

RIMS 共同研究「組み合わせ最適化セミナー」

# 単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム 演習問題

北原知就 (Tomonari KITAHARA), 水野 眞治 (Shinji MIZUNO)

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

2015 年 7 月 21 日

## 1 線形計画問題と単体法

1. 線形計画問題に等式なしの不等式制約を一般に扱わないのはなぜか.
2. 実行可能な最小化の線形計画問題が下に有界ならば, 最適解を持つのはなぜか.
3. 基本定理 II が成立しない線形計画問題の例 (もちろん標準形ではない) を示せ.
4. 等式制約のない標準形の LP に対して, 基本定理 II は成り立つか.
5.  $n$  次元ユークリッド空間の第 1 象限上の点を通る直線が必ず第 1 象限の境界と交わることを, LP の基本定理 II を使って説明せよ.
6. 主問題と双対問題がともに実行不能となる LP の例を示せ.
7. 退化した頂点の例を 2 次元の図を使って示せ. その図を使って, 単体法でピボット演算 (1 反復) を行うときに, 解が更新される場合と更新されない場合の違いを説明せよ.
8. 主問題の最適な基底解には, 双対実行可能な基底と不能な基底がある. 2 次元の例と図によって, 違いを示せ.
9. 基底解には, 主問題で退化している場合としていない場合, 双対問題で退化している場合としていない場合がある. 4 つの場合の例を作れ, あるいは図示せよ.
10. 単体法が巡回しない時, 退化した基底解でのピボット回数の上界としては何があるか.
11. 線形計画問題の退化した基底解の数の上界として何があるか.

## 2 単体法で生成される異なる基底解の数

1. 多面体を  $\alpha > 0$  だけ平行移動したら,  $\gamma/\delta$  が  $(\gamma + \alpha)/(\delta + \alpha)$  となり, 小さくなるのではないかというのは, 本当か?

2. 主問題 (14) が実行可能であるが、最適解を持たない場合に、Dantzig の規則の単体法で生成される実行可能基底解の数の上界を得ることは可能であるか、検討せよ.
3. 定理 3.3 を用いて、系 3.4 を証明せよ.  $x > -1$  に対して成り立つ近似式

$$\log(1+x) \leq x$$

を利用するとよい.

4. 主問題 (14) の係数行列  $\mathbf{A}$  が完全ユニモジュラ行列であり、定数ベクトル  $\mathbf{b}$  の各要素が整数である問題を考える. このとき、次の問に答えよ.
  - (i) 任意の基底解に対して、その各要素が整数となることを示せ.
  - (ii) 主問題 (14) の基底を  $B$  とするとき、 $\mathbf{A}_B^{-1}$  の各要素が  $1, 0, -1$  のいずれかであることを示せ.
  - (iii) (ii) を利用して、基底解の各要素の値は高々  $\|\mathbf{b}\|_1$  であることを示せ.
5. 状態数が  $m$  で行動数が 2 のマルコフ決定問題は次のように表される.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & (\mathbf{I} - \theta \mathbf{P}_1) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{I} - \theta \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_2 = \mathbf{e} \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\theta \in [0, 1)$ ,  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$  であり、 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  はマルコフ行列 (各列の要素の和が 1 となる) である. このとき、次の問に答えよ.

- (i) 任意の実行可能解  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  に対して、

$$\mathbf{e}^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{e}^T \mathbf{x}_2 = \frac{m}{1-\theta}$$

が成り立つことを示せ.

- (ii) 任意の実行可能基底解において、基底変数の値は 1 以上であることを示せ.
  - (iii) (i),(ii) を利用して、マルコフ決定問題に対して Dantzig の規則の単体法を適用したときの反復回数の上界を求めよ.
6.  $m = 3$  のときの Klee-Minty の線形計画問題の変種に対して Dantzig の規則の単体法を実行し、補題 3.14 が成り立つことを確認せよ.

### 3 強多項式アルゴリズムと単体法

1. 単体法は、TUM 行列の LP を多項式オーダーで解けるとは限らないが、Tardos の基本アルゴリズムを使うとなぜ強多項式となるのか.

2. 線形計画問題を解くときに、ベクトル  $\mathbf{b}$  のサイズが  $\mathbf{c}$  のサイズよりかなり大きい場合に、単体法と双対単体のどちらを使うとよいだろうか。
3. Tardos の基本アルゴリズムの考えを、補助問題として双対問題ではなく主問題を使う場合には、どのような違いがあるか。
4. 線形計画問題が非退化の仮定をみたさない時に、退化した基底解での反復回数の上界として何があるか。
5. 不等式  $\Delta_A \leq m!A_{\max}^m$  を示せ。
6. 不等式  $L_A \leq mn \log(A_{\max} + 1)$  を示せ。
7. 標準形の線形計画問題の目的関数の係数ベクトル  $\mathbf{c}$  を部分空間  $\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  に射影したベクトルを  $\mathbf{c}'$  とするとき、目的関数を  $\mathbf{c}'^T \mathbf{x}$  に変更しても最適解の集合が不変であることを示せ。
8. 上記の射影は、何のためにする必要があるのか。
9.  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の任意の基底解の成分が分数  $p/q$  ( $q \leq \Delta_A, p \leq \Delta_A \|\mathbf{b}\|_1$ ) とあらわされることを示せ。
10. アルゴリズム 4.1 のステップ 1 で  $\mathbf{c}'_K = \mathbf{0}$  となった時に、その LP の最適解を求めるには、どうすればよいか。
11. アルゴリズム 4.1 のステップ 2 で  $F = \emptyset$  ならば、元の双対問題が実行不能となることを示せ。
12. 部分行列式の最大値  $\Delta_A$  が  $n$  の多項式で抑えられる行列  $A$  として、TUM 以外にどんな行列があるか。