組合せ最適化セミナー 2013 年 7 月 26 日

確率と計算 演習問題

来嶋 秀治 (Shuji Kijima)
九州大学 大学院システム情報科学研究院

1 裾不等式

問題 1.1 (*)**.** 問題 P に対して，乱択アルゴリズム A は確率 0.501 で正解を出力する．任意の δ $(0 < \delta < 1)$ に対して，乱択アルゴリズム A を高々$\mathrm{poly}(\log \delta^{-1})$ 回用いて，確率 $1 - \delta$ で問題 P の正解を出力するアルゴリズム B を設計せよ．

問題 1.2 (†)**.** 入力サイズが n の問題 P に対して，乱択アルゴリズム A' は確率 $1/2 + 1/n$ で正解を出力する．任意の δ $(0 < \delta < 1)$ に対して，乱択アルゴリズム A' を高々$\mathrm{poly}(n, \log \delta^{-1})$ 回用いて，確率 $1 - \delta$ で問題 P の正解を出力するアルゴリズム B を設計できるか？

問題 1.3. $\mathrm{O}(\log \log n)$ ビット領域の決定性のストリーム数え上げアルゴリズムは存在するか？

問題 1.4. $\mathrm{O}(\log \log n)$ ビット領域の決定性のストリーム頻出アイテム検知は存在するか？

問題 1.5 (*)**.** 0-1 ナップサック解の一様ランダムサンプリングオラクルを用いて，0-1 ナップサック解の多項式時間乱択近似数え上げアルゴリズムを設計せよ．

問題 1.6 (*)**.** 0-1 ナップサック解の近似数え上げオラクルを用いて，0-1 ナップサック解の近似一様ランダムサンプリングのアルゴリズムを設計せよ．

2 定常分布

問題 2.1. 既約で非周期的なマルコフ連鎖が一意な定常分布を持つことを Perron-Flobenius の定理を用いて示せ．

問題 2.2 (†)**.** 既約で非周期的なマルコフ連鎖が一意な定常分布を持つことを coupling 補題を用いて示せ．

既約で非周期的な推移確率行列 $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ がある正ベクトル $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n}$ に対して，**詳細釣合の式**（*detailed balance equation*）

$$\forall u, v \in V,\ \nu(u)P(u,v) = \nu(v)P(v,u)$$

を満たすとき，P は**可逆** (*reversible*) と言う．

問題 2.3 (*)**.** 確率行列 P が詳細釣合の式を満たすとき，$\nu P = \nu$ が成り立つことを示せ．(すなわち定常分布 π は ν をスカラー倍したものである.)

問題 2.4 (*)**.** P は任意の x, y に対して $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$ とする．$\Pi^{1/2} P \Pi^{-1/2}$ が実対称行列であることを確認せよ．ただし $\Pi^{1/2} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\pi(1)}, \ldots, \sqrt{\pi(n)}\right)$，$\Pi^{-1/2} = \mathrm{diag}\left(1/\sqrt{\pi(1)}, \ldots, 1/\sqrt{\pi(n)}\right)$ とする．

任意の $v \in V$ に対して $P(v,v) \geq 1/2$ を満たすとき，P は lazy という．

問題 2.5 (*)**.** 可逆で lazy なマルコフ連鎖の固有値が非負であることを示せ．

問題 2.6 (*)**.** 0-1 ナップサック解の一様分布を定常分布に持つマルコフ連鎖を設計せよ．

問題 2.7. 2 次元上の一般の位置に与えられた n 点に対し，三角形分割（極大平面グラフ）の一様分布を定常分布に持つマルコフ連鎖を設計せよ．

3 van der Corput 列

van der Corput 列 $\psi(0), \psi(1), \psi(2), \ldots$ は以下のように定められる．$\psi(0) \stackrel{\text{def.}}{=} 0$ とする．自然数 i の 2 進表現が $i = \sum_{j=0}^{\lfloor \lg i \rfloor} \beta_j(i) \cdot 2^j$ で与えられるとき，$\beta_j(i) \in \{0,1\}$ ($j \in \{0,1,\ldots,\lfloor \lg i \rfloor\}$) を用いて

$$\psi(i) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=0}^{\lfloor \lg i \rfloor} \beta_j(i) \cdot 2^{-(j+1)}.$$

とする．

問題 3.1. van der Corput 列を $\psi(16)$ まで求め，数直線上に図示せよ．

van der Corput 列を用いた関数ルーターを以下のように定める．一般性を失うことなく，$N(v)$ 上に $u_1, \ldots, u_{\delta(v)}$ の順番が定められているものとする．このとき，$\sigma_v(i) = u_k \in N(v)$ を

$$\sum_{j=1}^{k-1} P(v, u_j) \leq \psi(i) < \sum_{j=1}^{k} P(v, u_j)$$

を満たすものとする．

問題 3.2. 関数ルーター σ_v が van der Corput 列を用いて定められるとき，任意の $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$|\mathcal{I}_{v,u}[0,z) - z \cdot P(v,u)| \leq \lg(z+1)$ が成り立つことを示せ．

問題 3.3 (*). 関数ルーター σ_v が van der Corput 列を用いて定められるとき，無数の (infinitely many) $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$|\mathcal{I}_{v,u}[0,z) - z \cdot P(v,u)| = \Omega(\log z)$ となる例を設計せよ．

4 混交時間

問題 4.1. Johnson グラフ (i.e., 一様マトロイドの基交換グラフ) 上の単純ランダムウォークの混交時間の上界を求めよ．

問題 4.2. 与えられた半順序集合の非イデアルの多項式時間一様ランダム生成法を与えよ．

問題 4.3 (†). 安定結婚問題の安定マッチングの多項式時間一様ランダム生成法は存在するか？

問題 4.4 ($\star$). グラフ中の森の多項式時間乱択近似数え上げアルゴリズムは存在するか？

問題 4.5 ($\star$). $m \times n$ 分割表の $\mathrm{poly}(m, n, \log N)$ 時間乱択近似数え上げアルゴリズムは存在するか？ただし N は表中の数値の総和を表す．

問題 4.6 ($\star$). マトロイドの基交換グラフ上のランダムウォークは多項式時間収束するか？

5 決定性アルゴリズム

問題 5.1. グラフ中の木の数え上げの多項式時間アルゴリズムを設計せよ．

問題 5.2 (†). 0-1 ナップサック解の多項式時間決定性近似数え上げアルゴリズムは存在するか？

問題 5.3 ($\star$). 与えられた有限半順序集合の線形拡大の多項式時間決定性近似数え上げアルゴリズムは存在するか？

問題 5.4 ($\star$). 二部グラフの完全マッチングの多項式時間決定性近似数え上げアルゴリズムは存在するか?

問題 5.5 ($\star$). 平衡マトロイドの多項式時間決定性近似数え上げアルゴリズムは存在するか？