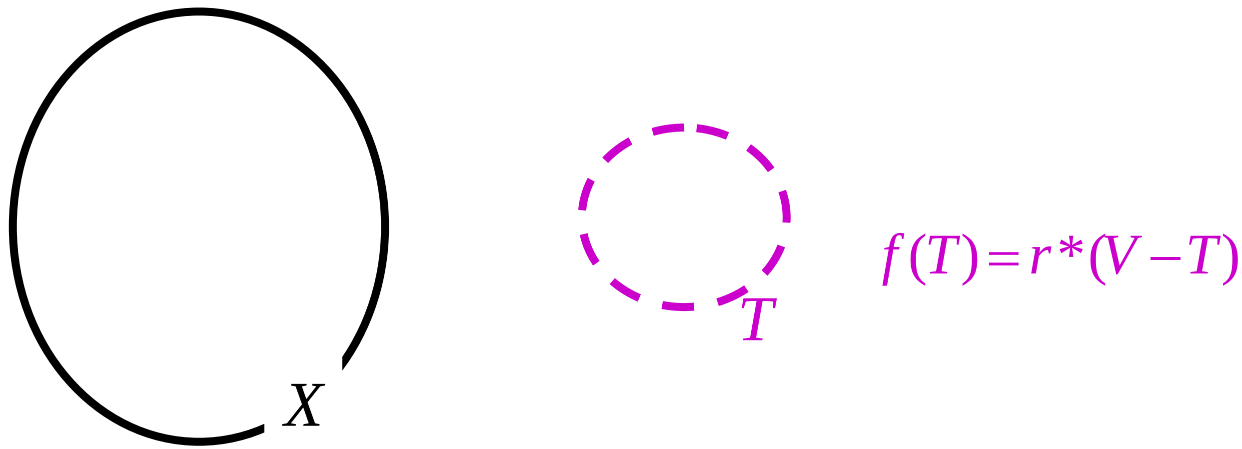
$\Rightarrow r^*$: 単調非増加関数

r^*:単調非増加関数の場合

($\phi \neq X \subseteq Y \subset V \Rightarrow r^*(X) \geq r^*(Y)$をみたす場合)

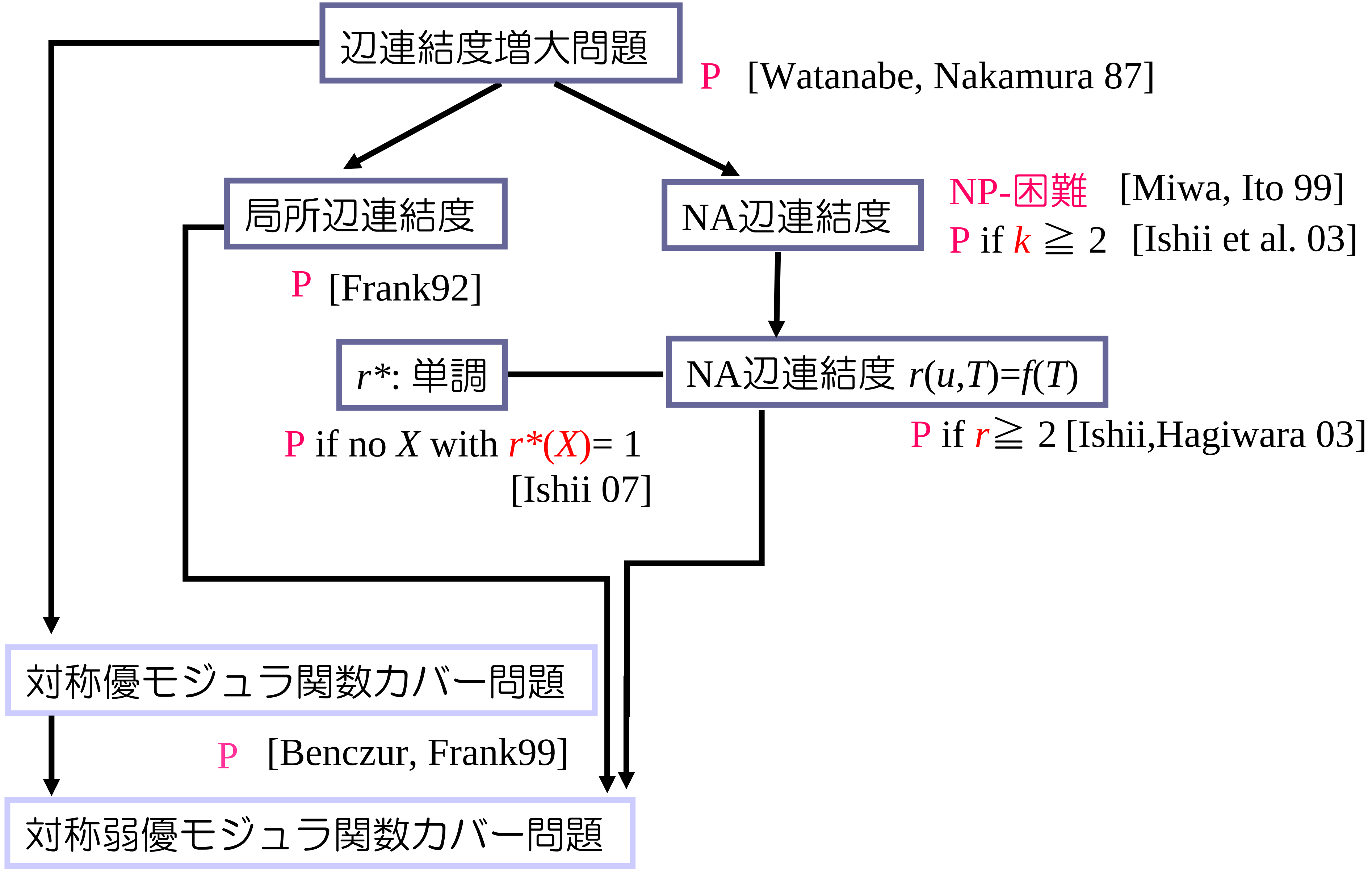
次の $\mathcal{T}$ と f に関するNA辺連結度増大問題と同等.

$\mathcal{T} = 2^V - \{\phi, V\}$, $f(T) = r^*(V - T)$, $T \in \mathcal{T}$ とする.



このとき, 任意の $\phi \neq X \subset V$ に対し,

$$\max\{ f(T) \mid T \cap X = \phi, T \in \mathcal{T} \}$$
$$= \max\{ r^*(V - T) \mid T \cap X = \phi, T \in \mathcal{T} \}$$
$$= r^*(X) \qquad (r^* \text{ の単調性より})$$


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度
NP-困難 [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
r*: 単調
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題

NA辺連結度増大問題

入力: グラフ $G=(V, E)$, 領域族 $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\ldots,T_q\}$, 整数 $k \geqq 0$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u と T 間のNA辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,T) \geqq k$, $u \in V, T \in \mathcal{T}$.

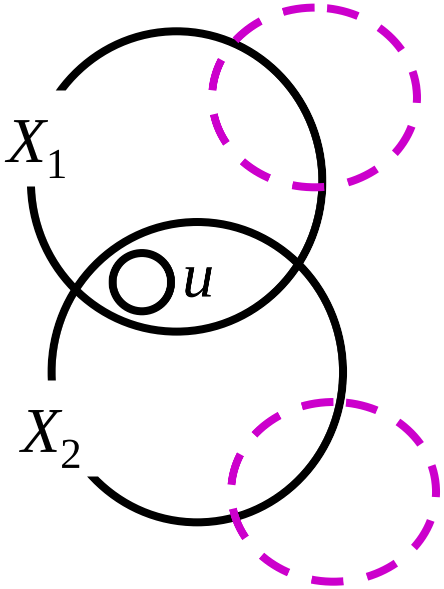
$|F|$: 最小.

[連結度要求]

$k = 1$	NP困難	[Miwa, Ito 99]
$k \geqq 2$	P	[Ishii et al. 03]
$r(u,T)=f(T) \geqq 2$ (Tに依存)	P	[Ishii, Hagiwara 03]
$r(u,T)=f(u)$ (u に依存)		

NA辺連結度増大問題

$(\, r(u,T) = f(u)$ の場合$)$



$G=(V,\phi)$

$f(v)=0,\ \forall v \neq u$

$p(X_1) = f(u)$

$p(X_2) = f(u)$

$p(X_1 \cap X_2) = f(u)$

$p(X_1 \cup X_2) = \underline{p(X_1 - X_2)} = \underline{p(X_2 - X_1)} = 0$

u を含まない.

$$p(X_1)+p(X_2) \leq p(X_1 \cap X_2) + p(X_1 \cup X_2)$$
$$p(X_1)+p(X_2) \leq p(X_1 - X_2) + p(X_2 - X_1)$$

どちらも成立しない.

p は弱優モジュラでない.

NA辺連結度増大問題

入力: グラフ $G=(V,E)$, 領域族 $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\ldots,T_q\}$, 整数 $k\geqq 0$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u と T 間のNA辺連結度 $\lambda_{G+F}(u,T)\geqq k$, $u\in V, T\in\mathcal{T}$.

$|F|$: 最小.

[連結度要求]

$k=1$	NP困難	[Miwa, Ito 99]
$k\geqq 2$	P	[Ishii et al. 03]
$r(u,T)=f(T)\geqq 2$ (Tに依存)	P	[Ishii, Hagiwara 03]
$r(u,T)=f(u)$ (u に依存)	$\theta(\log\beta)$-近似	[Ishii, Makino 09]

β : $r(u,T)>0$ である(u,T)の数

p が対称弱優モジュラである他の問題

要素連結度 (element connectivity) 増大問題

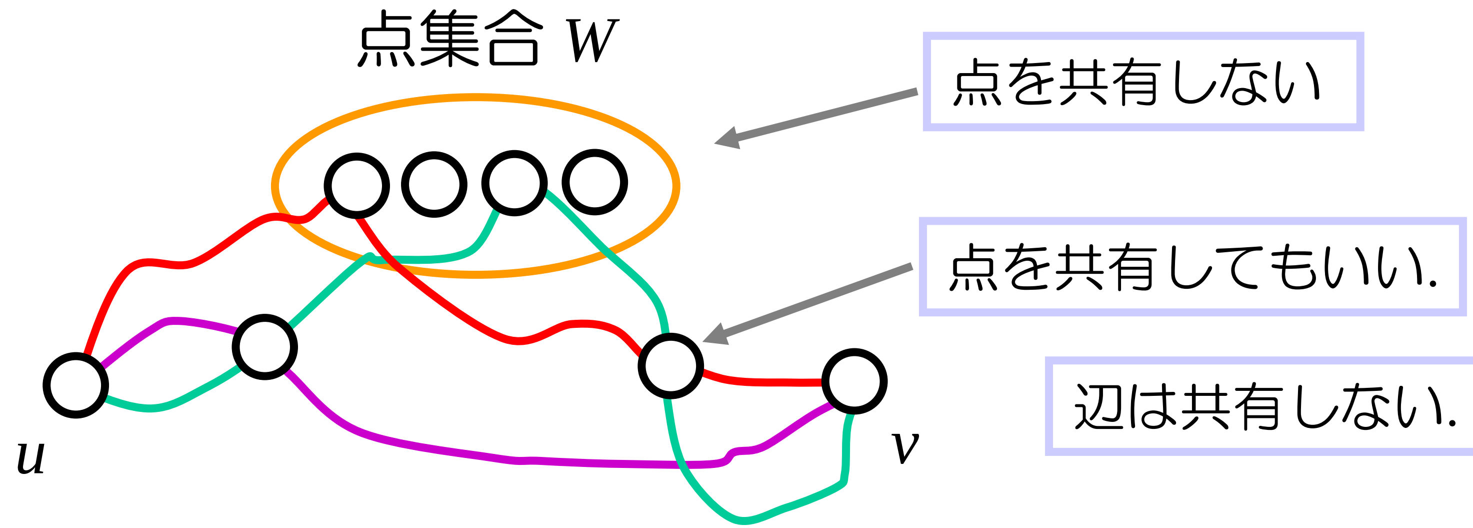
W-連結度 $\lambda_G^W(u,v)$ =「(i) $W-\{u,v\}$の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないパス」の最大数

(注) $W=\phi$ のときは, 局所辺連結度

p が対称弱優モジュラである他の問題

要素連結度 (element connectivity) 増大問題



W-連結度 $\lambda_G^W(u,v)$ = 「(i) $W-\{u,v\}$の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないパス」の最大数

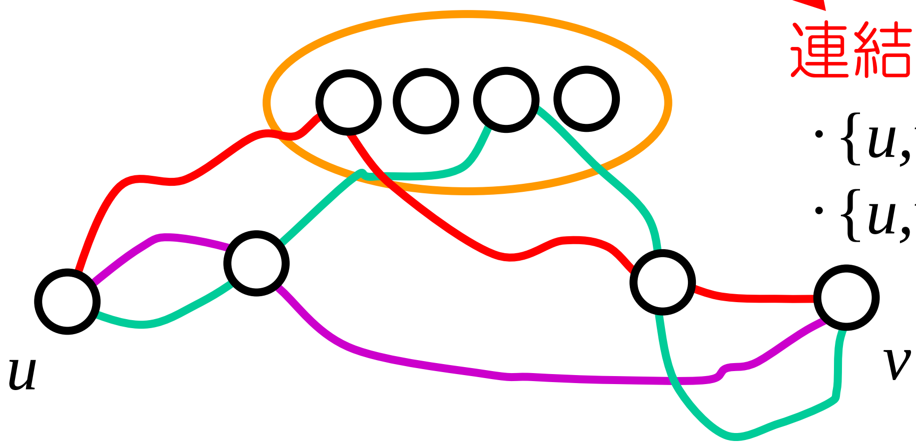
メンガーの定理より

$= \min\{|C| \mid C \subseteq E \cup W-\{u,v\}, C$ はuとvを分離する$\}$

p が対称弱優モジュラである他の問題

要素連結度 (element connectivity) 増大問題

点集合 W



連結度要求:

- $\{u,v\} \cap W \neq \phi \Rightarrow r(u,v)=0$
- $\{u,v\} \subseteq V\text{–}W \quad \Rightarrow r(u,v) \geqq 0.$

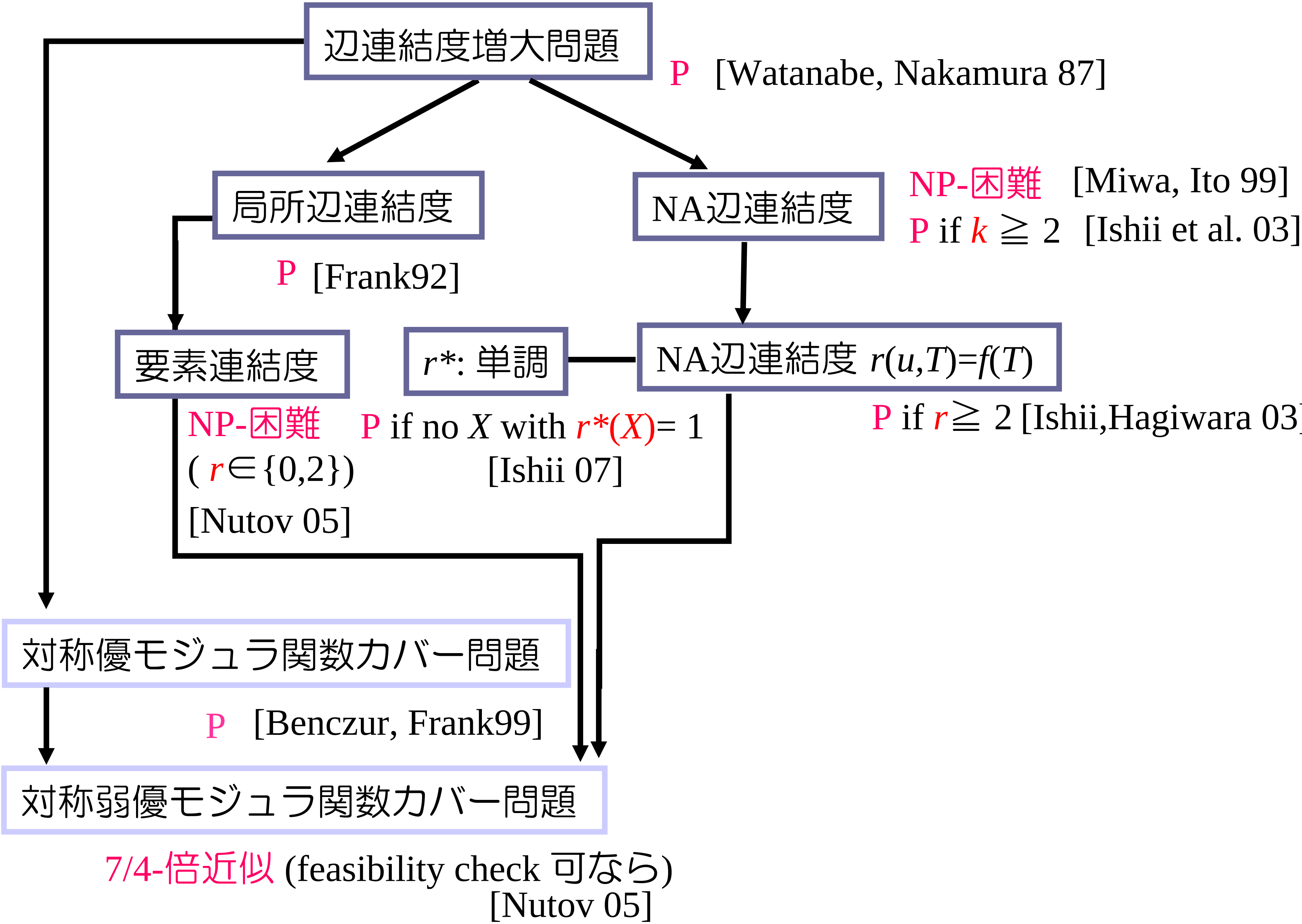
W-連結度 $\lambda_G^W(u,v)$ ＝「(i) $W-\{u,v\}$の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないパス」の最大数

メンガーの定理より

$= \min\{|C| \mid C \subseteq E \cup W-\{u,v\}, C$ はuとvを分離する$\}$

$r \in \{0,2\}$でもNP困難 [Nutov 05]


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度
NP-困難 [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
r*: 単調
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
[Nutov 05]

pが対称弱優モジュラの場合の p-カバー問題

1. $\alpha(G)$ の計算

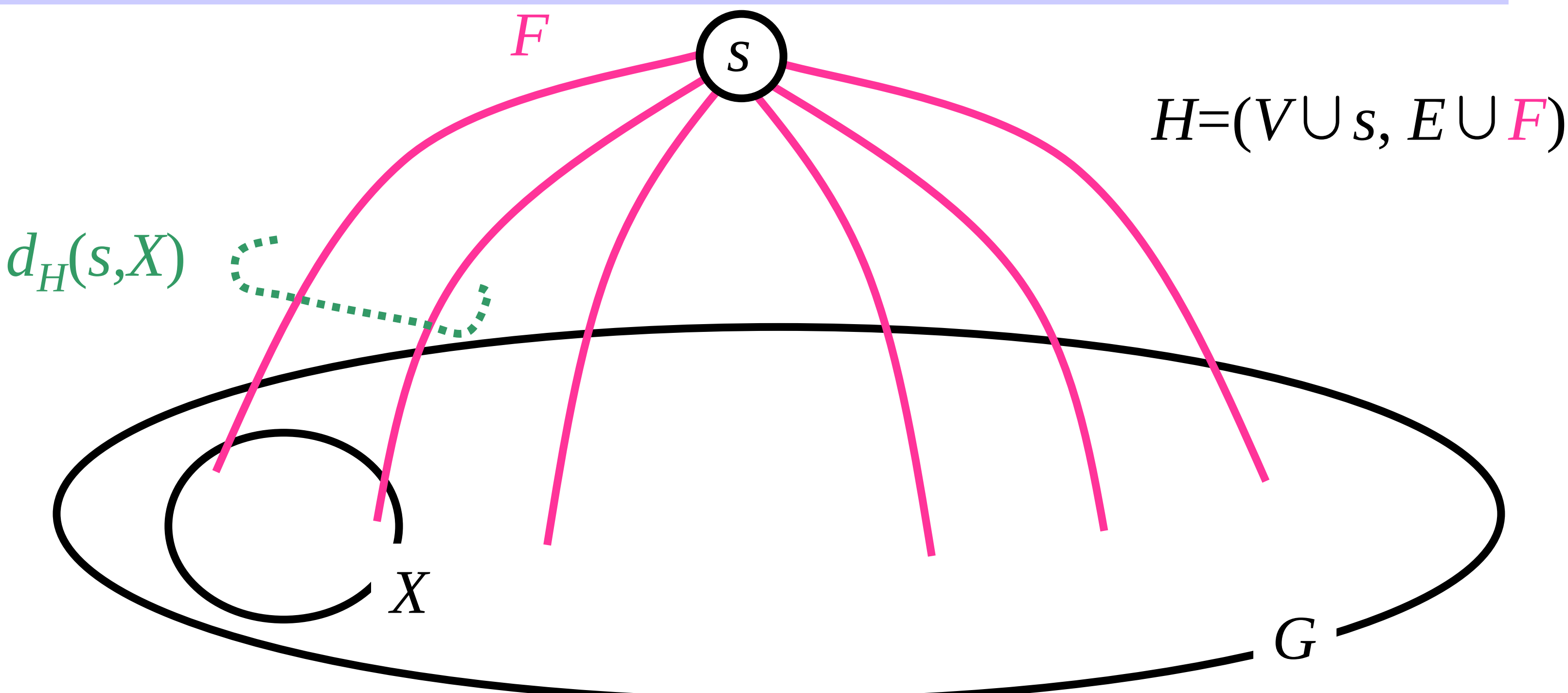
2. 辺分離 (edge-splitting) に基づくアルゴリズム

$\alpha(G)$ の計算

- G に新しい点 s を加える.
- (*) が成り立つように, G と s の間に辺を加える.

$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

[補題1] p: 対称弱優モジュラ関数.
F : (*) をみたす極小な辺集合とする. $\Rightarrow |F| = \alpha(G)$



[定理3] [Nutov 05]

仮定: H =($V \cup s$, $E \cup F$) : (*) をみたす.

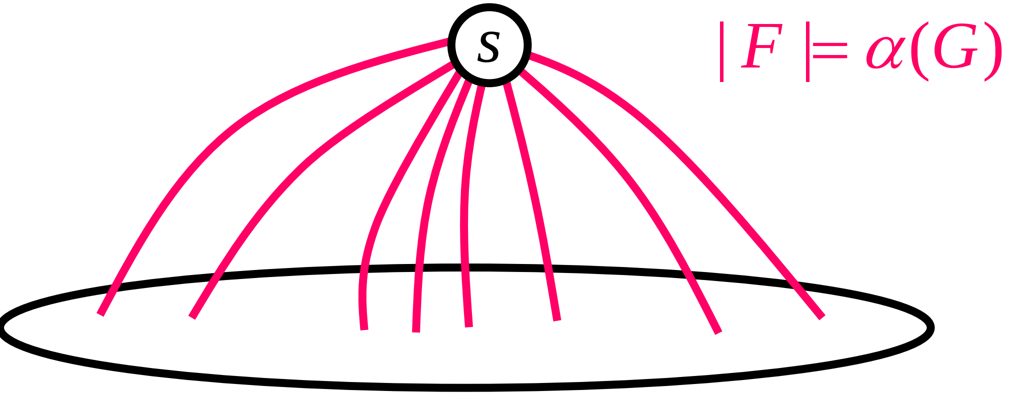
$$d_H(s, X) \geq p(X), \quad \phi \neq \forall X \subset V \qquad (*)$$

p: 対称弱優モジュラ関数.

$\Rightarrow p_{\max} \geqq 2$ の場合, (*) を保存する F の辺の辺分離ペアが存在する.

$p_{\max}$=max{$p(X)$ | $X \subset V$}.

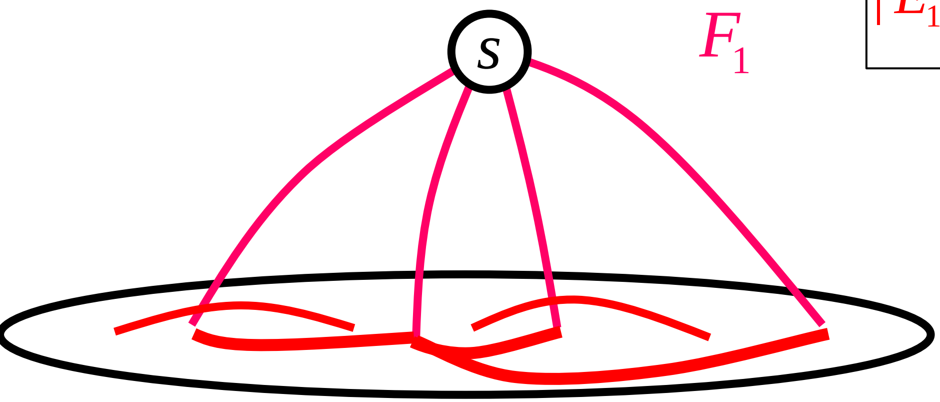
[7/4倍近似アルゴリズム] [Nutov 05]



(1) $\alpha(G)$ が奇数なら, s と V の間に1本の辺 f を加える. $F := F \cup \{f\}$ とする.

(2) 辺分離可能なペアがあるかぎり, Fの辺を辺分離する.

[7/4倍近似アルゴリズム] [Nutov 05]



$$|E_1 \cup E_2| = \frac{|F|-|F_1|}{2} + |F_1| - 1 = \frac{|F|+|F_1|}{2} + 1$$

$$|E_1| = \frac{|F|-|F_1|}{2}$$

(1) $\alpha(G)$ が奇数なら, s と V の間に1本の辺 f を加える. $F := F \cup \{f\}$ とする.

(2) 辺分離可能なペアがあるかぎり, Fの辺を辺分離する.

(3) (2)の結果, 得られたグラフにおいて,

F_1 : s に接続している辺集合,
E_1 : 辺分離により, V に加えられた辺集合.

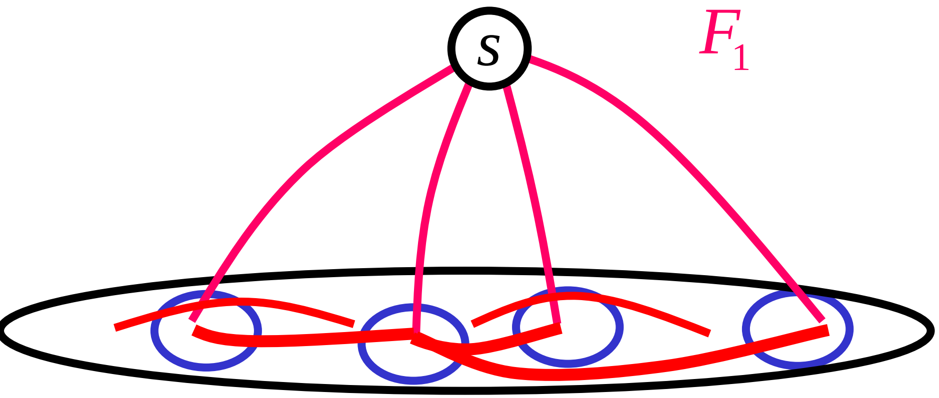
定理3 より, $p_1(X) = p(X) - d_{(V,E_1)}(X) \leq 1, \ \forall X \subset V$

F_1 の各辺の (s以外の) 端点を, 木状に結べば, 実行可能解が得られる.

E_2 $|E_2| = |F_1| - 1$

[7/4倍近似アルゴリズム] [Nutov 05]

opt(p): 入力 p に対する最適値.



タイトセット X ($p(X)=1$)

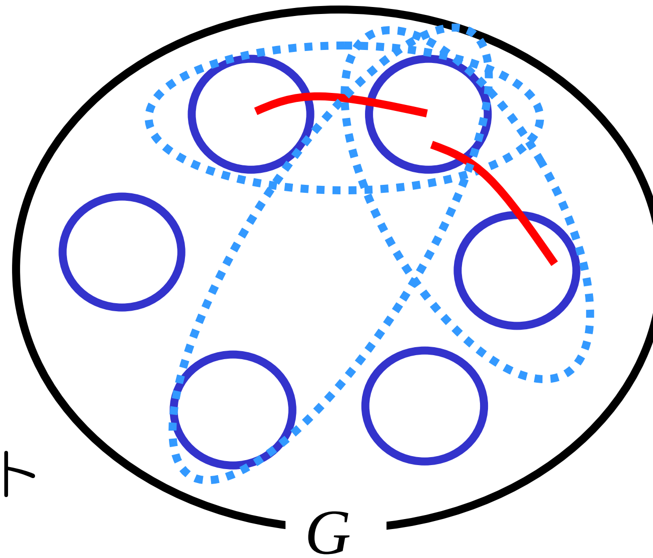
$d_H(s,Y)=p(Y)+1=2 \Rightarrow p(Y)=1$

危険カット Y ($d_H(s,Y) \leqq p(Y)+1 \leqq 2$)

$$p_1(X) = p(X) - d_{(V,E_1)}(X) \leq 1, \quad \forall X \subset V$$

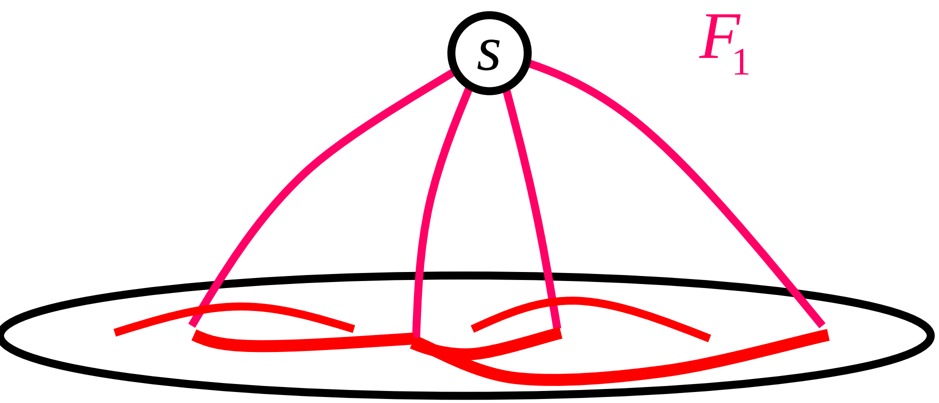
$\Rightarrow$ opt(p_1) $\geqq 2|F_1|/3$

各「連結成分」は,
3個以上のタイトセット
を結んでいる.



$2|F_1|/3$ 本以上必要.

[7/4倍近似アルゴリズム] [Nutov 05]



$$|E_1 \cup E_2| = \frac{|F| - |F_1|}{2} + |F_1| - 1 = \frac{|F| + |F_1|}{2} - 1$$

$$\leq opt(p) + \frac{3}{4} opt(p_1) - 1$$

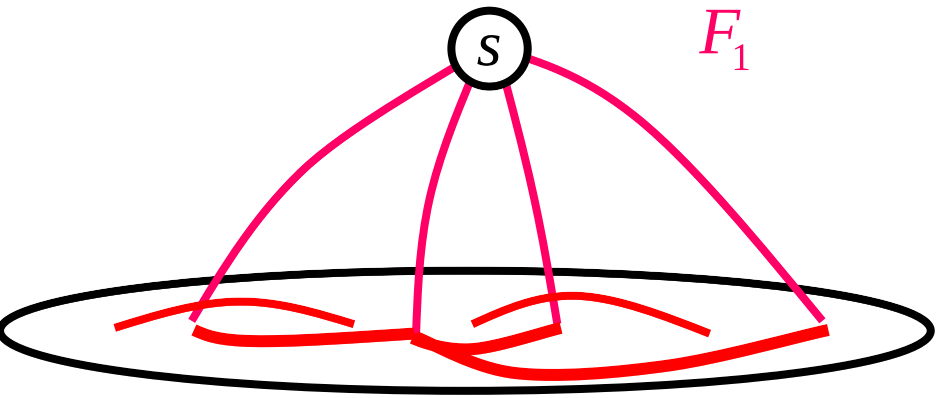
$$\leq \frac{7}{4} opt(p) - 1$$

$\mathrm{opt}(p) \geqq |F|/2$

$\mathrm{opt}(p_1) \geqq 2|F_1|/3$

$\mathrm{opt}(p_1) \leqq \mathrm{opt}(p)$

[7/4倍近似アルゴリズム] [Nutov 05]



p: 優モジュラ関数なら,
劣モジュラ関数最小化.

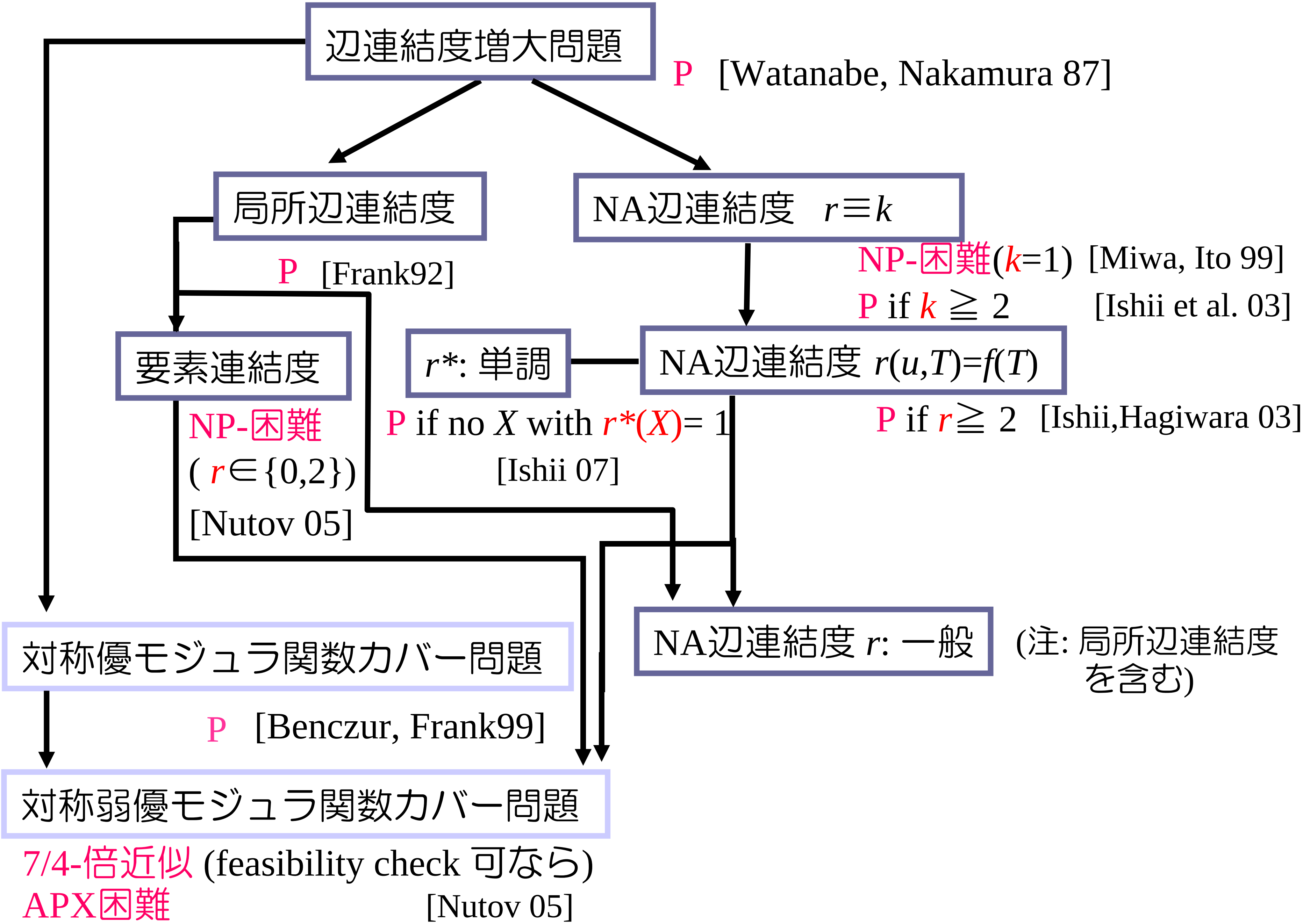
·ただし, 一般の対称弱優モジュラ関数 p に対して, 実行可能性のチェックが多項式時間で行えるかどうかは未解決.

·たとえば, つぎの計算が行えれば, 実行可能性のチェックは可能.

$$\min\{d_{H'}(s,X) - p(X) + d_{(V,E')}(X) \mid X \subset V\}$$

(注: H'は, 初期グラフH から, (辺分離により) E'を V に加えて得られるグラフ)

·局所辺連結度, NA辺連結度, 要素連結度の問題は, 最大フローなどを利用することで計算可能.



辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度 r≡k
NP-困難(k=1) [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
r*: 単調
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
NA辺連結度 r: 一般
(注: 局所辺連結度を含む)
対称弱優モジュラ関数カバー問題
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難 [Nutov 05]

AA辺連結度 (Area to Area edge-connectivity) 増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 2つの領域族 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$,

連結度要求 $r(S, T) \geqq 0$, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$.

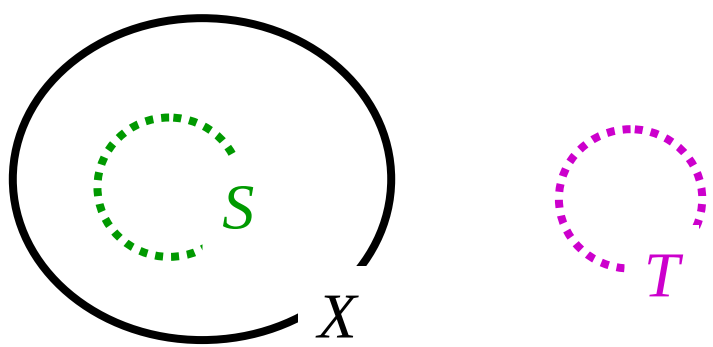
出力: 辺集合 F

s.t. $G + F$ における

S と T 間のAA辺連結度 $\lambda_{G+F}(S,T) \geqq r(S,T)$, $S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}$.

$|F|$: 最小.

$$\lambda_G(S, T) = \min \{ d_G(X) \mid S \subseteq X \subseteq V - T \}$$



AA辺連結度 (Area to Area edge-connectivity) 増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 2つの領域族 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$,

連結度要求 $r(S, T) \geqq 0, S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G + F$ における

S と T 間のAA辺連結度 $\lambda_{G+F}(S,T) \geqq r(S,T), S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}$.

$|F|$: 最小.

$\theta(\log \beta(\mathcal{S},\mathcal{T}))$-近似 [Ishii, Makino 09]

$\beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$: $r(S,T)>0$ である $S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}$ の数

NA辺連結度, $r(u,T)=f(u)$ に限定しても $\Omega(\log \beta(\mathcal{S},\mathcal{T}))$-困難

G: 有向グラフでも $\theta(\log \beta(\mathcal{S},\mathcal{T}))$-近似

(注) 有向グラフ版では, $\lambda(S,T)$ は S から T への辺連結度.

辺連結度

$n=|V|$

有向グラフ

k P [Frank92]

$r(u,v)$ (局所辺連結度要求) $\theta(\log n)$-近似

$\Omega(\log n)$-困難 ($r\in\{0,1\}$) [Frank92]

$O(\log n)$-近似 [Kortsarz,Nutov06]

$r(u,T)$ (NA辺連結度要求) $r\equiv k$ でも, $\Omega(\log\beta(\mathcal{S},\mathcal{T}))$-困難

$r(S,T)$ (AA辺連結度要求) $\theta(\log\beta(\mathcal{S},\mathcal{T}))$-近似 [Ishii, Makino 09]

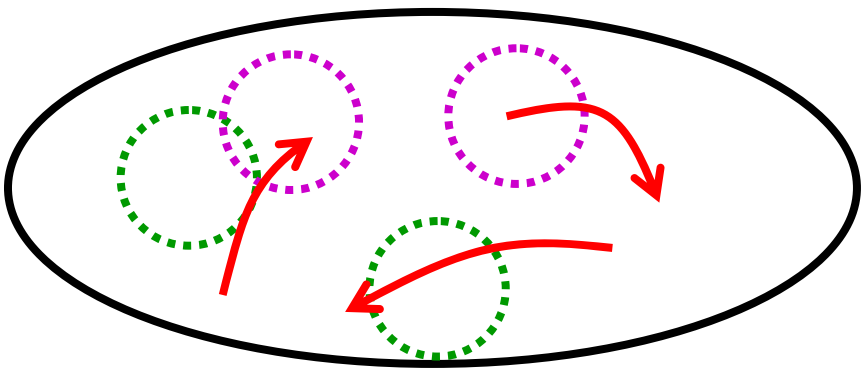
[定理4]
無向/有向グラフに対し,
AA辺連結度増大問題は, O(log β ($\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$))-近似可能.

[補題2]
有向グラフの問題が, t-倍近似可能
⇒ 無向グラフの問題が, $2t$-倍近似可能.

[証明] 演習.

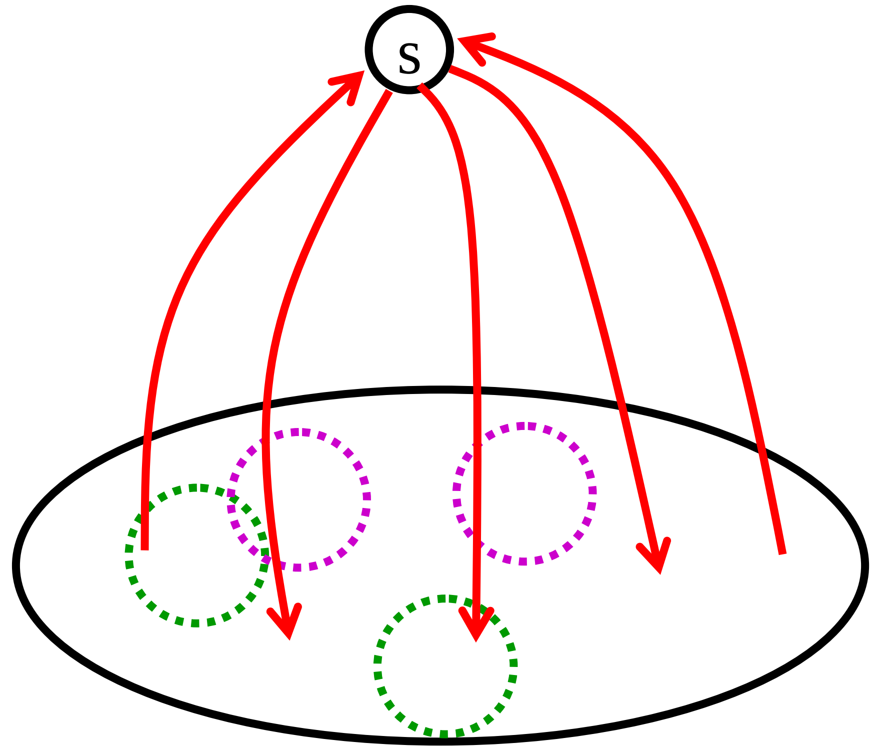
以下では, 有向版を考える.

AA辺連結度増大問題



有向グラフ G, r: $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\to\mathbb{Z}_+$

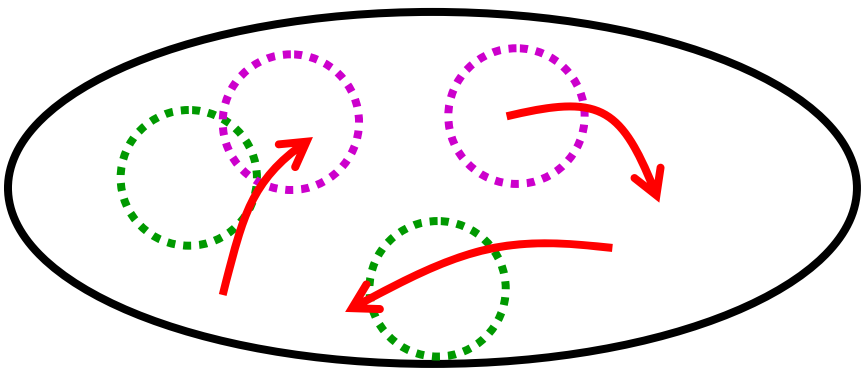
AA辺連結度増大問題
(星拡大 (star augmentation))



有向グラフ G, r: $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\to\mathbb{Z}_+$

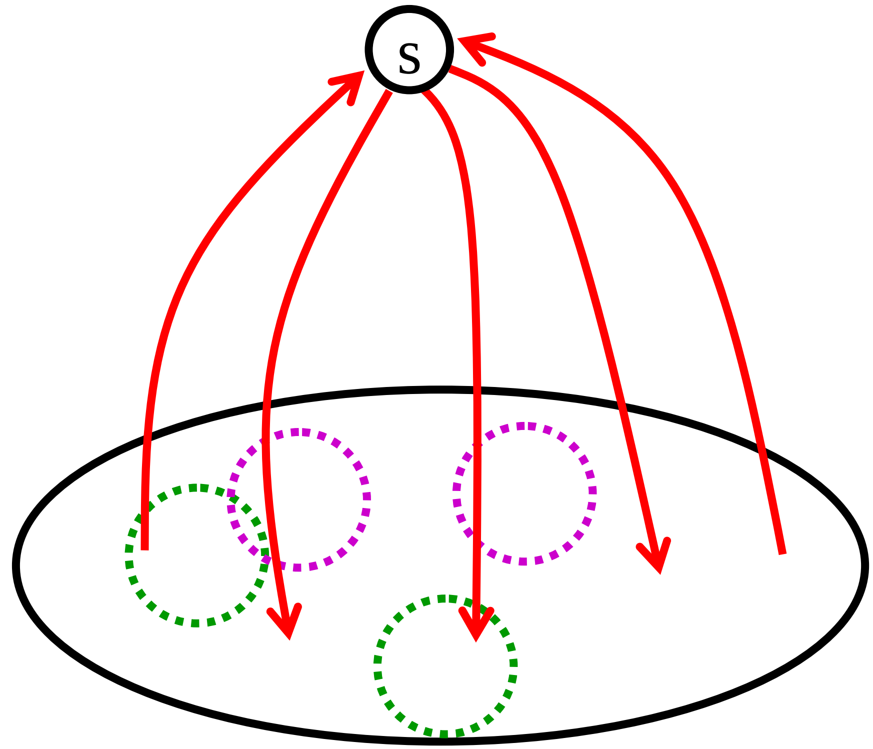
s と G の間に辺を加えて,
連結度要求をみたす問題

AA辺連結度増大問題



有向グラフ G, r: $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\rightarrow \mathrm{Z}_+$

AA辺連結度増大問題
(星拡大 (star augmentation))



有向グラフ G, r: $\mathcal{S}\times\mathcal{T}\rightarrow \mathrm{Z}_+$

[補題3]

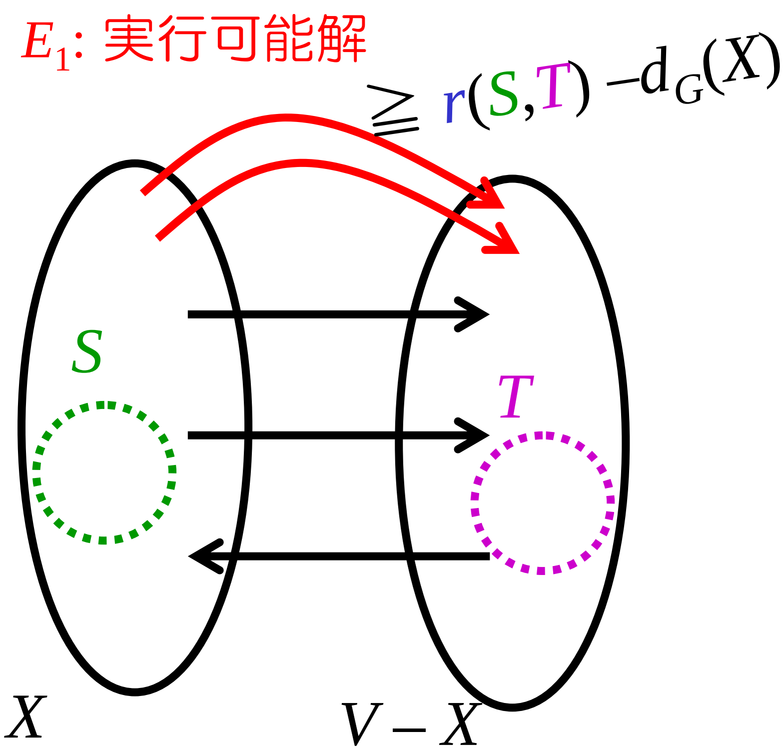
(1) 元の問題が, t-倍近似可能 ⇒ 星拡大版が, $2t$-倍近似可能.

(2) 星拡大版が, t-倍近似可能 ⇒ 元の問題が, $2t$-倍近似可能.

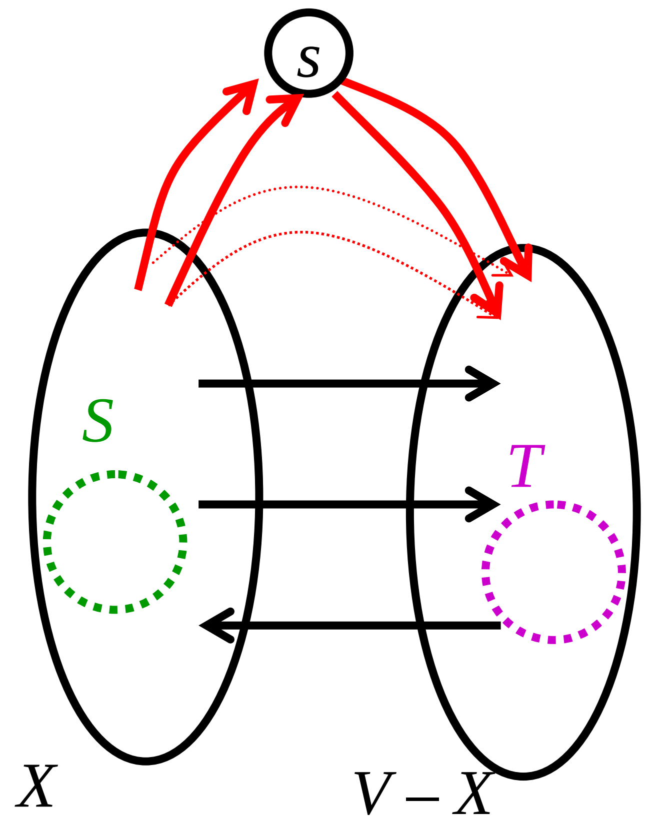
(1) [AA連結度] t-倍近似可能 $\Rightarrow$ [星拡大版] $2t$-倍近似可能.

(2) [星拡大版] t-倍近似可能 $\Rightarrow$ [AA連結度] $2t$-倍近似可能.

AA連結度



AA連結度 (星拡大)



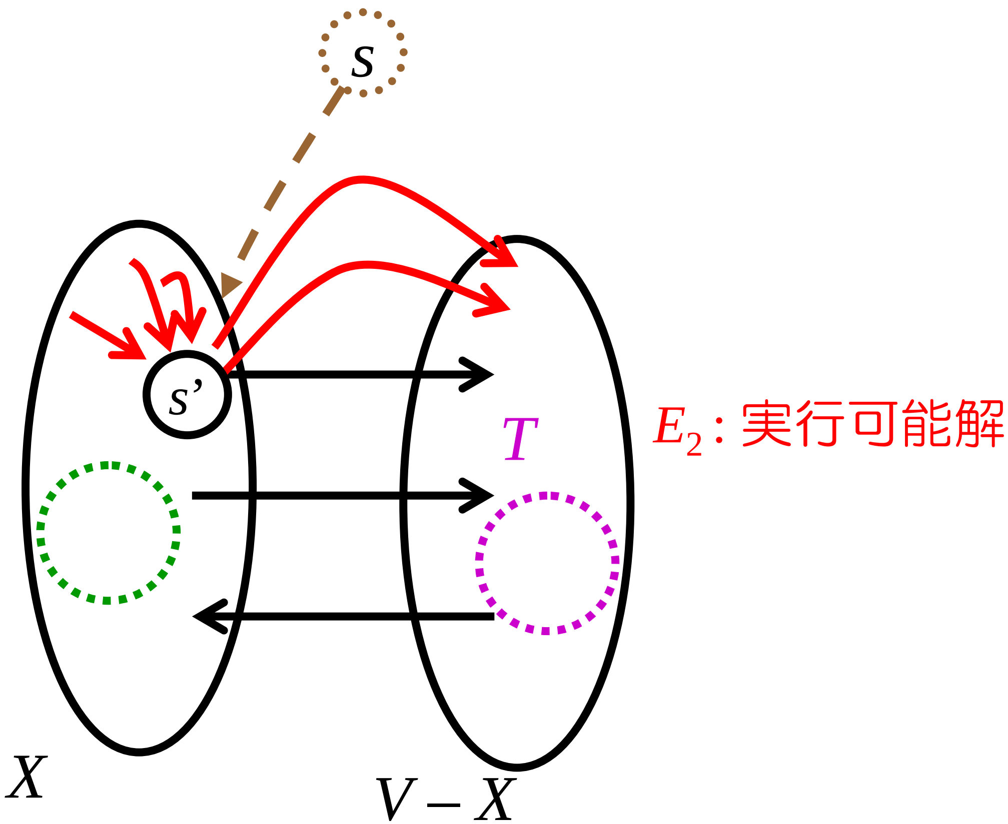
F_1: E_1から辺分離の逆操作により得られる辺集合 (実行可能解)

(a) $|F_1|=2|E_1|$　　(b) [AA連結度]の最適値×2 ≧[星拡大版]の最適値

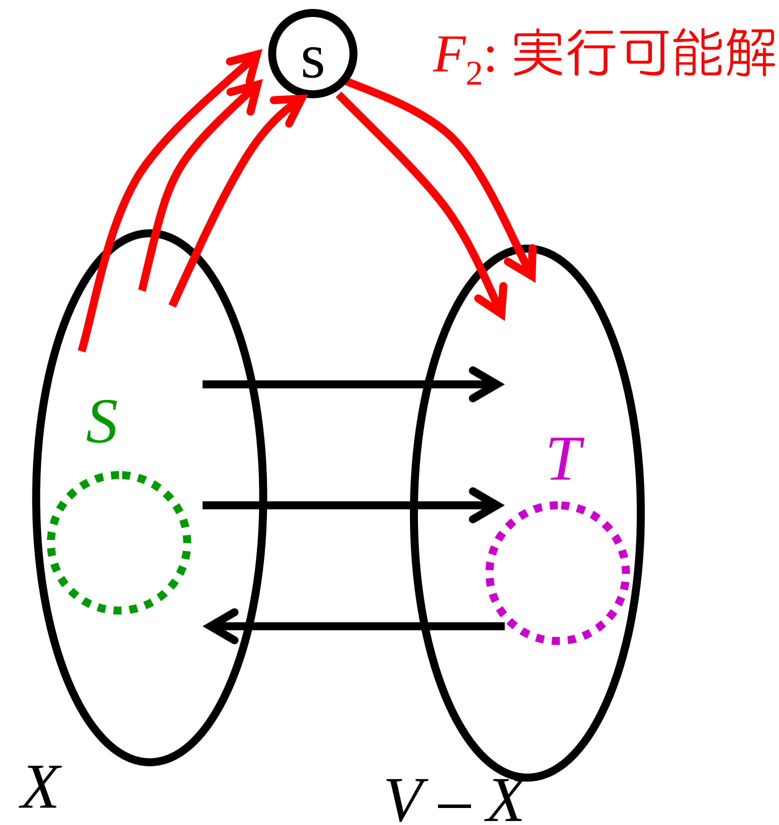
(1) [AA連結度] t-倍近似可能 $\Rightarrow$ [星拡大版] $2t$-倍近似可能.

(2) [星拡大版] t-倍近似可能 $\Rightarrow$ [AA連結度] $2t$-倍近似可能.

AA連結度



AA連結度 (星拡大)



E_2: F_2から, 端点 s を V内のある点 s' に縮約することにより得られる辺集合

(c) $|E_2| \leqq |F_2|$　　(d) [星拡大版]の最適値 $\geqq$[AA連結度]の最適値

(1) [AA連結度] t-倍近似可能 ⇒ [星拡大版] $2t$-倍近似可能.
(2) [星拡大版] t-倍近似可能 ⇒ [AA連結度] $2t$-倍近似可能.

(a) $|F_1|=2|E_1|$　　(b) [AA連結度]の最適値×2 ≧[星拡大版]の最適値

(c) $|E_2|\leqq|F_2|$　　(d) [星拡大版]の最適値 ≧[AA連結度]の最適値

(1) [AA連結度] t-倍近似解 E_1

⇒ [星拡大版] 実行可能解 F_1 　($|F_1|=2|E_1|$)　　← (a)

$|F_1|=2|E_1|$ ≦ $2t$×([AA連結度]の最適値)
≦ $2t$×([星拡大版]の最適値)　　← (d)

(2) [星拡大版] t-倍近似解 F_2

⇒ [AA連結度] 実行可能解 E_2 　($|E_2|\leqq|F_2|$)　　← (c)

$|E_2|\leqq|F_2|$ ≦ t×([星拡大版]の最適値)
≦ $2t$×([AA連結度]の最適値)　　← (b)

$\beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$: $r(S,T)>0$ である $S\in\mathcal{S}, T\in\mathcal{T}$ の数

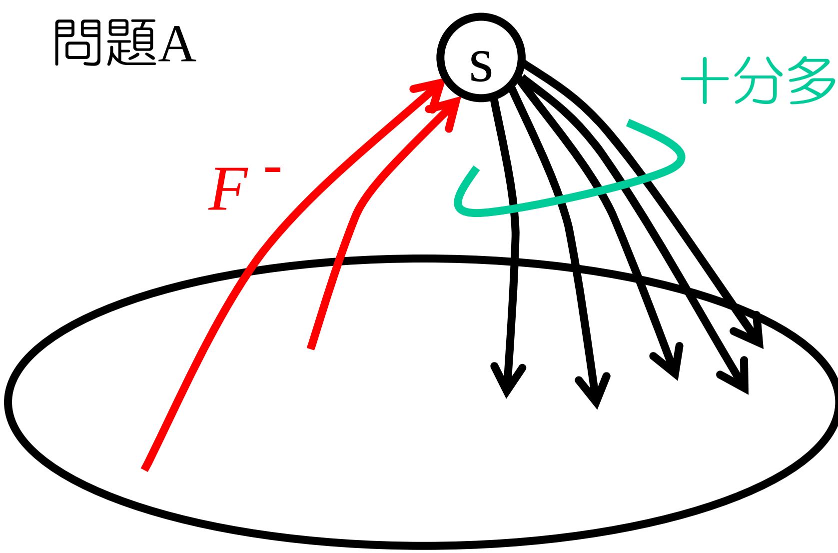
[定理5]

有向グラフに対し,
AA辺連結度増大問題の星拡大版は, O(log $\beta(\mathcal{S}, \mathcal{T})$)-近似可能.

星拡大問題という.

・s を head とする辺と, s を tail とする辺を分けて加える.

問題A



十分多い辺　(s からVの各点へ r_{max} 重の辺)

r_{max}: 最大要求値

連結度要求をみたす辺集合

$\beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$: $r(S,T)>0$ である $S\in\mathcal{S}, T\in\mathcal{T}$ の数

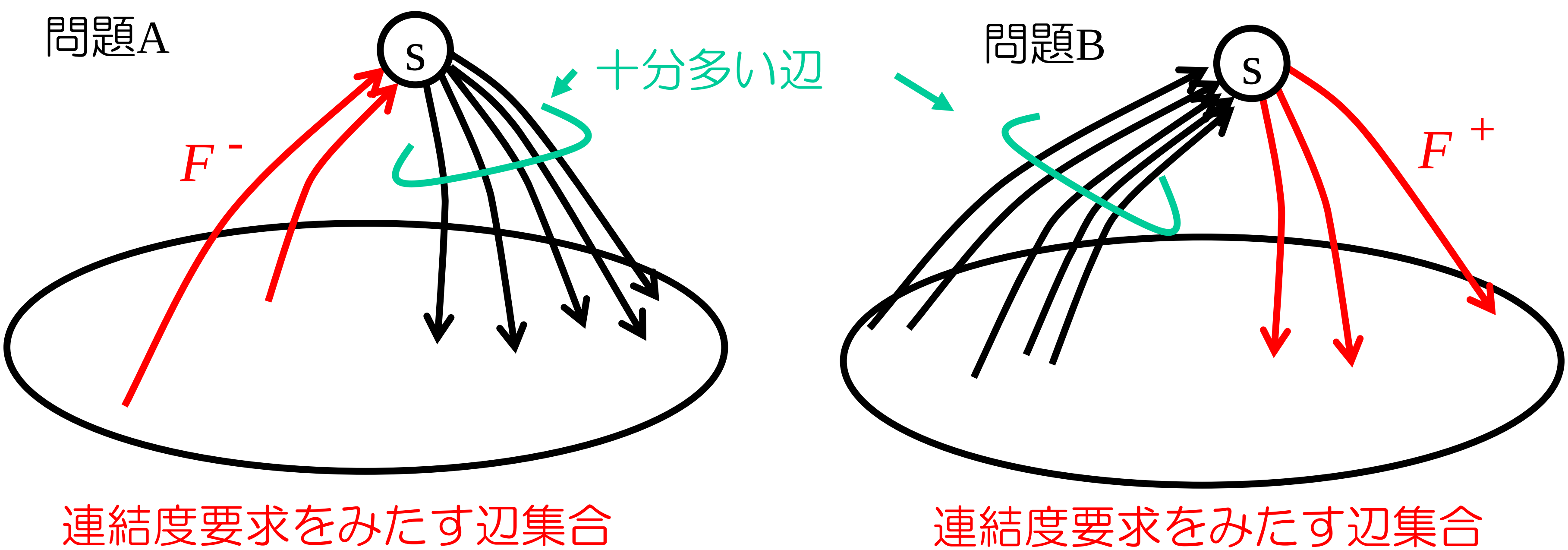
[定理5]

有向グラフに対し,

AA辺連結度増大問題の星拡大版は, O(log $\beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$)-近似可能.

星拡大問題という.

・s を head とする辺と, s を tail とする辺を分けて加える.



[補題4]

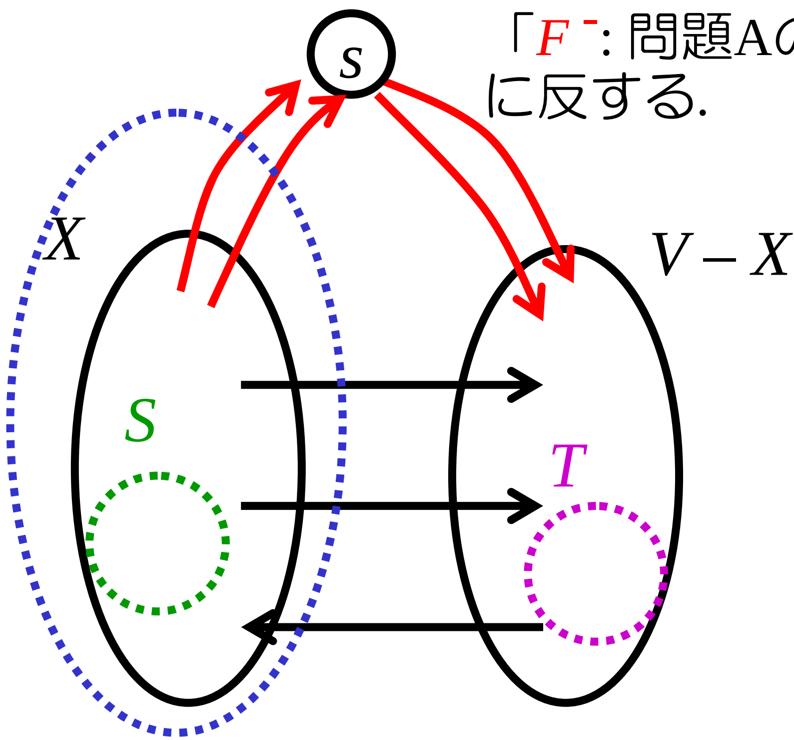
F^- : 問題Aの t-倍近似解
F^+ : 問題Bの t-倍近似解
⇒ $F^- \cup F^+$: 星拡大問題の t-倍近似解.

(i) $F^- \cup F^+$: 星拡大問題の実行可能解であることを示す.

そうでないとすると…

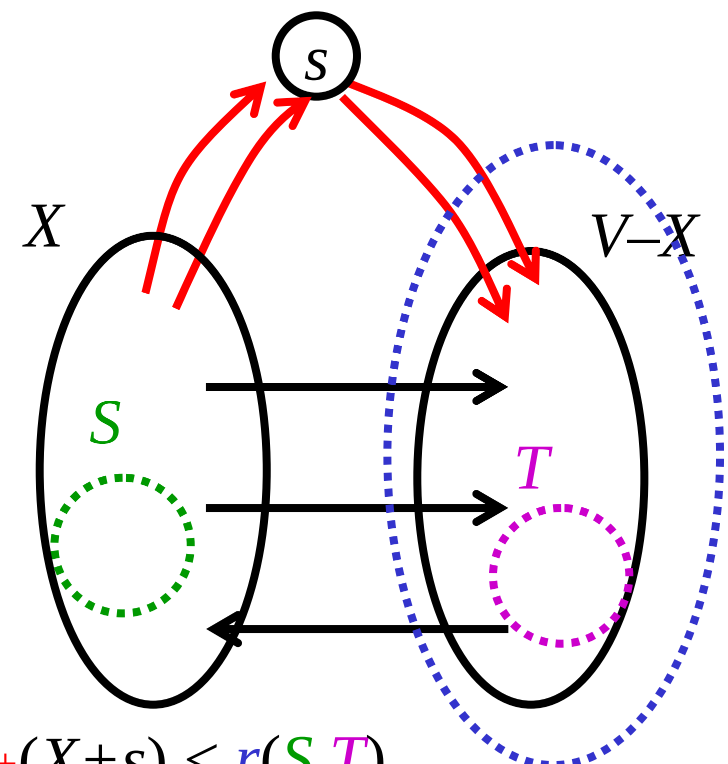
「F^+: 問題Aの実行可能解」に反する.

「F^-: 問題Aの実行可能解」に反する.



$d_{G+s+F^-+F^+}(X) < r(S,T)$

or



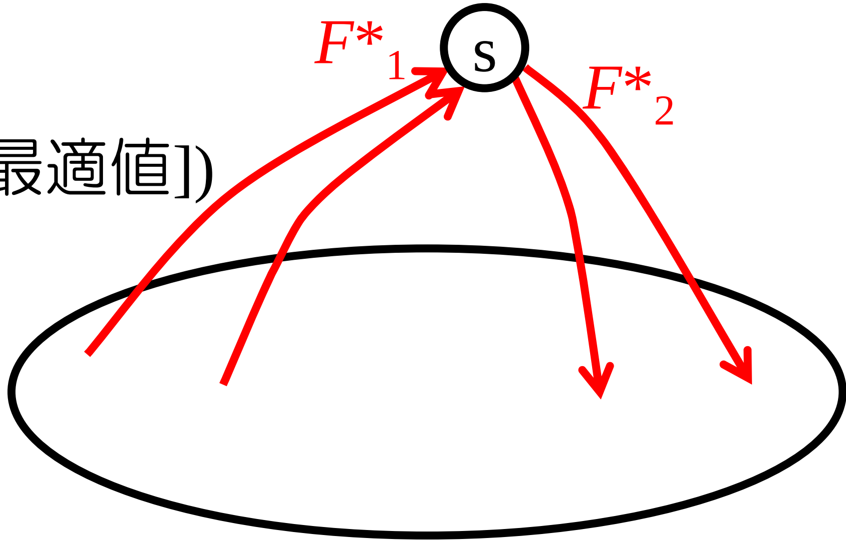
$d_{G+s+F^-+F^+}(X+s) < r(S,T)$

[補題4]

F^- : 問題Aの t-倍近似解
F^+ : 問題Bの t-倍近似解
$\Rightarrow F^- \cup F^+$: 星拡大問題の t-倍近似解.

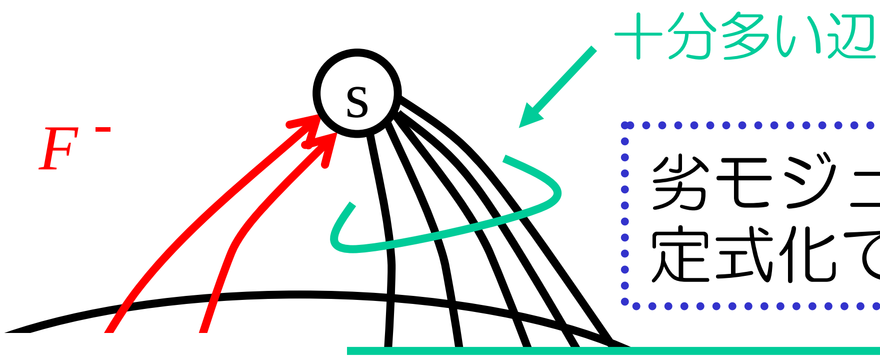
(ii) F^*: 星拡大問題の最適解.
F^*_1: F^* の辺で, s を head とする辺の集合.
F^*_2: F^* の辺で, s を tail とする辺の集合

F^*_1: 問題Aの実行可能解 $\Rightarrow$ $|F^*_1| \geqq$ [問題Aの最適値]
F^*_2: 問題Bの実行可能解 $\Rightarrow$ $|F^*_2| \geqq$ [問題Bの最適値]



$|F^-| + |F^+|$
$\leqq t_1$ ([問題Aの最適値]+[問題Bの最適値])
$\leqq t_1 (|F^*_1|+ |F^*_2|) = t_1|F^*|$

[補題5] 問題Aは, O(log β(S, T))-近似可能.



劣モジュラカバー問題として定式化できる.

定理6 [Wolsey82]

$f(\phi)=0$ なら，劣モジュラカバー問題は $(1+\ln(\max_{j\in U} f(\{j\}))$-近似可能.

劣モジュラカバー問題 (Submodular cover problem)

入力: 有限集合 U,

単調非減少劣モジュラ関数 $f: 2^U \rightarrow Z_+$

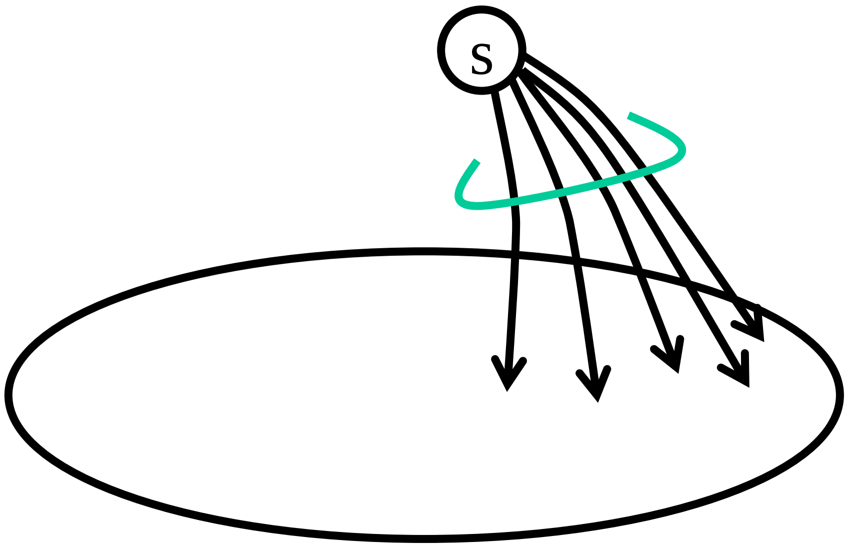
(i.e., $f(X) \leqq f(Y)$ if $X \subseteq Y$)

コスト関数 $c: U \rightarrow R_+$

出力: 集合 $F^- \subseteq U$

s.t. $f(F^-) = f(U)$ & $\sum_{i\in F^-} c(i)$: 最小

問題A



H : 入力グラフ

F_r^- : V の各点から s へ r_{max} 重の辺の集合.

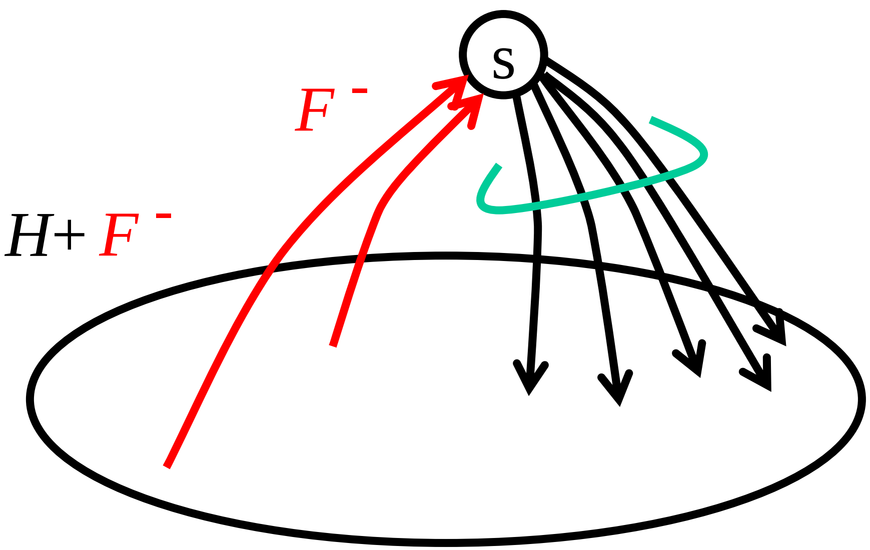
F_r^- は実行可能解. U に対応.

劣モジュラカバー問題 (Submodular cover problem)

入力: 有限集合 U,
　　単調非減少劣モジュラ関数 f: $2^U \rightarrow Z_+$, コスト関数 c: $U \rightarrow R_+$

出力: 集合 $F^- \subseteq U$
　　s.t. $f(F^-) = f(U)$ & $\sum_{i \in F^-} c(i)$: 最小

問題A



H : 入力グラフ

F_r^- : V の各点から s へ r_{max} 重の辺の集合.

$U = F_r^-$

各 $e \in F_r^-$ に対して, $c(e) = 1$

$$f(F^-) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{S},\, T \in \mathcal{T}: \\ \lambda_H(S,T) < r(S,T)}} \left(\min\{ \lambda_{H+F^-}(S,T),\, r(S,T) \} - \lambda_H(S,T) \right) \qquad F^- \subseteq F_r^-$$

$f(\phi) = 0$
$f(F^-) = f(U)$ if F^-: 実行可能
f : 単調関数

劣モジュラカバー問題

入力: 有限集合 U,
単調非減少劣モジュラ関数 f: $2^U \to Z_+$, コスト関数 c: $U \to R_+$

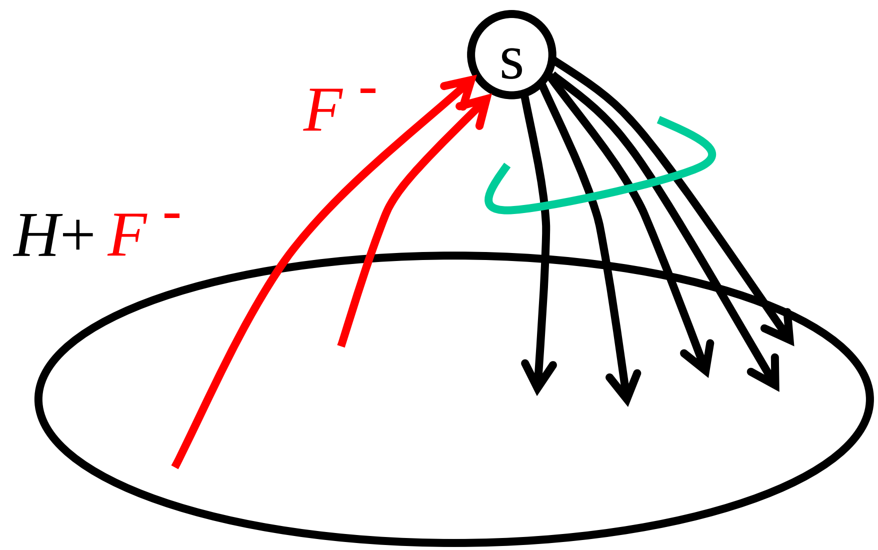
出力: 集合 $F^- \subseteq U$

s.t. $f(F^-) = f(U)$ & $\sum_{i \in F^-} c(i)$: 最小

問題A

H : 入力グラフ

F_r^- : V の各点から s へ r_{max} 重の辺の集合.



$U=F_r^-$

各 $e \in F_r^-$ に対して, $c(e)=1$

$$f(F^-)=\sum_{\substack{S\in\mathcal{S},\, T\in\mathcal{T}:\\ \lambda_H(S,T)<r(S,T)}} \left(\min\{\lambda_{H+F^-}(S,T),\, r(S,T)\}-\lambda_H(S,T)\right) \qquad F^-\subseteq F_r^-$$

$f(\phi)=0$

$f(F^-)=f(U)$ if F^-: 実行可能

f : 単調関数

f が劣モジュラであることを示す.

$g_{S,T}(F^-)=\min\{\lambda_{H+F^-}(S,T),\, r(S,T)\}-\lambda_H(S,T)$

が劣モジュラであることを示す.

[補題6]

$g_{S,T}(F)=\min\{\lambda_{H+F}(S,T), r(S,T)\}-\lambda_H(S,T),\ F\subseteq F_r^-$ は劣モジュラ.

$g(F_1)+g(F_2)\geq g(F_1\cap F_2)+g(F_1\cup F_2),\ \forall F_1,F_2\subseteq F_r^-$ を示す (S,T は省略).

$$\Leftrightarrow g(F\cup\{f_1\})-g(F)\geq g(F\cup\{f_1,f_2\})-g(F\cup\{f_2\}),$$

$$\forall f_1,f_2\in F_r^-, F\subseteq F_r^- -\{f_1,f_2\}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(g(F\cup\{f_1\})-g(F))}_{f_1\text{を加えたときの}g(F)\text{の変化量}}+\underbrace{(g(F\cup\{f_2\})-g(F))}_{f_1\text{を加えたときの}g(F)\text{ の変化量}}\geq \underbrace{g(F\cup\{f_1,f_2\})-g(F)}_{\{f_1,f_2\}\text{を加えたときの}g(F)\text{ の変化量}},$$

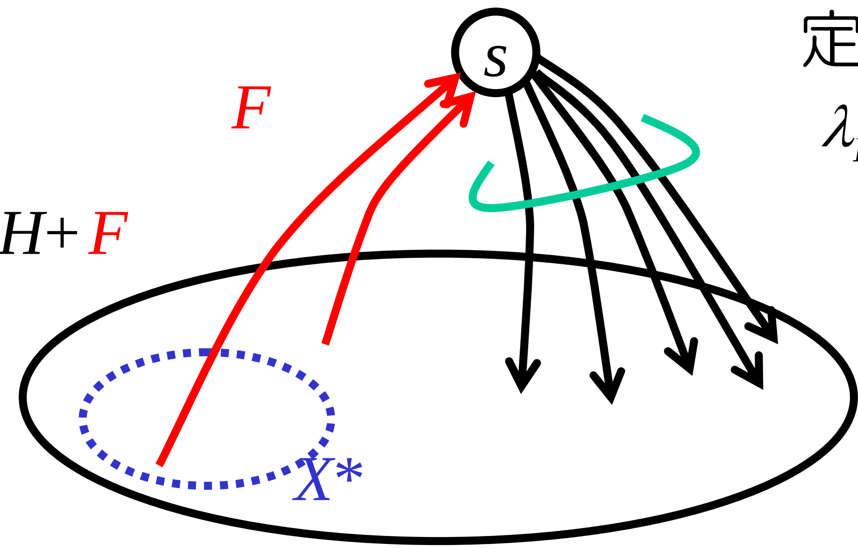
$$\forall f_1,f_2\in F_r^-, F\subseteq F_r^- -\{f_1,f_2\}$$

$g(F\cup\{f_1,f_2\})-g(F)>0$ の場合を考える(0のときは明らか).

[補題6]

$g_{S,T}(F)$=min{ $\lambda_{H+F}(S, T)$, $r(S, T)$}- $\lambda_H(S, T)$, $F \subseteq F_r^-$ は劣モジュラ.

$k = g(F \cup \{f_1, f_2\}) - g(F) > 0$ の場合を考える.



定義より,

$\lambda_{H+F}(S,T) = \min\{d_{H+F}(X) \mid S \subseteq X \subseteq V-T\}$.

(X は s を含まないことに注意)

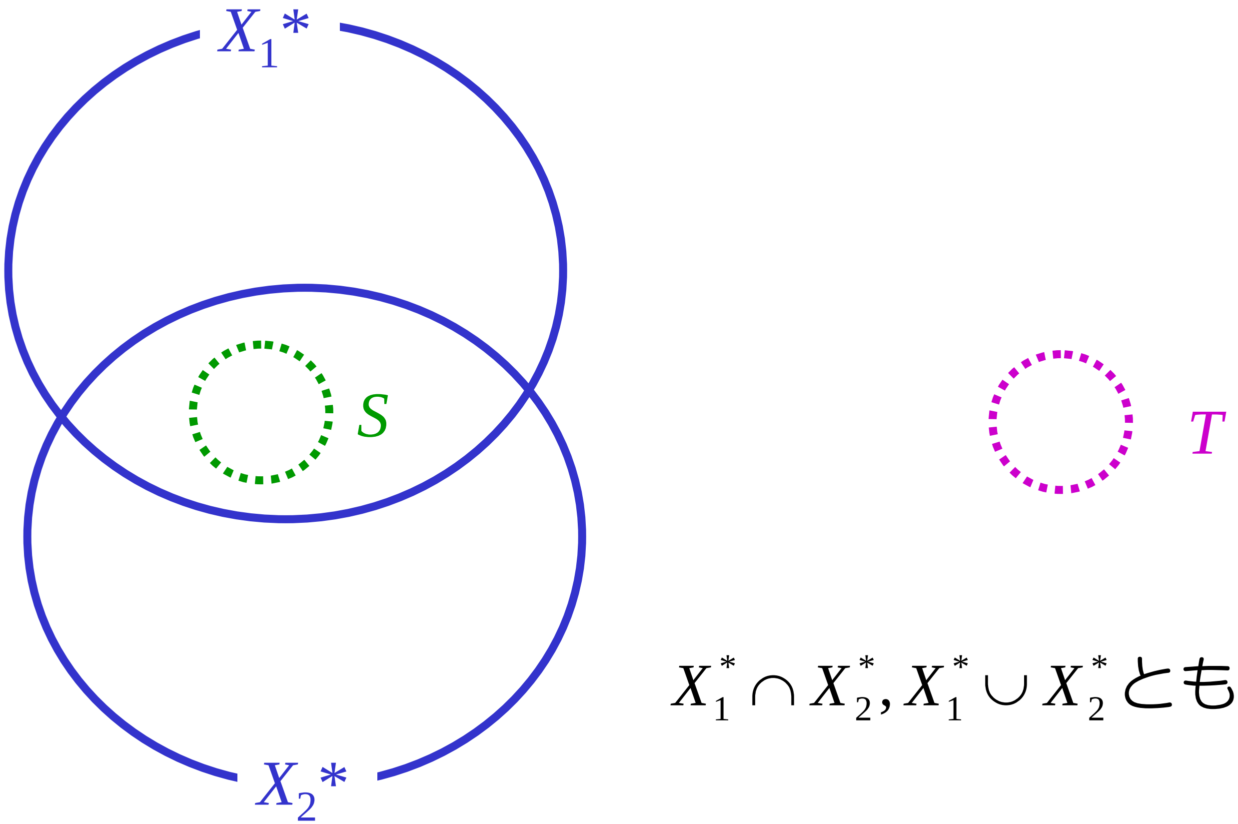
X^*を, $S \subseteq X^* \subseteq V-T$ かつ

$d_{H+F}(X^*) = \min\{d_{H+F}(X) \mid S \subseteq X \subseteq V-T\}$

をみたす極小なカットとする.

このとき, X^* は unique.

unique でないとすると…



$X_1^* \cap X_2^*, X_1^* \cup X_2^*$ ともに S と T を分離する.

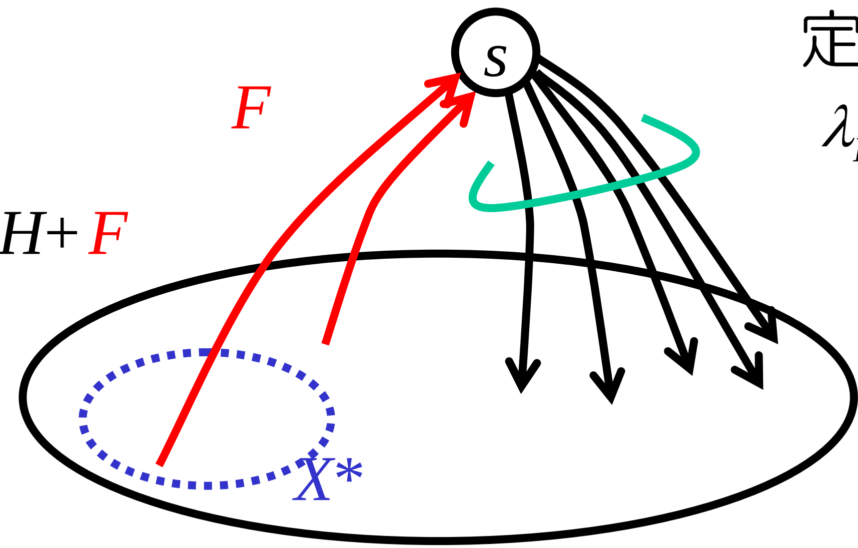
$$d_{H+F}(X_1^*) + d_{H+F}(X_2^*) \geq d_{H+F}(X_1^* \cap X_2^*) + d_{H+F}(X_1^* \cup X_2^*) \geq 2\lambda_{H+F}(S,T)$$

$\Rightarrow d_{H+F}(X_1^* \cap X_2^*) = \lambda_{H+F}(S,T)$ (X_1^*, X_2^* の極小性に反する).

[補題6]

$g_{S,T}(F)=\min\{\lambda_{H+F}(S,T), r(S,T)\}-\lambda_H(S,T)$, $F \subseteq F_r^-$ は劣モジュラ.

$k = g(F \cup \{f_1, f_2\}) - g(F) > 0$ の場合を考える.



定義より,

$\lambda_{H+F}(S,T) = \min\{d_{H+F}(X) \mid \underline{S \subseteq X \subseteq V-T}\}$.

(X は s を含まないことに注意)

X^*を, $S \subseteq X^* \subseteq V-T$ かつ

$d_{H+F}(X^*) = \min\{d_{H+F}(X) \mid S \subseteq X \subseteq V-T\}$

をみたす<u>極小な</u>カットとする.

このとき, X^* は unique.

よって, 「X^* から s へ k'本辺を加える」

⇔「$\lambda_{H+F}(S,T)$ が k'増加する」

$\{f_1, f_2\}$のうち k本が, X^*内に tail を持つ.

[補題6]

$g_{S,T}(F)=\min\{\lambda_{H+F}(S, T), r(S, T)\}-\lambda_H(S, T)$, $F \subseteq F_r^-$ は劣モジュラ.

$$\underbrace{(g(F\cup\{f_1\})-g(F))}_{}+\underbrace{(g(F\cup\{f_2\})-g(F))}_{}\geq \underbrace{g(F\cup\{f_1, f_2\})-g(F)}_{},$$

f_1 を加えたときの$g(F)$の変化量

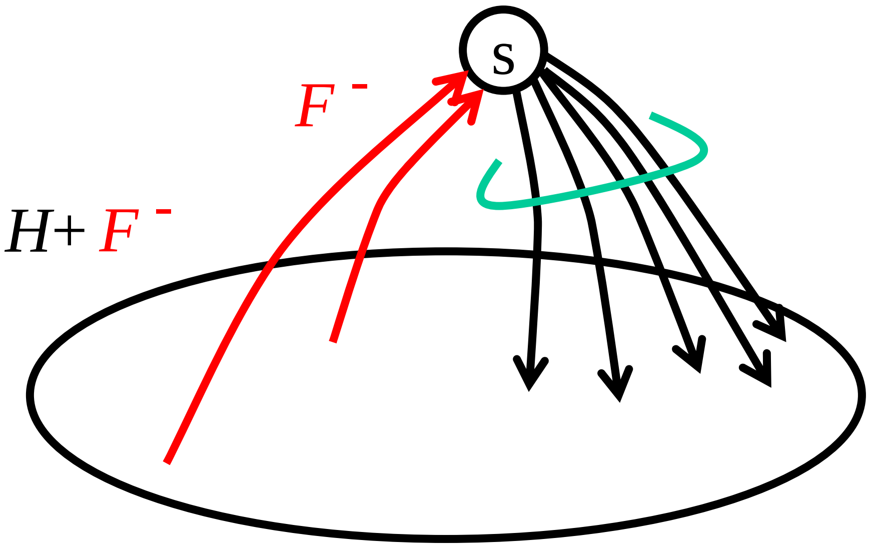
$\forall f_1, f_2 \in F_r^-, F \subseteq F_r^- - \{f_1, f_2\}$

f_1 を加えたときの$g(F)$ の変化量

$\{f_1, f_2\}$を加えたときの$g(F)$ の変化量

□

問題A



H: 入力グラフ

F_r^-: V の各点から s へ $r_{\max}$ 重の辺の集合.

$U = F_r^-$

各 $e \in F_r^-$ に対して, $c(e)=1$

$$f(F^-)=\sum_{\substack{S\in\mathcal{S},\, T\in\mathcal{T}:\\ \lambda_H(S,T)<r(S,T)}} (\min\{\lambda_{H+F^-}(S,T),\, r(S,T)\}-\lambda_H(S,T))$$

$F^- \subseteq F_r^-$

$f(\phi)=0$

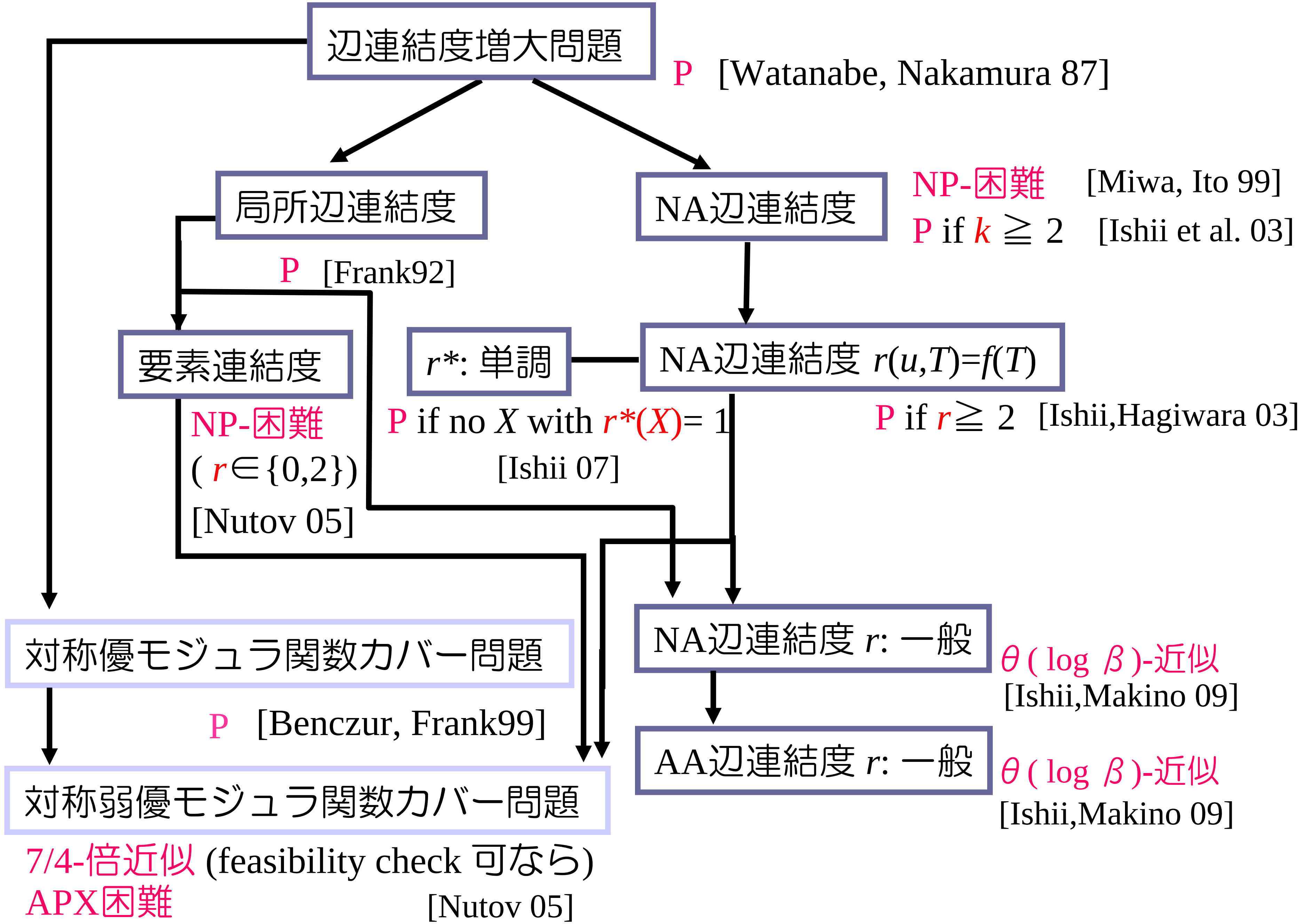
$f(F^-)=f(U)$ if F^-: 実行可能

f: 単調関数

f は劣モジュラ.

$$\max\{ f(e) \mid e \in F_r^- \} \leqq \beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$$

$\beta(\mathcal{S},\mathcal{T})$: $r(S,T)>0$ である $S\in\mathcal{S}, T\in\mathcal{T}$ の数


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度
NP-困難 [Miwa, Ito 99]
P if $k \geqq 2$ [Ishii et al. 03]
要素連結度
NP-困難
($r \in \{0,2\}$)
[Nutov 05]
r*: 単調
P if no X with $r^*(X)$= 1
[Ishii 07]
NA辺連結度 $r(u,T)=f(T)$
P if $r \geqq 2$ [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難
[Nutov 05]
NA辺連結度 r: 一般
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
AA辺連結度 r: 一般
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]

r^*-増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r^*: 2^V \to Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{G+F}(X) \geqq r^*(X)$, $\phi \neq \forall X \subset V$.

$|F|$: 最小.

---

r^*: 単調非増加関数の場合

($\phi \neq X \subseteq Y \subset V \Rightarrow r^*(X) \geq r^*(Y)$ をみたす場合)

同等

NA辺連結度増大問題 ---

$$r^*(X) = \max\{ f(T) \mid T \cap X = \phi, T \in \mathcal{T} \}$$

($r(u,T) = f(T)$ の場合)

r^*-増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 要求関数 $r^*: 2^V \to Z_+$.

出力: 辺集合 F

s.t. $d_{G+F}(X) \geqq r^*(X),\ \phi \neq \forall X \subset V.$

$|F|$: 最小.

$r^*: k$ - 模調関数(k - modulotone function)の場合

同等

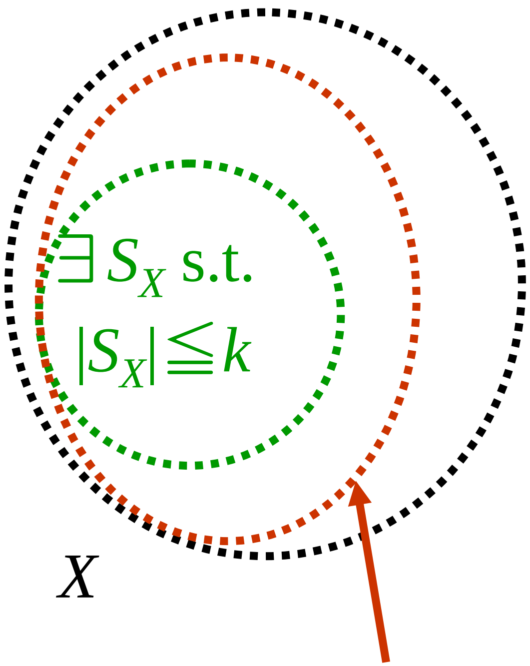
AA辺連結度増大問題 --- $r^*(X) = \max\{r(S,T) \mid S \subseteq X \subseteq V - T, S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}\}$

$k = \max\{|S| \mid S \in \mathcal{S}\}$

次の性質をみたす集合関数 $r^* : 2^V \rightarrow Z_+$ を, **k-模調関数**という.

各 $\phi \neq X \subseteq V$ に対し, 次の(*) と $|S_X| \leqq k$ をみたす
X の部分集合 $S_X \subseteq X$ が存在する.

$$r^*(Y) \geqq r^*(X), \quad \forall\ Y \subseteq X \text{ s.t. } Y \supseteq S_X. \qquad (*)$$

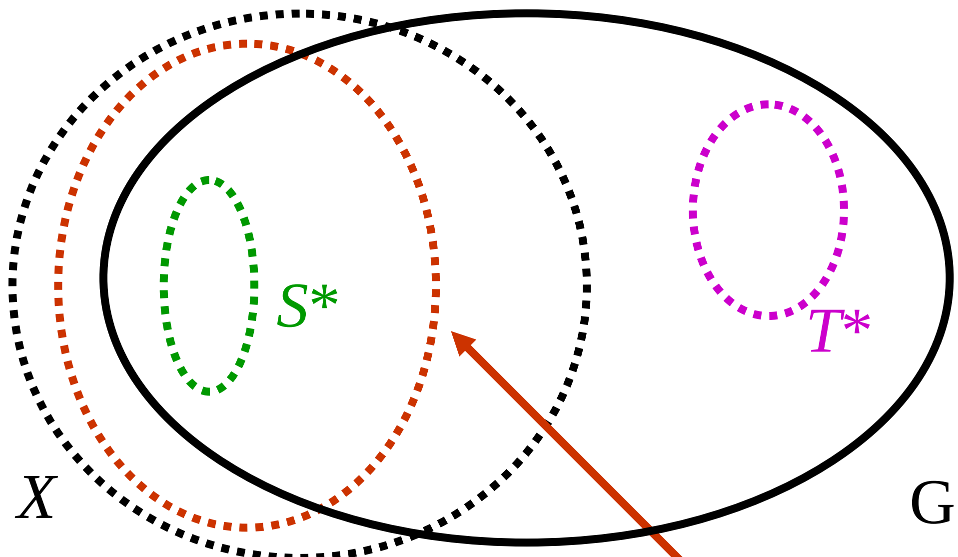


$S_X \subseteq \forall Y \subseteq X$

$r^*(Y) \geqq r^*(X)$

$r(S,T)$, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$

$r^*(X) = \max\{r(S,T) \mid S \subseteq X \subseteq V - T\}$



$r(S^*,T^*) = r^*(X)$

$r^*(Y) \geqq r(S^*,T^*) = r^*(X)$

供給点配置問題 (source location problem)

・・・連結度要求をみたす施設配置問題

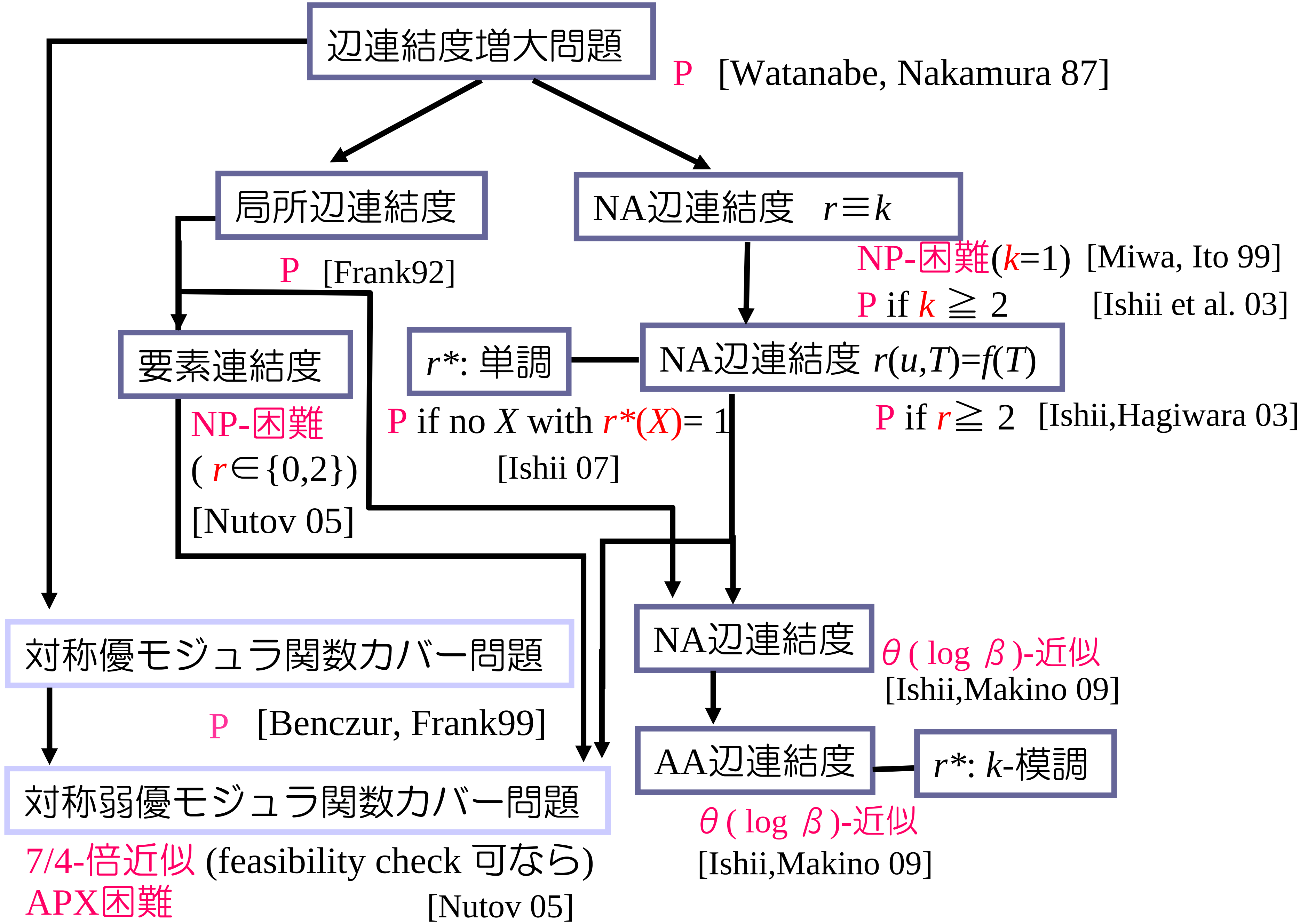
局所辺連結度要求 $r(u,v)$, $u,v \in V$ に対応する r^*:

$$r^*(X) = \max\{ r(u,v) \mid u \in X \subseteq V - v\}, \phi \neq X \subset V$$

一般化

1-模調関数

[Sakashita et al. 06]


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度 r≡k
NP-困難(k=1) [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
r*: 単調
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難
[Nutov 05]
NA辺連結度
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
AA辺連結度
r*: k-模調
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]

W-連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $W \subseteq V$, 連結度要求 $r(u,v) \geqq 0$, $u,v \in V$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u,v 間のW-連結度 $\lambda^{W}_{G+F}(u,v) \geqq r(u,v)$, $u,v \in V$.

$|F|$: 最小.

W-連結度 $\lambda^{W}_{G}(u,v)$ =「(i) $W - \{u,v\}$ の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないu-vパス」の最大数

W-連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $W \subseteq V$, 連結度要求 $r(u,v) \geqq 0,\ u,v \in V$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u,v 間のW-連結度 $\lambda^{W}_{G+F}(u,v) \geqq r(u,v),\ u,v \in V$.

$|F|$: 最小.

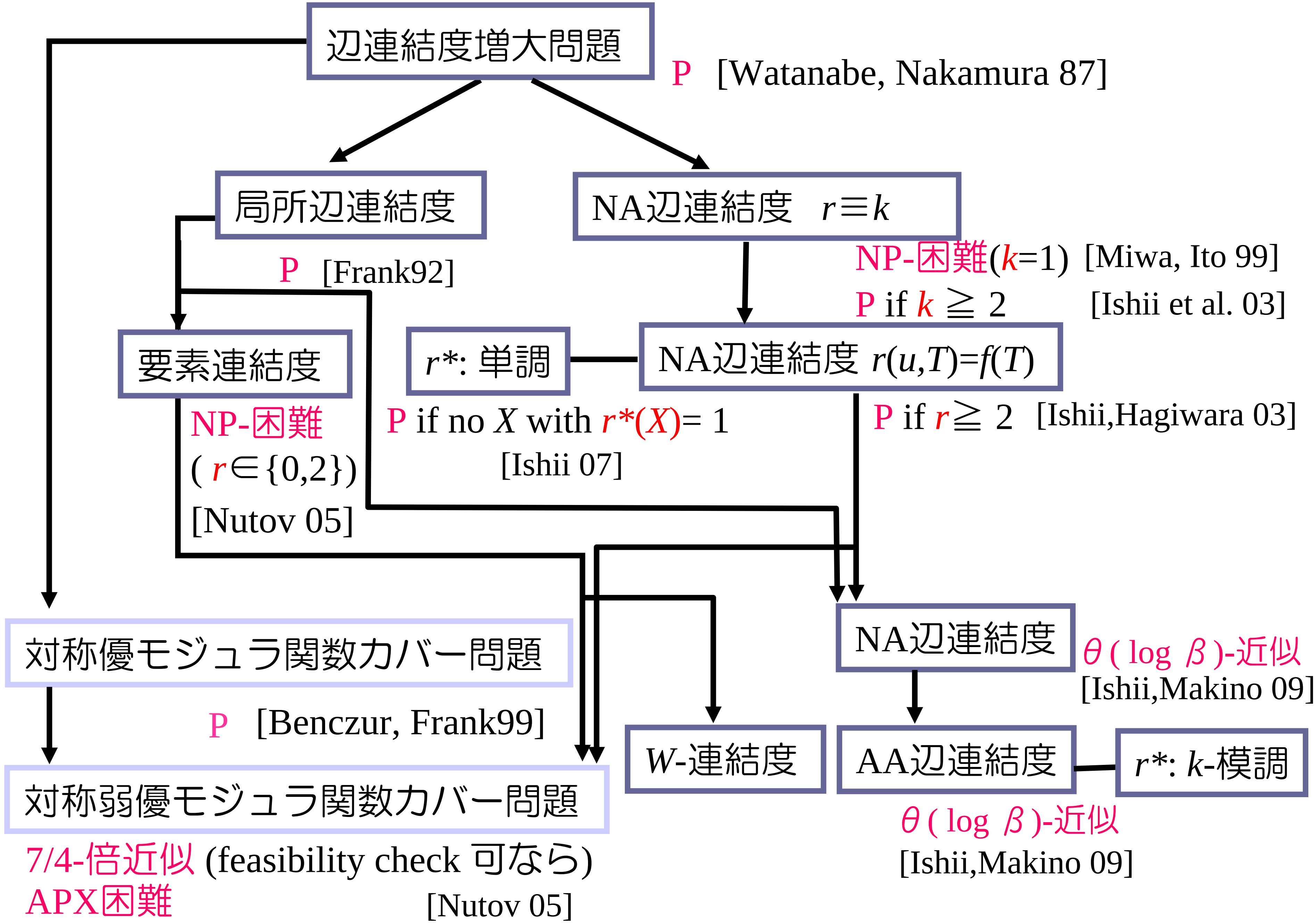
W-連結度 $\lambda^{W}_{G}(u,v)$ =「(i) $W - \{u,v\}$ の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないu-vパス」の最大数

連結度要求:

・$\{u,v\} \cap W \neq \phi \Rightarrow r(u,v)=0$ ⟶ 要素連結度増大問題

・$\{u,v\} \subseteq V-W \quad \Rightarrow r(u,v) \geqq 0.$



辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度 r≡k
NP-困難(k=1) [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
r*: 単調
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
NA辺連結度
θ (log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題
W-連結度
AA辺連結度
r*: k-模調
θ (log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難
[Nutov 05]

W-連結度増大問題

入力: グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $W \subseteq V$, 連結度要求 $r(u,v) \geqq 0$, $u,v \in V$.

出力: 辺集合 F

s.t. $G+F$ における

u,v 間のW-連結度 $\lambda^{W}_{G+F}(u,v) \geqq r(u,v)$, $u,v \in V$.

$|F|$: 最小.

W-連結度 $\lambda^{W}_{G}(u,v)$ = 「(i) $W - \{u,v\}$ の点を互いに共有しない &

(ii) 各辺を互いに共有しないu-vパス」の最大数

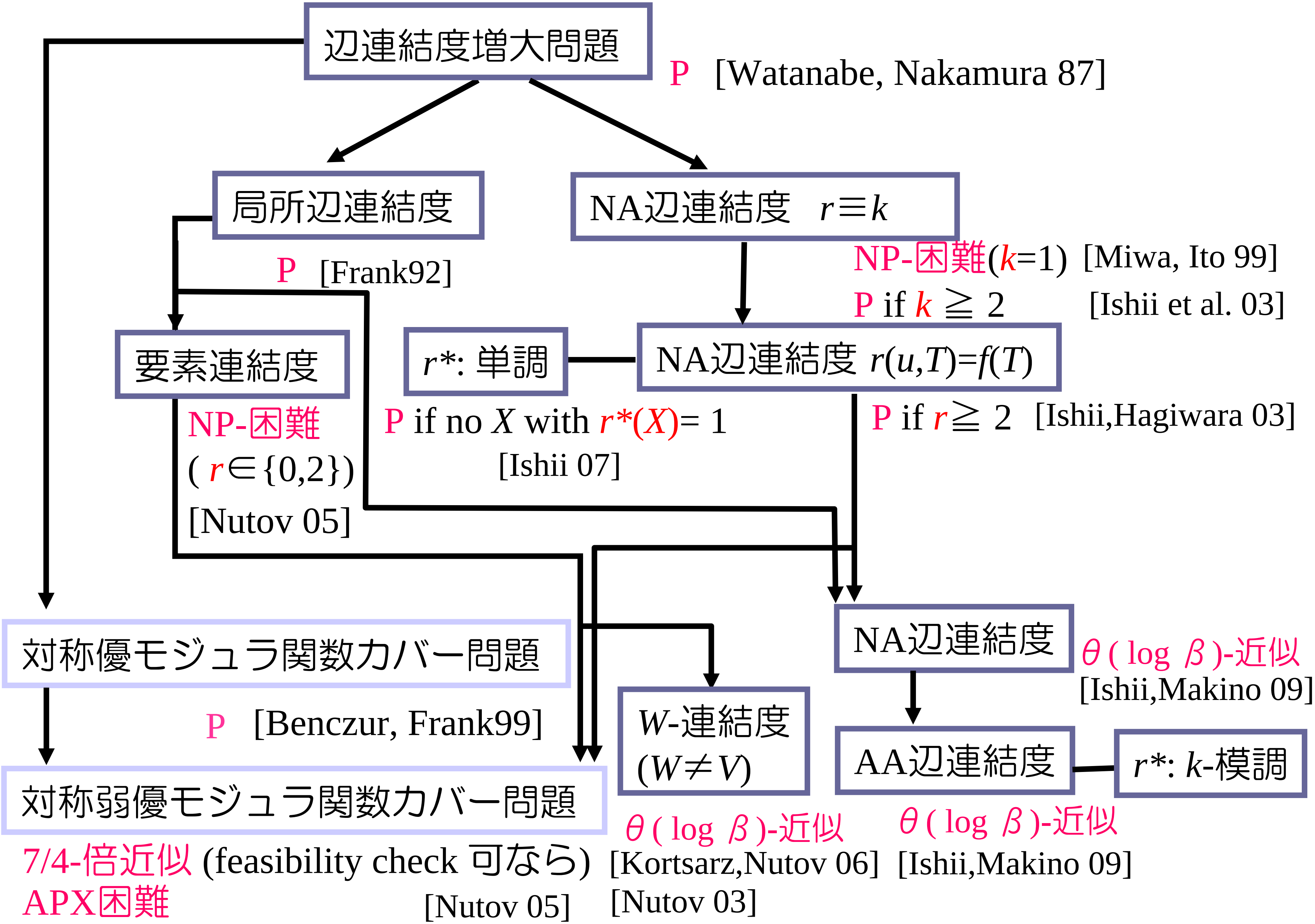
・$W \neq V$ の場合

O(log β)-近似 [Kortsarz,Nutov 06] Ω(log β)-困難 [Nutov 03]

・$W = V$ の場合 (点連結度要求の問題)

O($r_{\max}$ log β)-近似 [Kortsarz,Nutov 06] $\Omega(2^{\log^{1-\varepsilon} n})$ - 困難 [Nutov05]

β : $r(u,v)>0$ である $u,v \in V$ の数


辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度 r≡k
NP-困難(k=1) [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
r*: 単調
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
P [Benczur, Frank99]
対称弱優モジュラ関数カバー問題
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難
[Nutov 05]
W-連結度
(W≠V)
θ(log β)-近似
[Kortsarz,Nutov 06]
[Nutov 03]
NA辺連結度
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
AA辺連結度
r*: k-模調
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]

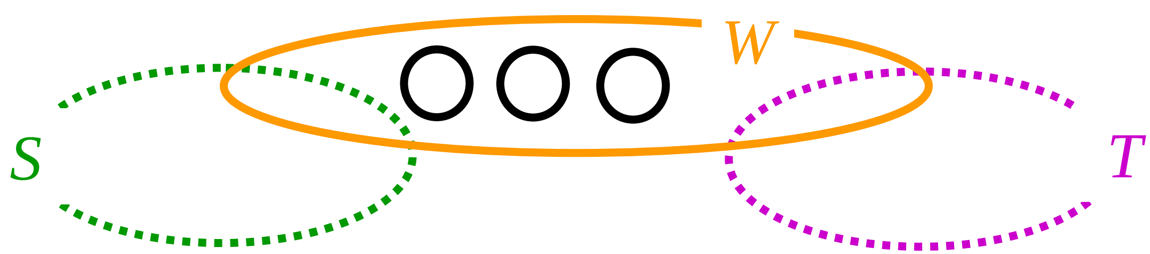
W-AA連結度増大問題

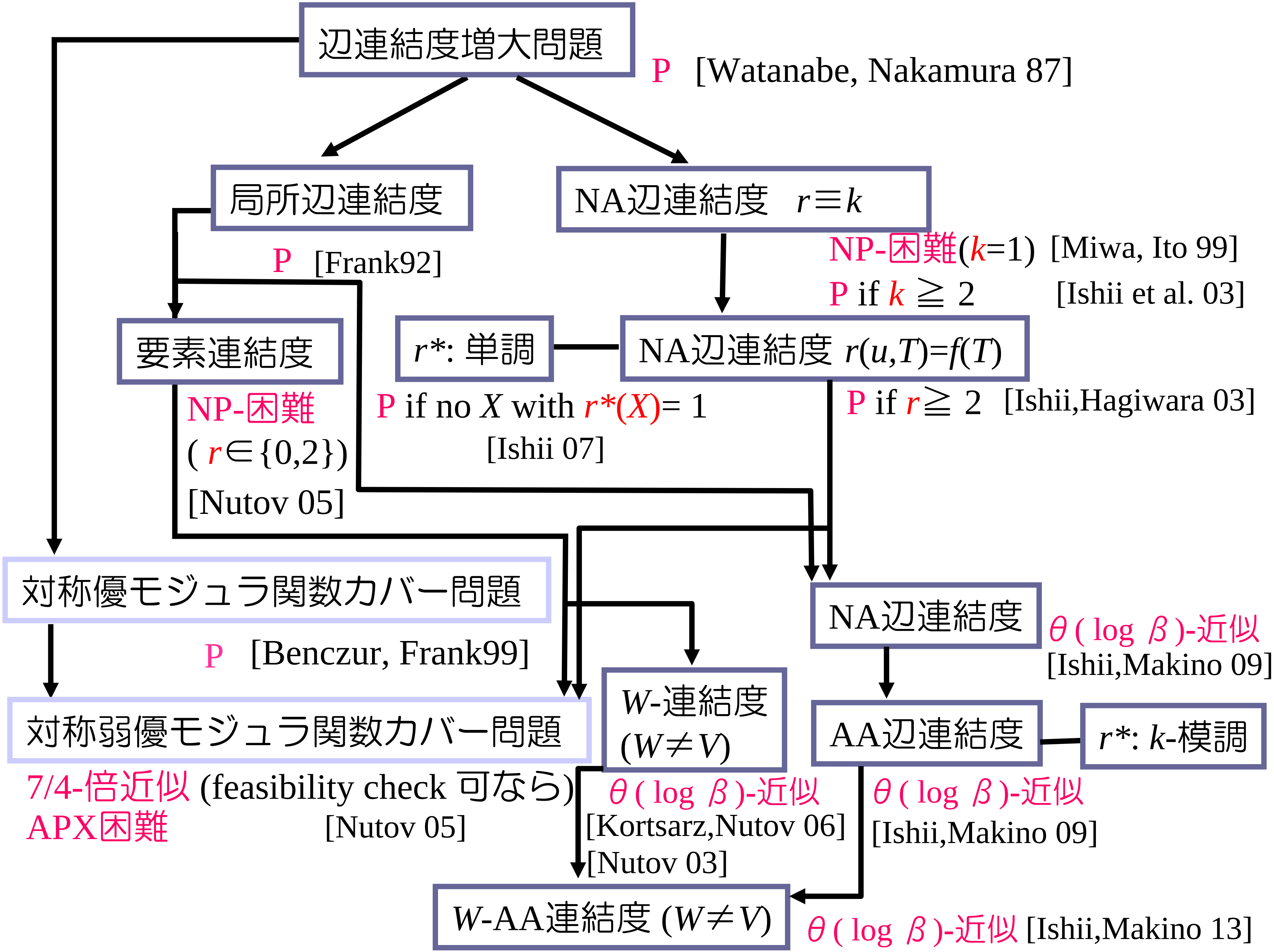
入力: グラフ $G = (V, E)$, 点集合 $W \subseteq V$, 2つの領域族 $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$,
連結度要求 $r(S, T) \geqq 0$, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$.

出力: 辺集合 F
s.t. $G + F$ における
S と T 間のW-AA辺連結度 $\lambda^W_{G+F}(S,T) \geqq r(S,T)$, $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{T}$.
$|F|$: 最小.

W-AA連結度 $\lambda_G^W(S,T)$

= 「(i) $W - (S \cup T)$の点を互いに共有しない &
(ii) 各辺を互いに共有しない S-T パス」の最大数





辺連結度増大問題
P [Watanabe, Nakamura 87]
局所辺連結度
P [Frank92]
NA辺連結度 r≡k
NP-困難(k=1) [Miwa, Ito 99]
P if k ≧ 2 [Ishii et al. 03]
要素連結度
r*: 単調
NA辺連結度 r(u,T)=f(T)
NP-困難
(r∈{0,2})
[Nutov 05]
P if no X with r*(X)= 1
[Ishii 07]
P if r≧ 2 [Ishii,Hagiwara 03]
対称優モジュラ関数カバー問題
NA辺連結度
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
P [Benczur, Frank99]
W-連結度
(W≠V)
対称弱優モジュラ関数カバー問題
AA辺連結度
r*: k-模調
7/4-倍近似 (feasibility check 可なら)
APX困難
[Nutov 05]
θ(log β)-近似
[Kortsarz,Nutov 06]
[Nutov 03]
θ(log β)-近似
[Ishii,Makino 09]
W-AA連結度 (W≠V)
θ(log β)-近似 [Ishii,Makino 13]

未解決問題

(1) 無向グラフの点連結度増大問題:
目標の連結度 $k \geqq \kappa(G)+2$ の場合.

(2) 対称弱優モジュラ関数カバー問題:
実行可能性の判定問題.

(3) k-模調関数増大問題.

(4) 正モジュラ関数の最小横断問題:
実行可能性の判定問題