RIMS 共同研究 (COSS)
Kyoto, JAPAN

単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム

北原知就 (T. KITAHARA), 水野 眞治 (S. MIZUNO)

Tokyo Institute of Technology, 東京工業大学

July 21–23, 2015

目次

Contents

1. 導入

単体法

- Dantzig によって開発される．
- これまでのところ，反復回数の上界について，良い結果は得られていない．
- Klee–Minty は単体法が指数回の反復を要する問題の例を示した．

基底解の数

単体法の反復回数は,

- 問題の退化,
- 巡回現象,

によって無限回になり得る．そこで，ここでは生成される実行可能基底解の数に注目する.

LP の標準形

LP の標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq 0.
\end{array}
$$

行列形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & c^T x, \\
\text{subject to} & Ax = b, \; x \geq 0.
\end{array}
$$

Dantzig のピボット規則

- Dantzig のピボット規則について分析する．
- 毎回の反復で，目的関数の係数が最小の変数を入力変数に選ぶ．

主結果

Dantzig の規則の単体法によって生成される実行可能基底解の個数の上界は次式で与えられる．

$$(n-m)\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m, n-m\}m\frac{\gamma}{\delta})\rceil,$$

ここで，

- δ：すべての実行可能基底解の正の要素の最小値
- γ：すべての実行可能基底解の正の要素の最大値
- $\lceil a \rceil$：$a \in \mathfrak{R}$ より大きい最小の整数

主結果

得られた上界

$$(n-m)\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta})\rceil$$

- 上界は LP の制約のみに依存する．
- 主問題が非退化の時，反復回数の上界となる．

解析について

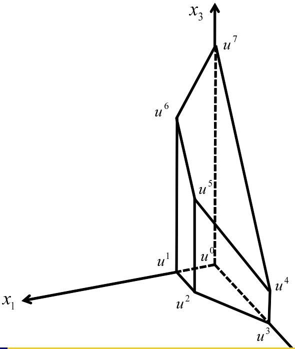
- Ye（2010) のマルコフ決定問題に対する解析の自然な拡張.
- LP と単体法に関する基本的な知識のみ必要とする.

上界のタイトさ

得られた上界

$$(n - m)\lceil \min\{m, n - m\}\frac{\gamma}{\delta} \log(\min\{m, n - m\}\frac{\gamma}{\delta})\rceil$$

Klee-Minty 問題の一変種に対する反復回数：$\frac{\gamma}{\delta}$.



Contents

2. LP に対する単体法

LP とその双対

LP の標準形

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x, \\ \text{subject to} & Ax = b,\ x \geq 0. \end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y, \\ \text{subject to} & A^T y + s = c,\ s \geq 0. \end{array}$$

仮定

1. $\mathrm{rank}(A) = m$.
2. 主問題は最適解を持つ.
3. 初期実行可能基底解 x^0 が得られている.

- x^*: 主問題の最適実行可能基底解
- (y^*, s^*): 双対問題の最適実行可能基底解
- z^*: LP の最適値

変数等の分割

添え字集合 $\boldsymbol{B} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ が与えられた時, $\boldsymbol{B}$ とその補集合 $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots, n\} - \boldsymbol{B}$ によって $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{c}$ および $\boldsymbol{x}$ を次のように分割する.

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_B, \boldsymbol{A}_N],\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}.$$

LP の標準形は次のように書ける.

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T \boldsymbol{x}_N, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_B \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_B \geq 0,\ \boldsymbol{x}_N \geq 0. \end{array}$$

辞書

基底の集合

$$\mathcal{B} = \{B \subset \{1, 2, \ldots, n\} \mid |B| = m, \ \det(A_B) \neq 0\}.$$

基底 $B \in \mathcal{B}$ と非基底 $N = \{1, 2, \ldots, n\} - B$ による問題の表現

$$\begin{array}{ll} \min & c_B^T A_B^{-1} b + (c_N - A_N^T (A_B^{-1})^T c_B)^T x_N, \\ \text{subject to} & x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N, \\ & x_B \geq 0, \ x_N \geq 0, \end{array}$$

この形式を辞書という.

実行可能基底解

$\bar{c}_{N^t} = c_{N^t} - A_{N^t}^T (A_{B^t}^{-1})^T c_{B^t}$ を縮小コスト (reduced cost) とする．このとき，問題は次のように書ける．

$$\begin{array}{ll} \min & c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}_N^T x_N, \\ \text{subject to} & x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \geq 0, \\ & x_N \geq 0. \end{array}$$

主問題の実行可能基底解は次のようになる．

$$x_B = A_B^{-1} b \geq 0, \; x_N = 0.$$

δ と γ

- δ: 実行可能基底解のすべての正の要素の最小値
- γ: 実行可能基底解のすべての正の要素の最大値

例　次の 4 つの実行可能基底解をもつ LP を考える．

$$\boldsymbol{v}_1 = (2, 3, 0, 0),\ \boldsymbol{v}_2 = (2, \underline{1}, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (0, 4, 0, 6),\ \boldsymbol{v}_4 = (0, 0, 3, \underline{7}).$$

この LP では，$\delta = 1$ および $\gamma = 7$ となる．

Dantzig のピボット規則

$\bar{\mathbf{c}}_{N^k} \geq \mathbf{0}$ ならば，現在の解が最適である．
そうでないときはピボットを行う．Dantzig の規則では，縮小コストが最小の変数を入力に選ぶ．正確には，

$$j^k \in \arg\min_{j \in N^k} \bar{\mathbf{c}}_{N^k}.$$

となる添え字を選ぶ．
$\Delta^k = -\bar{c}_{j^k} > 0$ と定める．

表記

x^*	:	主問題の最適実行可能基底解
(y^*, s^*)	:	双対問題の最適解
z^*	:	問題の最適値
x^k	:	単体法の k 反復目の点
B^k	:	x^k の基底
N^k	:	x^k の非基底
$\bar{c}_{N^k}$	:	k 反復目の縮小コスト
Δ^k	:	$-\min_{j\in N_k} \bar{c}_j$，最小係数の絶対値
j^k	:	Dantzig の規則によって選ばれる添え字

Contents

3. 単体法によって生成される基底解の数

Δ^k の下界 (補題3.2)

次の命題は，最小係数の絶対値 Δ^k が目的関数と最適値との差に比例した下界を持つことを示している．

Lemma

x^k を *Dantzig* の規則の単体法の t 反復目の点とする．このとき，

$$\Delta^k \geq \frac{c^T x^t - z^*}{\min\{n-m, m\}\gamma}$$

が成り立つ．

証明. x^* を主問題の最適実行可能基底解とする．いま，Dantzig の規則を採用しているので，$\bar{c}_{N^t} \geq -\Delta^t e$ が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
z^* &= c^T x^* \\
&= c_{B^t}^T A_{B^t}^{-1} b + \bar{c}_{N^t}^T x_{N^t}^* \\
&\geq c^T x^t - \Delta^t e^T x_{N^t}^* \\
&\geq c^T x^t - \Delta^t \min\{n - m, m\}\gamma,
\end{aligned}
$$

ここで，2 番目の不等式は x^* の正の要素は高々 m 個であること，及びそれぞれが γ 以下であることから成り立つ．これらの不等式から所望の不等式を得る． □

ギャップの定比率の減少 (定理3.3)

次の定理は，解が更新されるとき，ギャップ $(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - z^*)$ が定比率以下で減少することを示している．

Theorem

$\boldsymbol{x}^k$ と $\boldsymbol{x}^{k+1}$ を *Dantzig* の規則の単体法の k，$k+1$ 反復目の点とする．もし $\boldsymbol{x}^{k+1} \neq \boldsymbol{x}^k$ であれば以下が成り立つ．

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{t+1} - z^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{\min\{n-m, m\}}\right)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t - z^*).$$

証明. $x^t_{j^t}$ を k 反復目で選ばれる入力変数とする．
$x^{t+1}_{j^t} = 0$ ならば $x^{t+1} = x^t$ となり，仮定に矛盾する．
よって $x^{t+1}_{j^t} \neq 0$ であり，δ の定義より $x^{t+1}_{j^t} \geq \delta$ となる．
すると，

$$\begin{aligned} c^T x^t - c^T x^{t+1} &= \Delta^t x^{t+1}_{j^t} \\ &\geq \Delta^t \delta \\ &\geq \frac{\delta}{\min\{n-m, m\}\gamma}(c^T x^t - z^*). \end{aligned}$$

2 つ目の不等式において，補題 3.2 を用いた．この不等式を変形し，定理の不等式を得る． □

基底解の要素の上界 (補題3.5)

Lemma

$\boldsymbol{x}^t$ を *Dantzig* の規則の単体法の $\boldsymbol{t}$ 反復目の点とする．$\boldsymbol{x}^t$ が最適解でないとき，ある添え字 $\bar{j} \in \boldsymbol{B}^t$ が存在し，$x^t_{\bar{j}} > 0$ および任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して以下が成り立つ．

$$x_{\bar{j}} \leq \min\{m, n-m\} \frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - z^*}{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^t - z^*} x^t_{\bar{j}}$$

証明. $(x^k)^T s^* = \sum_{j \in B^k} x_j^k s_j^* = \sum_{j \in B^k \cap N^*} x_j^k s_j$ 及び $|B^k \cap N^*| \leq \min\{m, n-m\}$ だから，ある $\bar{j} \in B^k$ が存在して，

$$x_{\bar{j}}^k s_{\bar{j}}^* \geq \frac{1}{|B^k \cap N^*|}(x^k)^T s^* = \frac{1}{|B^k \cap N^*|}(c^T x^k - z^*) > 0$$

となる．このとき，$x_{\bar{j}}^k > 0$ であり，また $|B^k \cap N^*| \leq \min\{m, n-m\}$ より，

$$s_{\bar{j}}^* \geq \frac{1}{\min\{m, n-m\} x_{\bar{j}}^k}(c^T x^k - z^*).$$

となる．

証明の続き. 任意の実行可能解 $\mathbf{x}$ に対して，
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} - z^* = \mathbf{x}^T\mathbf{s}^* \geq x_{\bar{j}} s^*_{\bar{j}}$ が成り立つので，以下を得る.

$$x_{\bar{j}} \leq \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x} - z^*}{s^*_{\bar{j}}} \leq \min\{m, n-m\} \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x} - z^*}{\mathbf{c}^T\mathbf{x}^t - z^*} x^k_{\bar{j}}.$$

□

最適解で0になる変数 (補題3.6)

Lemma

x^t を Dantzig の規則の単体法の t 反復目の点とする．
x^t が最適でないならば，ある $\bar{j} \in B^t$ が存在して以下を満たす．

1. $x^t_{\bar{j}} > 0$.
2. t 反復目以降に $\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta} \log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}) \rceil$ より多くの実行可能基底解が生成されるならば，$x_{\bar{j}}$ は 0 となる．

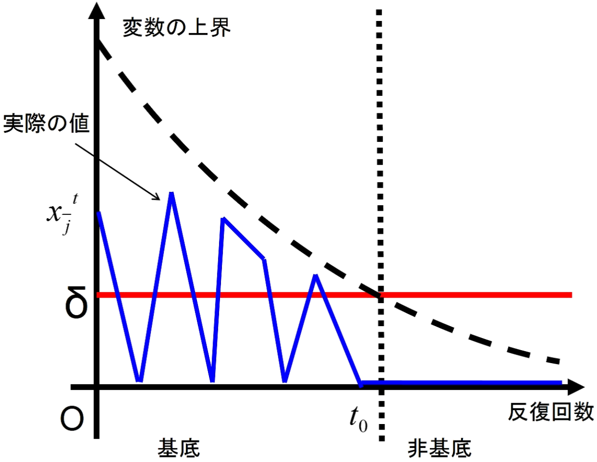
証明． $l \geq t+1$ に対して，$\tilde{l}$ を $t+1$ 反復目から l 反復目までに生成される異なる実行可能基底解の数とする．このとき，Lemma 3 より，ある添え字 $\bar{j} \in B^k$ が存在して，

$$x^l_{\bar{j}} \leq \min\{m, n-m\} \frac{c^T x^l - z^*}{c^T x^k - z^*} x^k_{\bar{j}}$$

を満たす．ここで，$x^k_{\bar{j}} \leq \gamma$ 及び Theorem 2 より

$$x^l_{\bar{j}} \leq \min\{m, n-m\}\gamma \left(1 - \frac{\delta}{\min\{m, n-m\}\gamma}\right)^{\tilde{l}}.$$

となる．従って，
$\tilde{l} > \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta} \log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta})$ ならば $x^l_{\bar{j}} < \delta$ となり，δ の定義から $x^l_{\bar{j}} = 0$ となる． □



$\boldsymbol{t}$ 反復と $\boldsymbol{l}$ 反復の間に生成される異なる実行可能基底解の数が $\mathbf{min}\{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\}\frac{\gamma}{\delta}\,\mathbf{log}(\mathbf{min}\{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\}\frac{\gamma}{\delta})$ よりも多いならば，$\boldsymbol{x}_{\bar{j}}^{l}=\mathbf{0}$ となる．

基底解の数の上界

補題 3.6 で述べられている事象は各変数について高々一度しか起こり，候補となる変数は双対問題の最適基底解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ で s_j^* が正となる j に対する x_j のみである．

Theorem

最適解をもつ *LP* に対して *Dantzig* の規則の単体法を適用すると，任意の目的関数 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ に対して，生成される異なる実行可能基底解の数は以下の数以下となる．

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil.$$

この結果は，巡回によって最適解が求まらない場合にも有効である．

主問題が非退化の場合

主問題が非退化であれば，任意の k で $x^{k+1} \neq x^k$ となる．よって，
(生成される実行可能基底解の数)=(反復回数).

Corollary

主問題が非退化であるならば，多くとも

$$(n-m)\left\lceil(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta})\right\rceil$$

回の反復回数で，単体法によって最適解を得られる．

Contents

4. 特殊な線形計画問題への適用

完全ユニモジュラ行列の場合

Corollary

$\boldsymbol{A}$ を完全ユニモジュラ行列とし，$\boldsymbol{b}$ を整数ベクトルとする．このとき，*Dantzig* の規則の単体法を適用すると，生成される異なる実行可能基底解の数は次の数以下である．

$$(n-m)\lceil \min\{m, n-m\}\|\boldsymbol{b}\|_1 \log(\min\{m, n-m\}\|\boldsymbol{b}\|_1)\rceil.$$

マルコフ決定問題

マルコフ決定問題：

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & c_1^T x_1 + c_2^T x_2, \\
\text{subject to} & (I - \theta P_1) x_1 + (I - \theta P_2) x_2 = e, \\
 & x_1, x_2 \geq 0,
\end{array}
$$

ここで P_1 と P_2 は $m \times m$ のマルコフ行列，θ は割引率であり，e は要素がすべて1のベクトルである．MDPに対して単体法を適用すると，多くとも

$$
m \left\lceil \frac{m^2}{1-\theta} \log \frac{m^2}{1-\theta} \right\rceil
$$

回の反復で最適解が求まる．

その他の話題

- 上下限制約付き線形計画問題への拡張
- 双対単体法が生成する異なる実行可能基底解の数の上界

Contents

5. 単体法で生成される解の最大数の下界

Klee-Minty問題の一変種

北原-水野 (2011)

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & \sum_{i=1}^{m} x_i \\
\text{subject to} & x_1 + y_1 = 1 \\
& 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k + y_k = 2^k - 1 \\
& (k = 2, 3, \dots, m) \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{array}
$$

問題の性質

- 実行可能基底解において，任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，x_i と y_i のうち丁度 1 つが基底変数になる．
- 2^m 個の実行可能基底解がある．
- 実行可能基底解の各要素は整数である．
- 非退化である．

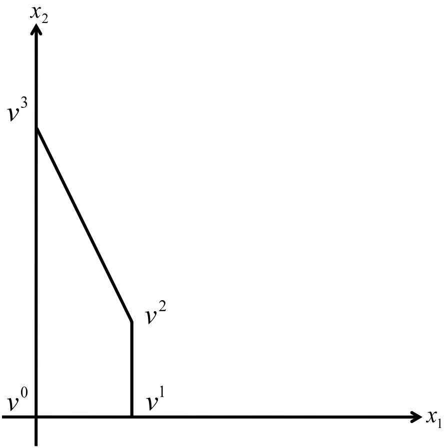
Dantzigの規則との関連

Theorem

$x = 0$ を初期点として問題に *Dantzig* の規則の単体法を適用するとき，以下のことが成り立つ．

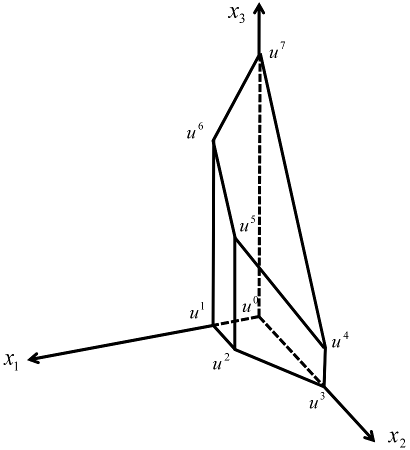
- 反復回数は $2^m - 1$ 回である．
- 全ての辞書において，縮約コストの要素は *1* か -1 である．
- 毎回の反復において目的関数は *1* だけ増加する．したがって，任意の整数 $k \in [0, 2^m - 1]$ に対して，目的関数値が k であるような実行可能基底解が丁度一つ存在する．

$m = 2$のとき



$\delta = 1$, $\gamma = 3$. 反復回数 $= 3 = \frac{\gamma}{\delta}$

$m = 3$ のとき



$\delta = 1$, $\gamma = 7$. 反復回数 $= 7 = \frac{\gamma}{\delta}$

Klee-Minty問題との比較

反復回数の上界：

$$(n-m)\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta})\rceil$$

	γ/δ	反復回数
Klee- Minty	$100^{(m-1)}$	$2^m - 1$
北原-水野	$2^m - 1$	$2^m - 1$

$\frac{\gamma}{\delta}$ より良い上界は得られない.

Contents

5. まとめ

問題，ピボット規則，仮定

- 問題：等式標準形の LP とその双対問題
- ピボット規則：
  1. Dantzig の規則 (最小係数規則)
- 仮定：
  1. $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$.
  2. 主問題は最適解を持つ.
  3. 初期実行可能解が得られている.

主結果

- 生成される実行可能基底解の個数の上界

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

  δ, γ：全ての実行可能基底解の正の要素の最小値, 最大値
- 上界の初等的な導出
- Klee-Minty 問題の変種：反復回数が $\frac{\gamma}{\delta}$.