

複数の凸多面体を折る 展開図の研究

上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科教授

第11回 組合せ最適化セミナー 二日目

2014年7月31日 演習問題の解答とまとめ

展開図の簡単な歴史

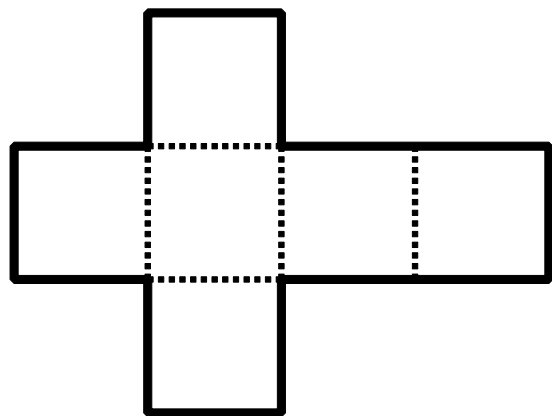
ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:

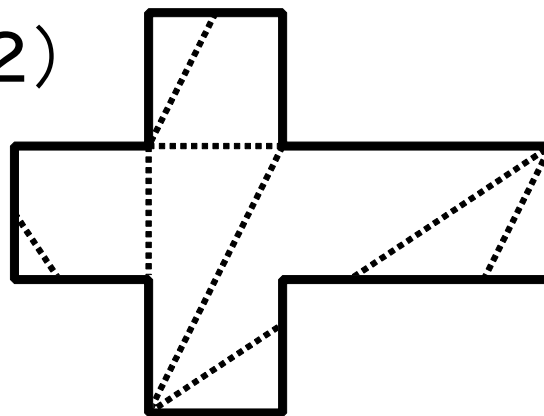
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題1: 何が折れるでしょう？

(1)



(2)

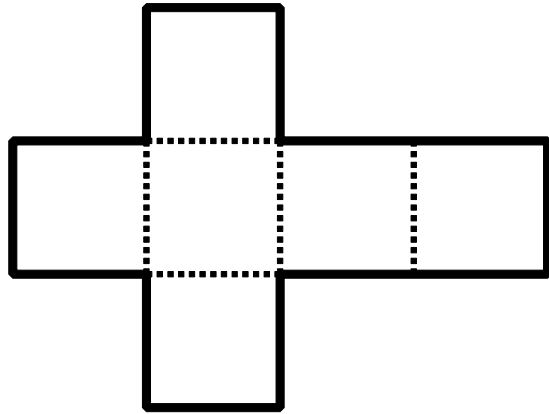


ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

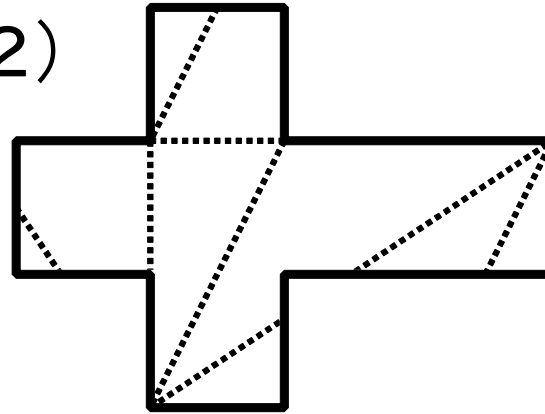
ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

演習問題1: 何が折れるでしょう？

(1)



(2)



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる凸多面体が折れることが知られている.

解答: 4面体

コメント: 現時点では, この手の問題を解くには, 網羅的なDPによる方法しか知られていない. ちなみに本多角形の場合, 2重被覆長方形2種, 4面体7種, 5面体3種, 6面体5種(含立方体), 8面体6種が折れる.

1. 展開図の基礎知識：演習問題2

正多面体の一般展開図の最短カットの長さとは？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
 - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
 - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
 - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
 - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも

以下の文献にすべての解答が載っている, けど...

J. Akiyama, G. Nakamura, X. Chen, and M.-J. Ruiz.

Minimum Perimeter Developments of the Platonic Solids,

Thai J. or Math., 9(3), pp. 461-487, 2011.

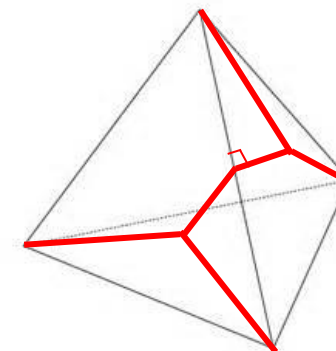
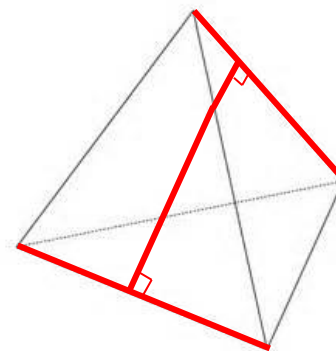
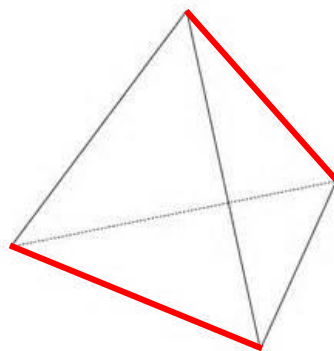
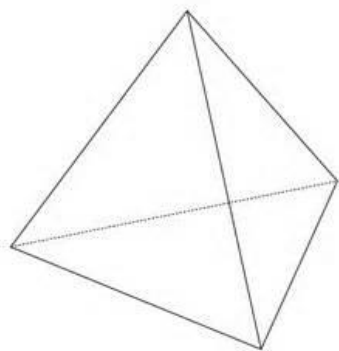
1. 展開図の基礎知識：演習問題2

正4面体：

- 上界その1：辺を切る：3
- 上界その2：辺を二つ切り，
筒状にしてからつぶして垂線で結ぶ： $2+\sqrt{3}/2=2.866\dots$

発展問題

立方体以上で，いろいろな立体に応用できるスマートな方法はないか？



- 立体の表面上で頂点を張るシュタイナー木を作ればよい！

1. 展開図の基礎知識：演習問題2

正4面体：表面上で頂点を張るシュタイナー木を作ればよい！

正4面体の場合，正三角格子上の
どの4点も選び方によらず
同じ形なので，この4点を結ぶ
シュタイナー木を作ればよい．

[シュタイナー点] 3辺の分岐の角はどれも 120°

[トリチェリの作図法]

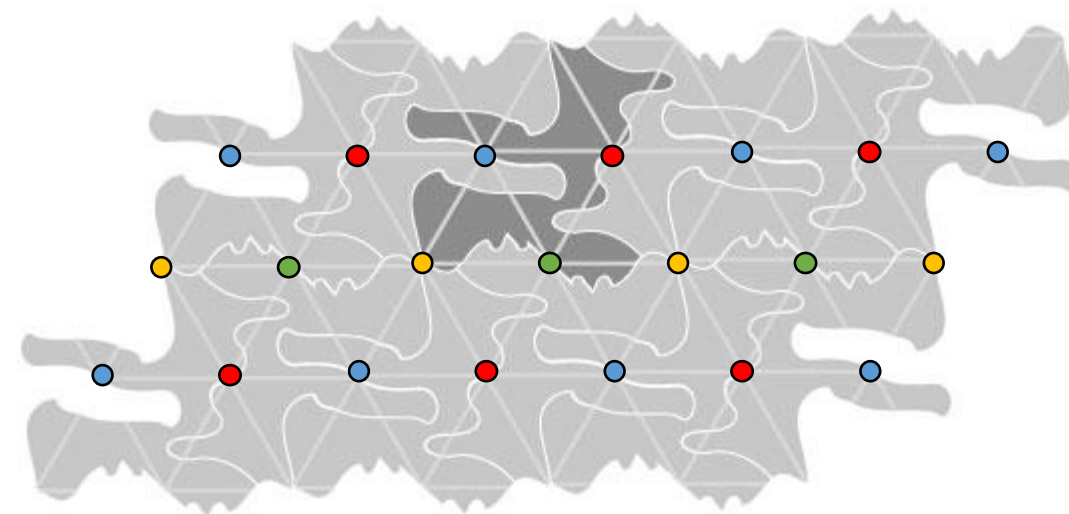
鋭角三角形 $P_1 P_2 P_3$ に対して，

$P_1 P_2 X$ が正三角形となる代替点 X をおく．

このとき3点 $P_1 P_2 X$ を通る円と直線 $X P_3$ の交点がシュタイナー点 S で，

しかも $|P_1 S| + |P_2 S| + |P_3 S| = |P_3 X|$ である．

[4点以上の場合] Melzak の方法(1961)で，おおむね総当り



結局： $\sqrt{7}=2.645\dots$ が最適

惜しい！ 例たち(上原2010)



以下の共通の展開図を考えてみよ. どのくらい正多面体に近いか検討せよ.

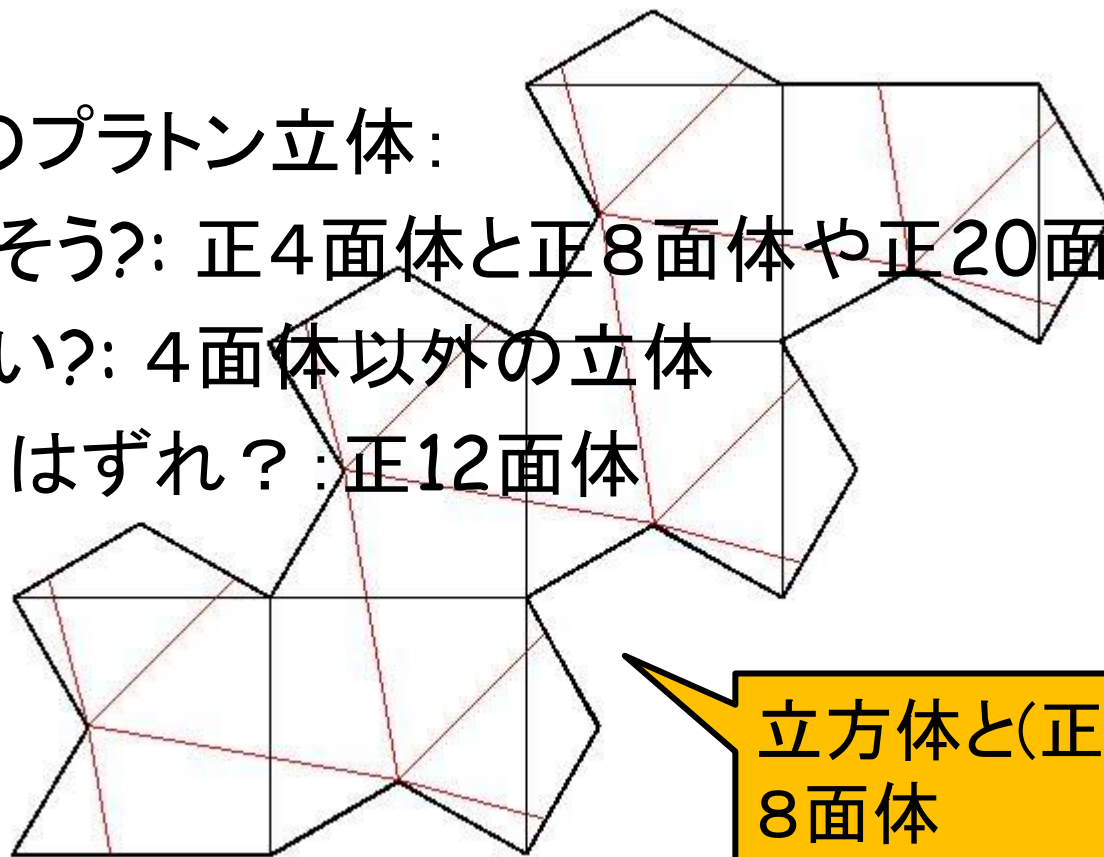
- 立方体 $\Leftrightarrow$ 4単面体
- 八面体 $\Leftrightarrow$ 4単面体

未解決問題

- [実験的な観測/予想] 定理 した「フラクタル曲線」は、 l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:

- できそう?: 正4面体と正8面体や正20面体
- 難しい?: 4面体以外の立体
- 仲間はずれ?: 正12面体



このあたりなら、
多少はできそう

立方体と(正じゃないけど)
8面体

未解決問題

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか?

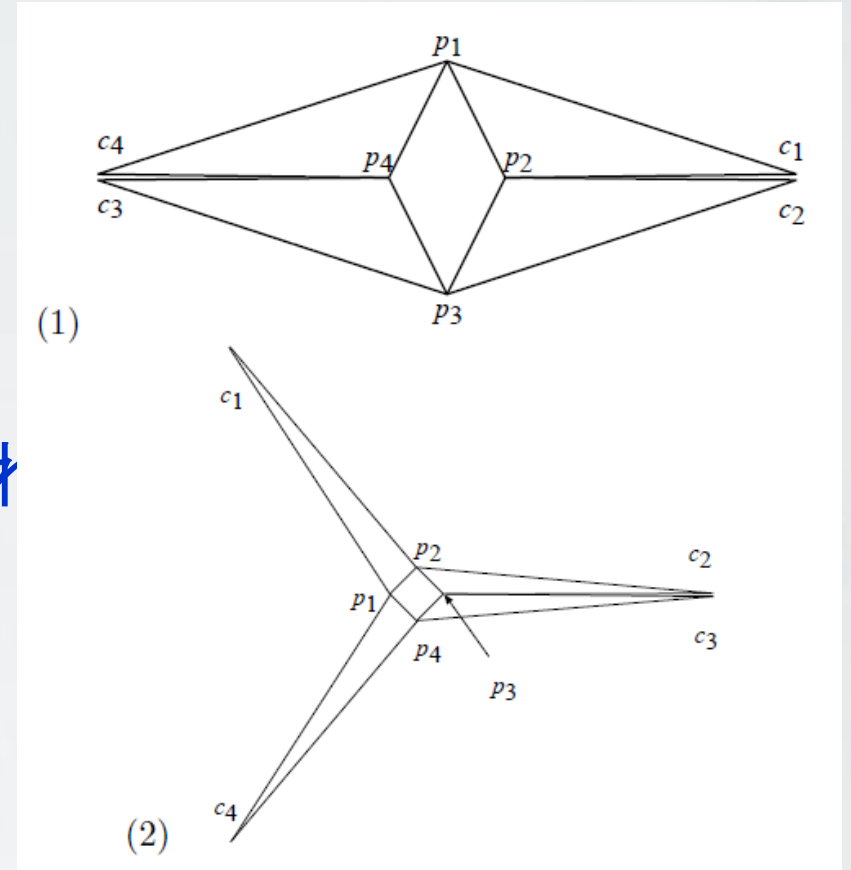
問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか? **未解決問題**



演習問題5: 凹>凸となる具体例を示せ
未解決問題: メタ問題たちを解け

箱を折る問題：

➤ 演習問題6：

箱を折る展開図を構成するとき、暗に展開図の中に切込みが入っていないと仮定している。実は一般性を失うことなく、これを仮定してよい。なぜか？

[略証]

広い長方形の中に切り込む切込みがあったとする。

すると、このとき切込み線は木であり、葉がある。

葉の部分で周囲を囲む面の角度の合計は360度である。

箱は凸多面体なので、どの点をとってもその点の周囲は高々360度である。

したがって、この葉の切込みは冗長であり、切る必要はない。

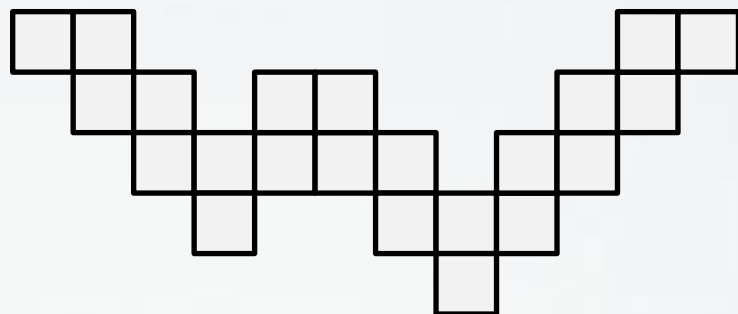
以下、これを繰り返せば、この木はすべて冗長な切込みからなる。

もう少し真面目な証明は：『2種類の箱を折れる展開図に関する研究』

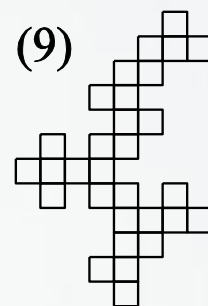
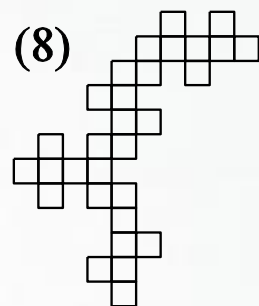
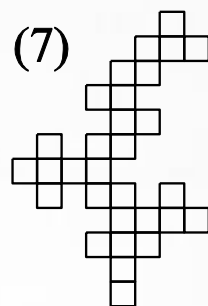
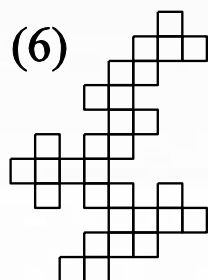
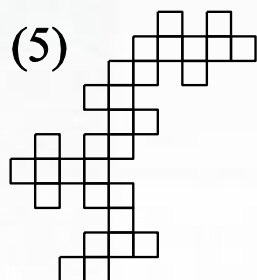
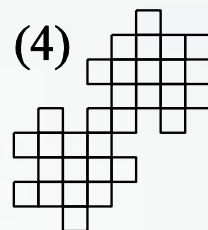
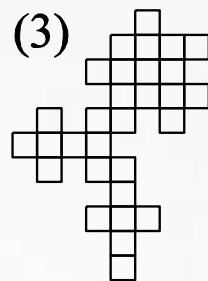
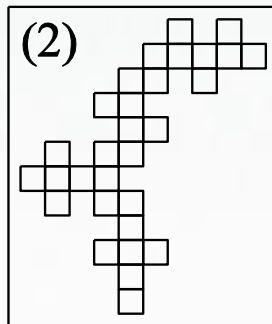
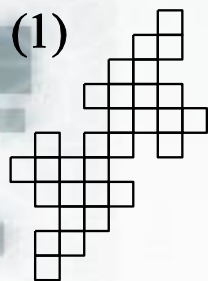
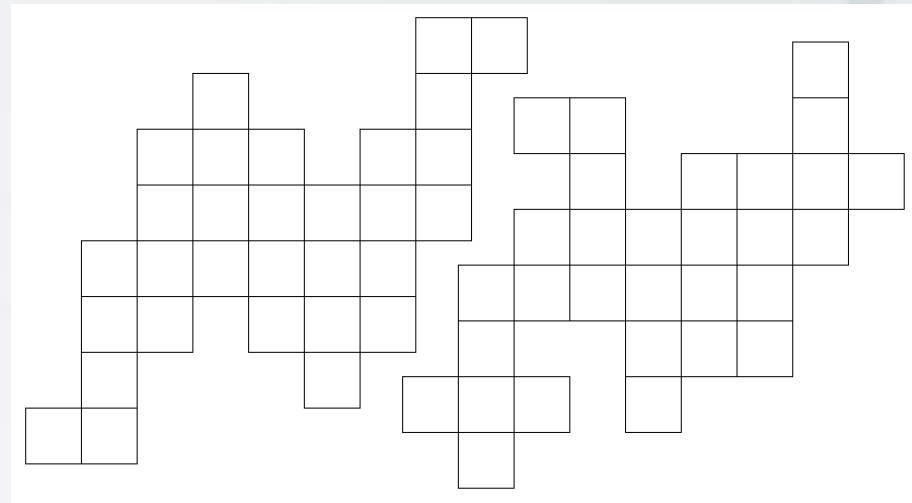
上原隆平・三谷純，折り紙の科学，Vol. 1, No. 1, pp. 3-18, 2011年.

おまけ問題たち：箱を折る

2通り. ただし斜めが必要



3通り. ただし一つはちょっとずるい



どれも3種類.
演習問題7:(2)だけどう特別なのか?

どれも $1 \times 1 \times 7$, $1 \times 3 \times 3$,
 $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の箱が折れるが,
(2)はなんと $\sqrt{5^3}$ の箱が2通り折れる!

さいごのまとめ

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

未解決問題が多く,

現段階ではおもしろい結果が出しやすい分野だと思います.