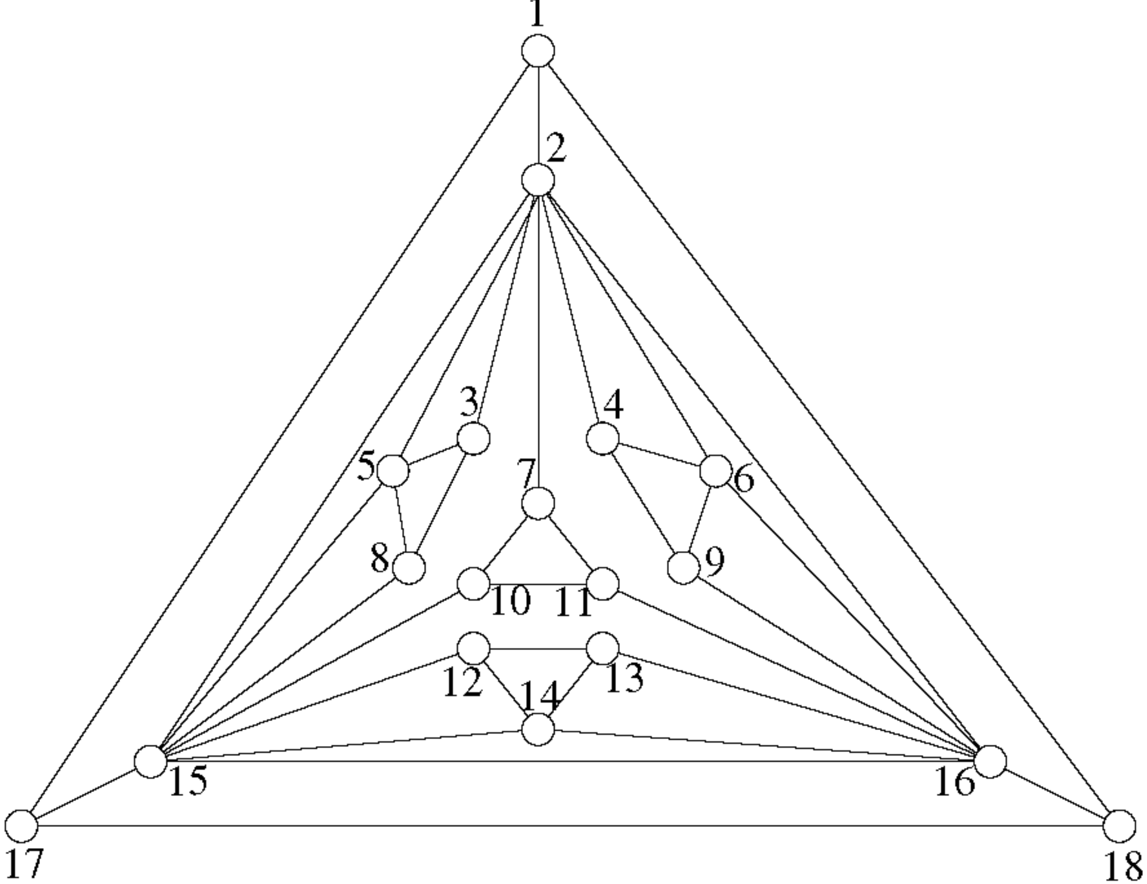
演習問題

(1) 最大マッチングをひとつ示せ

(2) それが最大マッチングであることを示せ
(= それよりも大きいマッチングが存在しないことを示せ)



Goemans 2013

演習問題

(3)[p. 6] 「M が最大マッチング iff M-増加道が存在しない」を示せ

(4)[p. 13] Hall の定理を証明せよ:

$G = (U \cup V, E)$ が完全マッチングをもつ
iff $|\Gamma(X)| \geq |X| \quad \forall X \subseteq U$

(5)[p. 28] 2部グラフの (LP) が整数最適解をもつことを示せ

(6)[p. 33] 「接続行列 $A(G)$ が完全単模 iff G が2部グラフ」を示せ

(7)[p. 40] 一般グラフの (LP) が整数最適解をもつことを示せ

演習問題

(8) d-正則2部グラフ (すべての頂点の次数が d) が
完全マッチングをもつことを2通りの方法で示せ:

- Kőnig の定理 / Hall の定理 を用いる
- 多面体表現を用いる

さらに, d-正則2部グラフの枝彩色数が d であることを示せ

(9) 冒頭の例において,

- 最大マッチングに含まれない枝をすべて挙げよ
- 最大マッチングの個数を求めよ

(10) 2部グラフの (LP) と (Dual-LP) について,

- OPT(LP) ≤ OPT(Dual-LP) を示し, 【弱双対定理】
- 各々の許容解 x, y について
  val(x) = val(y) となる条件を書き下せ 【相補性条件】

演習問題

(11) 二重確率行列が置換行列の凸結合で表されることを示せ
【Birkhoff−von Neumann の定理】
- ✓ 二重確率行列: 任意の行和, 列和が 1 の非負行列
- ✓ 置換行列: 任意の行, 列に 1 が丁度 1 個ある {0,1}-行列

(12) 2辺連結3正則グラフにおいて, 以下を示せ
- 完全マッチングが存在する
- 6個の完全マッチングが存在して,
  各枝は丁度 2 個の完全マッチングに含まれる