RIMS 共同研究「組み合わせ最適化セミナー」

単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム

北原知就 (Tomonari KITAHARA), 水野 眞治 (Shinji MIZUNO)

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

2015 年 7 月 21 日

概要

線形計画問題を解く単体法は，現実の大規模な問題を効率よく解くことができるが，理論的に効率的であるかどうか，すなわち多項式アルゴリズムであるかどうかはこれまでのところわかっていない．実際，Dantzig の規則をはじめとするさまざまなピボット規則を使った単体法に対して，入力データの次元の指数オーダーの計算量を必要とする例題が知られている．このように，理論と実際の計算効率性に大きな違いがある一つの理由として，計算時間を多く必要とする人工的な例題では，問題を表現するデータにかなり大きな値が使われているが，実際の問題ではそのような大きなデータが使われることがほとんどないことがあげられる．したがって，問題のデータにあまり大きくない整数のみが使われているような問題に対して，単体法の計算効率が良いといえるのではないかと考えられる．本論は，そのような方向での，単体法に関するひとつの研究の成果をまとめたものである．

目次

1 はじめに

線形計画問題を解く方法として，Dantzig[2] の提案した単体法，Khachiyan の楕円体法 [5]，Karmarkar の内点法 [4] がよく知られている．楕円体法と内点法は，入力データのサイズの多項式オーダーの計算量で問題を解くことのできる多項式アルゴリズムであるが，単体法については 多項式アルゴリズムであるかどうか不明である．実際，Dantzig の規則をはじめとするさまざまなピボット規則を使った単体法に対して，入力データの次元の指数オーダーの計算量を必要とする例題が知られている．これまでのところ，単体法は理論的に効率的な解法であると示されていないが，現実の大規模な問題を効率よく解くことができる．

このように，理論と実際の計算効率性に大きな違いがある一つの理由として，計算時間を多く必要とする人工的な例題では，問題を表現するデータにかなり大きな値が使われているが，実際の問題ではそのような大きなデータが使われることがほとんどないことがあげられる．したがって，問題のデータにあまり大きくない整数のみが使われているような問題に対して，単体法の計算効率が良いといえるのではないかと考えられる．本論は，そのような方向での，単体法に関するひとつの研究の成果をまとめたものである．

本論の構成は，次のようになっている．2 節では，線形計画問題と単体法について基本的な事柄をまとめている．とくに，線形計画問題の双対定理，辞書（基底形式表現），単体法について説明する．3 節では，線形計画問題を解く単体法で生成される異なる基底解の数の上界と下界に関する結果をまとめている．4 節では，Tardos の基本アルゴリズムに単体法を使うことによって，あるクラスの線形計画問題が入力次元の多項式の計算量で解けることに関する結果をまとめている．なお，定数，変数，集合等を表す記号について，節ごとに統一して使っているが，全体を通しては必ずしも統一されていないことに注意する．

2　線形計画問題と単体法

本節では，線形計画問題と単体法について，基礎的なことをまとめている．本節の内容は，Web 上のテキスト [14] を参考にしており，定理等の証明はすべてそこに記述されているので，ここでは割愛している．

2.1　線形計画問題

2.1.1　標準形の線形計画問題

標準形 (standard form) の線形計画問題は，自然数 n と m を使って

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T
\end{array}
$$

と表すことができる．ここで，添え字の集合 $\mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ と $\mathcal{N}_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ を導入すると，x_i $(i \in \mathcal{N}_n)$ が変数であり，b_j $(j \in \mathcal{N}_m)$, c_i $(i \in \mathcal{N}_n)$, a_{ij} $(i \in \mathcal{N}_n, j \in \mathcal{N}_m)$ はデータとして与えられる定数である．標準形の線形計画問題の特徴は，全ての変数に 0 以上という**非負条件** (nonnegative constraint) がつき，その他の制約が (不等式ではなく) 線形の等式で表され，線形の目的関数を最小化するところにある．

ベクトル

$$
\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

と行列

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

を使うと，標準形の線形計画問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{1}
$$

と表される．線形計画問題では，制約条件をすべてみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ を**実行可能解** (feasible solution)，実行可能解の中で目的関数を最適にするものを**最適解** (optimal solution)，そのときの目的関数の値を**最適値** (optimal value) という．また，実行可能解の集合

$$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

を**実行可能領域** (feasible region) という．$F \neq \emptyset$ のとき，線形計画問題が**実行可能**であるといい，$F = \emptyset$ のとき**実行不能**であるという．

2.1.2 実行可能性と最適解の存在

ここでは，線形計画問題の実行可能性と最適解に関する，重要で基本的な事柄を解説する．問題 (1) の実行可能領域を F とし，目的関数の取る値の集合

$$V = \{z | z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in F\} \tag{2}$$

を定義する．ここで，V は実数の集合であるが，次の 3 つの場合がある．

1. V は空集合である．
2. V は空集合ではなく，V に下界が存在しない．
3. V は空集合ではなく，V に下界が存在する．

1 番目の場合には，F も空集合なので，問題 (1) が実行不能な場合である．2 番目の場合には，実行可能であるが，最小化問題において目的関数値がいくらでも小さくなる実行可能解が存在するので，最適解が存在しない場合である．このとき，線形計画問題が**非有界**である，あるいは**無限解**をもつという．3 番目の場合には，次の基本定理 I に示されるように，最適解が存在する．

定理 2.1 (基本定理 I) 標準形の線形計画問題 (1) は，実行可能でかつ目的関数値に下界が存在するならば，最適解と最適値をもつ．

上の定理から，線形計画問題には 3 つの場合，すなわち

1. 実行不能な場合
2. 実行可能であるが，非有界であるため最適解が存在しない場合
3. 実行可能であり，最適解が存在する場合

があり，その他の場合 (実行可能で目的関数値に下界が存在するが，最適解が存在しない場合) は起こりえない．線形計画問題を解くということは，その問題が 3 つ場合のいずれ

であるか判定し，最適解を持つ場合には少なくとも 1 つの最適解を求める必要がある．

2.2 双対問題と双対定理

標準形の線形計画問題 (1) の**双対問題**は，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array} \tag{3}$$

と定義される．双対問題に対して，元の問題 (1) を**主問題**という．双対問題について，次の定理が成り立つ．

定理 2.2 双対問題 (3) の双対問題は，主問題 (1) と一致する．

この定理より，双対問題と主問題の間に成り立つ性質は，双対問題と主問題を入れ替えても成り立つ．

双対問題 (3) は，スラック変数を導入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

となる．弱双対定理を示す前に，簡単に導かれるが，重要な関係式を示す．

補題 2.3 $\boldsymbol{x}$ を主問題 (1) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ を双対問題 (4) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}$$

が成立する．

この補題から，次の**弱双対定理**がすぐに導かれる．

定理 2.4（弱双対定理 (weak duality theorem)） $\boldsymbol{x}$ を主問題 (1) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ を双対問題 (4) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立する．すなわち，主問題 (1) の目的関数値は，双対問題 (4) の目的関数値より常に大きいか等しい．

この定理より，主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ の目的関数値の差 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ は，常にゼロ以上である．この差を**双対ギャップ**という．弱双対定理は，

主問題と双対問題がともに実行可能であるときのみ意味があり，少なくとも一方が実行不能な場合には，特に何も言っていない．しかし，線形計画問題には，最適解をもつ，非有界，実行不能の 3 つの場合のみがあることを使えば，弱双対定理より，次のような興味深い結果を導くことができる．

系 2.5 線形計画問題の主問題 (1) と双対問題 (4) について，次のことが成り立つ．

1. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，主問題の実行可能解での目的関数値は，双対問題の最適値の上界となる．
2. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，それぞれ最適解をもつ．
3. 主問題が実行可能で非有界ならば，双対問題は実行不能である．
4. 主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ での目的関数値と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ での目的関数値が一致 ($\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$) すれば，$\boldsymbol{x}^*$ と $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ はそれぞれの問題の最適解である．

この系の最後の結果は，主問題と双対問題の目的関数値が等しければ，それぞれ最適解であることを述べている．しかし，その逆，それぞれが最適解を持つときに最適値が等しいことまでは主張していない．次の**双対定理**は，このことが成り立つことも示しており，強力な結果である．

定理 2.6（双対定理 (duality theorem)） 線形計画問題 (1) が最適解をもつならば，双対問題 (3) も最適解をもち，その最適値は等しい．

双対定理は，次の二つのことを主張している．

1. 主問題が最適解をもつならば，双対問題も最適解をもつ．
2. 上記の時に，主問題の最適値と双対問題の最適値は等しい

双対定理として，後半の結果はよく知られているが，前半の結果も大変重要である．この前半の結果と弱双対定理から，次の系が得られる．

系 2.7 主問題と双対問題についての次の 4 つの条件はすべて同値である．

1. 主問題は最適解をもつ．
2. 双対問題は最適解をもつ．
3. 主問題と双対問題はともに最適解を持つ．
4. 主問題と双対問題はともに実行可能である．

次の結果は，線形計画問題の最適解であるための必要十分条件を示している．

系 2.8 $\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ が双対問題の最適解ならば，

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} = 0$

が成立する．逆に，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ が上の 3 つの条件をみたすならば，$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ が双対問題の最適解である．

次の系のように，線形計画問題の実行可能解が最適であるための条件をさまざまな形で述べることができる．

系 2.9 $\boldsymbol{x}$ を主問題の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ を双対問題の実行可能解とすれば，次の 4 つの条件はすべて同値である．

1. それぞれ最適解である．
2. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ である．
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ である．
4. すべての $i \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x_i z_i = 0$ である．

上の 4 番目の条件は，すべての $i \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x_i = 0$ または $z_i = 0$ と同値である．これを**相補性条件** (complementarity condition) または**相補スラック条件** (complementary slackness condition) という．

以上のことから，主問題を解く代わりに双対問題を解いたとすれば，主問題について次のようなことがいえる．

1. 双対問題が最適解をもてば，主問題も最適解をもつ．
2. 双対問題が非有界ならば，主問題は実行不能である．
3. 双対問題が実行不能ならば，主問題は実行不能であるか，あるいは非有界である．

また，単体法で主問題あるいは双対問題を解き，その最適解が得られた場合には，同時に他方の問題の最適解も得ることができる．

2.3 基底解と辞書（基底形式表現）

2.3.1 線形方程式系の基底解

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ からなる，m 本の線形方程式系を

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{5}$$

とする．ベクトル

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i \in \mathcal{N}_n),\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を使うと，線形方程式系 (5) は，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$$

と表せる．n 個の m 次ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ を横に並べた $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}$ とすれば，この線形方程式系は，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と記述することもできる．以下，次の仮定をおく．

仮定 2.10 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

この仮定から，$m \leq n$ である．変数の数 n が等式の数 m 以上であるので，この線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす解は，一般に数多くある．行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるという仮定より，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ から一次独立な m 個の基底ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ を選ぶことができる．ここで選んだベクトルの添え字の集合を $I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ とし，選ばれなかった $n-m$ 個のベクトルの添え字の集合を $I_N = \{i_{m+1}, i_{m+2}, \cdots, i_n\}$ とする．また，

$$\boldsymbol{A}_B = (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}),\ \boldsymbol{A}_N = (\boldsymbol{a}_{i_{m+1}}, \boldsymbol{a}_{i_{m+2}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_n}),$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_{i_{m+1}} \\ x_{i_{m+2}} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}$$

とすれば，線形方程式系 (5) は，

$$\sum_{i\in I_B} x_i\boldsymbol{a}_i + \sum_{i\in I_N} x_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

あるいは

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \tag{7}$$

と表すことができる．この行列 $\boldsymbol{A}_B$ は，一次独立な m 個の m 次ベクトルを並べた $m\times m$ 行列であるから，正則であり，逆行列をもつ．行列 $\boldsymbol{A}_B$ を**基底行列**あるいは単に**基底**という．(7) より，$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ は，上の線形方程式系の 1 つの解となる．この解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形方程式系 (5) の**基底解**という．また，$\boldsymbol{x}_B$ の要素となっている x_i $(i\in I_B)$ を**基底変数**，$\boldsymbol{x}_N$ の要素となっている x_i $(i\in I_N)$ を**非基底変数**という．この過程において，一次独立なベクトルの選び方は，n 個から m 個選ぶ組み合わせの数 ${}_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ だけありえるので，基底行列あるいは基底解の数も最大 ${}_nC_m$ 個ある．

補足説明 2.11　本論では，ベクトル $\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N$ は列ベクトルであり，列ベクトル $(\boldsymbol{x}_B^T, \boldsymbol{x}_N^T)^T$ を紙面の都合により単に $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ と表している．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ では要素の順が異なっており，等号 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ は，順に要素が等しいという意味ではなく，それぞれ対応する添え字の要素が等しいという意味で使われている．

基底解の各要素については，次のクラメルの法則を使うと行列式を使って表現できる．

補題 2.12　$\boldsymbol{D}$ を正則な $m\times m$ 行列とする．このとき，線形方程式系 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の第 i 要素 $(i\in\{1,2,\cdots,m\})$ は，

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{D}}$$

と表現できる．ここで，$\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{b})$ は行列 $\boldsymbol{D}$ の第 i 列を $\boldsymbol{b}$ と入れ替えた $m\times m$ 行列である．

2.3.2　標準形の線形計画問題の基底解

この節では，標準形の線形計画問題 (1) を扱う．方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は，非負条件 $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$ をみたすとき，この線形計画問題の実行可能解であるので，**実行可能基底解**と呼ばれる．さらに，それが線形計画問題の最適解となっているならば，**最適基底解**と呼ばれる．また，$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ の要素がすべて 0 でないとき**非退化の基底解**といい，0 となっている要素があるとき**退化した基底解**と

いう．すべての基底解が非退化であるとき，その**線形計画問題が非退化**であるという．実行可能基底解あるいは最適基底解の存在について，次の基本定理 II が知られている．

定理 2.13 (基本定理 II) 標準形の線形計画問題 (1) において，$m \times n$ 係数行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるとき

1. 実行可能解が存在するならば，実行可能基底解が存在する．
2. 最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．

2.3.3 双対問題の基底解

標準形の線形計画問題 (1) の双対問題は，(3) によって定義されている．行列 $\boldsymbol{A}$ の基底行列を $\boldsymbol{A}_B$ とし，ベクトル $\boldsymbol{c}$ の基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_B$，非基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_N$ とし，同様にベクトル $\boldsymbol{s}$ の部分ベクトル $\boldsymbol{s}_B$ と $\boldsymbol{s}_N$ を定義する．このとき，双対問題 (3) は，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_B^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{c}_B \\
& \boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N \\
& \boldsymbol{s}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

とあらわすことができる．ここで $\boldsymbol{A}_B$ が正則行列であるので，

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$$

は，問題の中の等式条件 $\boldsymbol{A}_B^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N$ をみたす．この解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における**双対問題の基底解**という．この解は，実行可能 $(\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0})$ であれば**実行可能基底解**，さらに最適であれば**最適基底解**と呼ばれる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ の成分がすべて 0 でないならば**非退化の基底解**といい，0 の要素があれば**退化した基底解**という．すべての基底解が非退化であれば**双対問題が非退化**であるという．

同じ基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における主問題の基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ と双対問題の基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$，$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ では，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立しているので，それぞれの目的関数値が等しい．したがって，それらが共に実行可能解であるならば，弱双対定理より，それぞれの問題の最適解となる．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 2.14 標準形の線形計画問題 (1) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は

$$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0}$$

をみたすならば，(1) の最適解である．このとき，双対問題 (3) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ も (3) の最適解となっている．

この定理は基底解が最適解であるための十分条件を示しており，単体法により生成される基底解が最適解であるかどうかの判定に使うことができる．

2.3.4 線形計画問題の辞書 (基底形式表現)

本節では，線形計画問題の辞書とその更新について解説する．標準形の線形計画問題 (1) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

である．行列 $\boldsymbol{A}$ から基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ を選ぶと，(7) のように等式条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

とあらわすことができる．行列 $\boldsymbol{A}_B$ が正則であるので，この式は

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N$$

と変形できる．これを目的関数に代入すると

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

がえられる．したがって，線形計画問題 (1) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{8}$$

と変形できる．これを，基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形計画問題 (1) の**辞書**あるいは**基底形式表現**という．この辞書から主問題の基底解 $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ と，そのときの目的関数値 $\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ を簡単に得ることができる．また，目的関数の係数から，双対問題の基底解の一部 $\boldsymbol{s}_N^T = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$ も得られ，そのときの $\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}$ も計算式の一部にあり，実質的に得られている．そして，定理 2.14 より，次の結果が得られる．

系 2.15　辞書 (8) において，等式右辺の定数項ベクトル $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ ならびに目的関数における非基底変数の係数ベクトル $(\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{A}_N)$ のすべての要素が 0 以上ならば，基底解 $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は，線形計画問題 (1) の最適解である．また，対応する双対問題の基底解も最適解である．

この系の条件をみたすとき，辞書 (8) を主双対最適な辞書と呼ぶ．主双対最適な辞書を見つければ，主問題と双対問題の最適解を同時に求めることができる．単体法は，主双対最適な辞書を見つける方法である．

2.3.5　辞書の更新

標準形の線形計画問題 (1) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における辞書 (8) を実際に計算したところ

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega_0' + c_{i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} + \cdots + c_{i_n}' x_{i_n} \\ \text{制約条件} & x_{i_1} = b_{i_1}' - a_{i_1 i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_1 i_n}' x_{i_n} \\ & \vdots \\ & x_{i_m} = b_{i_m}' - a_{i_m i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_m i_n}' x_{i_n} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \boldsymbol{0}. \end{array} \tag{9}$$

となっているとする．ここで，$I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ が基底変数の添え字の集合であり，$I_N = \{i_{m+1}, i_{m+2}, \cdots, i_n\}$ が非基底変数の添え字の集合である．

基底変数の 1 つと非基底変数の 1 つを交換することを考える．すなわち，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ をそれぞれ 1 つずつ選んで，x_s を新しく基底変数とし，x_r を非基底変数とする辞書と基底解を求める．

定理 2.16　辞書 (9) において $a_{rs}' \neq 0$ であるならば，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解が存在する．また，$a_{rs}' = 0$ であるならば，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解は存在しない（ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}\}$ から $\boldsymbol{a}_r$ を除き，$\boldsymbol{a}_s$ を加えると一次従属となる）．

この新しい基底解に対する辞書は，元の線形計画問題から定義に従い計算することも可能である．しかし，その方法では多くの計算量を必要とするので，すでに求められている辞書 (9) から簡単に計算する方法を説明する．辞書 (9) における基底変数 x_r についての等式制約を

$$x_r = b_r' - a_{r i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{rs}' x_s - \cdots - a_{r i_n}' x_{i_n} \tag{10}$$

とする．$a_{rs}' \neq 0$ であるので，x_s を含む項を左辺に移動し，x_r の項を右辺に移動した後

に，両辺を a'_{rs} で割ることにより

$$x_s = \frac{b'_r}{a'_{rs}} - \frac{a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}} x_{i_{m+1}} - \cdots - \frac{1}{a'_{rs}} x_r - \cdots - \frac{a'_{ri_n}}{a'_{rs}} x_{i_n} \tag{11}$$

が得られる．辞書 (9) における等式制約 (10) を上の等式制約 (11) に入れ替え，その他の制約式と目的関数の x_s に式 (11) を代入することにより新しい辞書ができる．たとえば，目的関数は

$$\begin{aligned}
&\omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_s x_s + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\
&= \left(\omega'_0 + \frac{c'_s b'_r}{a'_{rs}}\right) + \left(c'_{i_{m+1}} - \frac{c'_s a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}}\right) x_{i_{m+1}} + \cdots \\
&\qquad - \frac{c'_s}{a'_{rs}} x_r + \cdots + \left(c'_{i_n} - \frac{c'_s a'_{ri_n}}{a'_{rs}}\right) x_{i_n}
\end{aligned}$$

と計算でき，その他の等式制約も同様にできる．この結果，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解における新しい辞書が計算できる．

2.4 単体法

2.4.1 主単体法のアルゴリズム

定理 2.13 より，標準形の線形計画問題に最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．（より正確には，主双対最適な基底解が存在するかどうかは，定理 2.13 からだけでは不明である．）したがって，最適解を求める一つの方法として，基底解のみを対象として，最適基底解を求めることが考えられる．単体法はそのような方法であり，基底解の更新の仕方により，いくつかの種類がある．主単体法は，主問題の実行可能基底解のみを対象として更新することにより，最適基底解を求めようとする方法である．

線形計画問題に最適解が存在するとき，異なる基底解を次々に生成することができれば，有限回で最適基底解を見つけることができる．しかし，無意味に基底解を生成したのでは，効率よく最適解を求められるとはいえない．そこで，主単体法では，はじめに一つの実行可能基底解と辞書が求められているとき，各反復で，2.3.5 節で示したようにひと組の基底変数と非基底変数を入れ替えることにより，新しい基底解と辞書を効率よく計算する．このとき，さらに次の 2 点が保証されるように基底解を更新する．

1. 各反復で生成される基底解は，主問題の実行可能基底解である．
2. 各反復で生成される基底解での主問題の目的関数値が増加しない．

この 2 つの性質が，主単体法の特徴であり，他の単体法との違いである．

主単体法の反復において，標準形の線形計画問題の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における実行可能基底解とそのときの辞書

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\
\text{制約条件} & x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_1 i_n} x_{i_n} \\
& \vdots \\
& x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_m i_n} x_{i_n} \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{12}
$$

が得られているものとする．基底解が実行可能なので，$b'_{i_k} \geq 0$ $(i_k \in I_B)$ が成り立っている．定理 2.14 より，実行可能基底解において，

$$
\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B \geq \mathbf{0}
$$

が成り立っていれば，それは最適基底解である．すなわち，上の辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られる．この場合には，主単体法を終える．さもなければ，$c'_{i_k} < 0$ となる $i_k \in I_N$ が存在するので，そのような添字 $s \in I_N$ を定める．$c'_s < 0$ であるので，変数 x_s を 0 から増加させれば，目的関数が減少する．実際，上の辞書から，他の非基底変数の値を 0 のまま，x_s のみを変化させると，目的関数値は，

$$
\omega'_0 + c'_s x_s
$$

と変化し，基底変数は，等式制約 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすために，

$$
\begin{array}{l}
x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 s} x_s \\
\vdots \\
x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m s} x_s
\end{array}
$$

と変化する．このように変化させた解が実行可能解であるためには，上の基底変数の値が 0 以上でなければならないので，変数 x_s の値を

$$
x_s^* = \sup \left\{ x_s | x_{i_k} = b'_{i_k} - a'_{i_k s} x_s \geq 0,\ \forall i_k \in I_B \right\}
$$

以下とする必要がある．もしすべての $i \in I_B$ に対して $a'_{is} \leq 0$ であるならば，この $x_s^* = \infty$ となる．すなわち，任意の $x_s \geq 0$ に対して，実行可能解が得られることになり，目的関数値 $\omega'_0 + c'_s x_s$ に下界が存在しないので，問題が非有界であることが判明する．この場合には，主単体法を終える．さもなければ，$a'_{is} > 0$ となる $i \in I_B$ が存在し，x_s^* の

値が有限である．$x_s = x_s^*$ において 0 となる基底変数が存在するので，それを x_r とする，あるいは，同じことであるが

$$\min\left\{\frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}}\middle| a'_{i_k s} > 0,\ i_k \in I_B\right\}$$

を達成する添字 $i_k \in I_B$ を r とする．このようにして定めた変数 x_r を基底から出すことにより，次に得られる基底解も実行可能となる．なお，このような添え字 r が複数存在する場合には，その中の一つを選ぶことになる．

以上のことから，現在の基底変数の集合から，x_s を基底に入れ，x_r を基底から出すことにより，新しい基底変数の集合を定め，2.3.5 節の方法により辞書を更新する．主単体法では，最適基底解が求まるか，問題が非有界であることが判明するまで，上記の操作を繰り返す．

アルゴリズム 2.17 初期実行可能基底解が既知の場合の主単体法は，次のようなステップから成る．

ステップ 0 初期実行可能基底解に対して，辞書 (12) を求める．

ステップ 1 辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られているので，終了する．

ステップ 2 非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ が負となる変数の添え字 $s \in I_N(c'_s < 0)$ を 1 つ選ぶ．

ステップ 3 すべての $i_k \in I_B$ に対して $a'_{i_k s} \leq 0$ であるならば，問題が非有界であるので，終了する．

ステップ 4 $a'_{i_k s} > 0$ である添え字 $i_k \in I_B$ のなかで，$\frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}}$ を最小とする添え字 $r \in I_B$ を定める．

ステップ 5 x_s を基底に入れ，x_r を基底から出し，2.3.5 節の方法により辞書を更新し，ステップ 1 へ戻る．

主単体法では，次の 3 つの場合が起こりえる．

1. 最適解を得る．
2. 問題が非有界であることが判明する．
3. 無限に繰り返される．

基底変数の組の数は有限であるので，3 番目の場合には，同じ辞書が 2 度以上現れる．これを**巡回現象**という．ここで，次の仮定をおく．

仮定 2.18（非退化の仮定） 線形計画問題 (1) の任意の実行可能基底解で基底変数の値が正である (0 でない).

この仮定のもとでは，主単体法で基底解を更新するときに，目的関数値が必ず減少する．基底解の数が有限なので，次の結果が得られる．

定理 2.19 仮定 2.18 を満たし，初期実行可能基底解が得られている線形計画問題 (1) に主単体法を適用すれば，各反復で目的関数値が必ず減少し，有限回の反復で最適解を得るか，非有界であることが判明する．

退化している場合には，巡回現象を起こさない工夫が必要である．また，初期の実行可能基底解が簡単に得られない場合には，2 段階単体法などを使う必要がある．

2.4.2 単体法のピボット規則と巡回

前節で説明した単体法のアルゴリズム 2.17 では，次のようなことに注意すべきである．

基底に入る変数の選択の問題: ステップ 2 において，係数が負となる非基底変数が複数あるとき，基底に入る変数をどのように選ぶか．

基底から出る変数の選択の問題: ステップ 4 において，比 $\frac{b'_i}{a'_{is}}$ を最小とする添え字が複数あるとき，基底から出る変数をどのように選ぶか．

基底解が更新されない場合の問題: 基底と辞書を更新しても，基底解が変化しないことがある．

巡回の問題: 同じ辞書が 2 回以上現れることがある．

単体法において，基底に入る変数と出る変数の決め方をピボット規則という．ピボット規則には，様々なものが提案されており，例えば次のような規則がある．

最小係数規則 (Dantzig の規則): 辞書 (12) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で，その係数が最も小さな (絶対値が最も大きな) 変数を選ぶ．

最良改善規則 (最小目的関数規則): 更新した基底解における目的関数値の改善が最大，すなわち目的関数値が最小となるような変数を選ぶ．

最小添え字規則: 辞書 (12) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で，添え字が最も小さな変数を選ぶ．

ランダム規則: 辞書 (12) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で，ランダムに一つ選ぶ．

最小係数規則あるいは最良改善規則において，最小あるいは最大となる変数が 2 つ以上存在する場合には，その中で最小添え字の変数を選ぶ，あるいはランダムに選ぶ方法などがある．使う規則により，単体法の反復回数が大きく変わることがあるが，問題によって差が激しいため，一般にどの規則が最も良いかについて，言及することは難しい．基底から出る変数を選ぶときにも，候補となる変数が複数ある場合には，その中で最小添え字の変数あるいはランダムに選ぶ方法などがある．

一般に，基底変数の集合 (基底) が異なれば，基底解が異なり，目的関数値も異なると思われるかもしれない．しかし，基底が異なっても同じ基底解が得られることもある．このような基底解は，退化しているといわれる．線形計画問題は，退化した実行可能基底解が一つでも存在するとき，退化しているといわれる．退化した基底解は，基底変数の中に値がゼロとなるものが存在する．退化には，主問題の基底解の退化と双対問題の基底解の退化の 2 種類がある．そして，同じ基底において，主問題と双対問題の基底解がとも退化していることもありうる．主単体法では，主問題の基底解が退化しているときに，基底を更新しても基底解が変わらないことがある．

単体法で次々に基底を更新しているときに，基底解が変わらないと，何回か繰り返した後に，同じ基底が再度現れることがある．基底に出入りする変数を同じ規則で選んでいる場合には，一旦同じ基底が現れると，そのあとは同じ基底の列を何度も生成することになる．この現象を単体法の巡回 (cycling) という．巡回に入ると，単体法により同じ基底解の列が生成され続けるので，問題を解くことに失敗する．

3　単体法で生成される異なる基底解の数

前節で説明した単体法は，線形計画問題を解く最も基本的な解法であり，多くの大規模な現実問題を実際に効率よく解くことができる．しかし，理論的には，楕円体法 [5] あるいは内点法 [4] のように計算量 (あるいは反復回数) が入力データの多項式でおさえられる解法であるとはいえていない．さらに，いくつかのピボット規則には，入力データの指数の大きさの反復を必要とする例題の存在が知られている．特によく知られたそのような例題として，Klee-Minty [12] の線形計画問題がある．

単体法の計算量あるいは反復回数を測る上で，退化と巡回についてよく理解しておく必要がある．単体法は，線形計画問題が退化していると，同じ解で複数の基底を何度も生成することがあり，さらに巡回を起こし，無限に繰り返す可能性がある．したがって，問題に非退化の仮定をしなければ，反復回数を見積もることが非常に難しい．本節では，線形計画問題に非退化の仮定をしない．その代り，単体法の反復回数ではなく，単体法によっ

て生成される異なった解の数について調べる．問題が退化していなければ，反復回数と生成される異なった解の数は等しいが，一般には反復回数の方が多くなる．また，生成される異なる解の数は，基底の数以下であるので，巡回を起こし反復回数が無限になったとしても，必ず有限である．

本節では，ピボットに Dantzig の規則（最小係数規則）を使った単体法を主に扱う．Kitahara and Mizuno [11] は，マルコフ決定問題に対する Ye [17] の結果を一般の標準形の線形計画問題に拡張した．そして，線形計画問題を初期の実行可能基底解から単体法で解くとき，生成される異なった（実行可能基底）解の数が，多くとも

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

あるいは，より単純に

$$n\left\lceil m\frac{\gamma}{\delta}\log\left(m\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil \tag{13}$$

となることを示した．ここで，m は等式制約の数，n は変数の数，δ と γ はそれぞれすべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値と最大値を表わし，実数 $a \in \Re$ に対して $\lceil a \rceil$ は a より大きい最小の整数を表わす．もし線形計画問題が非退化ならば，これは反復回数の上界にもなる．また，この上界は，線形計画問題の制約条件のみに依存し，目的関数とは無関係である．この結果より，現実の大規模な問題において，比 γ/δ があまり大きくならなければ，単体法の反復回数もそれほど多くはならないと考えられる．

Kitahara, Matsui, and Mizuno [6] と Kitahara and Mizuno [9] では，標準形の線形計画問題だけでなく，変数の上限制約をもつ線形計画問題あるいは双対問題に対しても，同様に上界を得ることができることを示した．また，得られた結果を，$0-1$ 頂点からなる線形計画問題，ネットワーク計画問題，完全ユニモジュラ (Totally unimodular) 行列の線形計画問題，マルコフ決定問題 (Markov decision problem) などに適用することにより，これらの問題を単体法で解くときに，生成される解が多くならないことを示した．

上に示した上界が実際の問題に対してどれほど良いものか疑問を抱くかもしれない．この上界は，δ と γ の比 γ/δ に大きく依存している．Kitahara and Mizuno [7, 8] は，Klee-Minty の単純な変種を構築することにより，実際に生成される解の数が γ/δ に一致する例があることを示した．したがって，生成される解の数の上界として γ/δ よりよいものを得ることができないことがわかる．この意味で，比 γ/δ が大きいとき，上記の (13) は，かなり良い上界を与えているといえる．

3.1 節では，単体法について簡単に復習してから，Kitahara and Mizuno [11] による上界について説明する．3.2 節では，Kitahara, Matsui, and Mizuno [6] と Kitahara and

Mizuno [9] に従い，変数の上限制約をもつ線形計画問題あるいは双対問題に対する結果を示す．3.3 節では，$0-1$ 頂点からなる線形計画問題，最短路問題，完全ユニモジュラ (Totally unimodular) 行列の線形計画問題などに適用した場合の結果を示し，最後に 3.4 節で Kitahara and Mizuno [7, 8] による下界に関する結果をまとめる．本節の内容は，論文 [10] に加筆と適宜修正等を加え，コンパクトにまとめたものである．

3.1 単体法によって生成される解の数の上界

3.1.1 単体法について

標準形の線形計画問題を再掲すると，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0} \end{array} \tag{14}$$

であり，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\ge\boldsymbol{0} \end{array} \tag{15}$$

となる．これらの問題に対して，本節を通して，次の仮定を置く．

仮定 3.1 (i) 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクは m である．

(ii) 主問題 (14) は最適解をもつ．このとき，双対定理より双対問題 (15) も最適解をもつ．

(iii) 主問題の初期の実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ が既知である．

主問題の最適基底解を $\boldsymbol{x}^*$，双対問題の最適基底解を $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{s}^*)$ とし，主問題の最適値を z^* とする．双対定理より，双対問題の最適値も z^* となる．

任意の基底 B と非基底 $N=\{1,2,\dots,n\}-B$ に対して，主問題 (14) の辞書は，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^{-1})^T\boldsymbol{c}_B)^T\boldsymbol{x}_N, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N, \\ & \boldsymbol{x}_B\ge\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_N\ge\boldsymbol{0} \end{array}$$

となり，基底解は，

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$$

となる．また，双対問題の辞書は，

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B-\boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B-(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ & \boldsymbol{s}_N=(\boldsymbol{c}_N-\boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)+\boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{s}_B, \\ & \boldsymbol{s}_B\ge\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N\ge\boldsymbol{0} \end{array}$$

となり，基底解は

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$$

となる．

主問題のすべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値を δ，最大値を γ とする．このとき，任意の実行可能基底解 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)^T$ と任意の添え字 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$\delta \le \hat{x}_j \le \gamma \text{ if } \hat{x}_j \ne 0 \tag{16}$$

が成立する．ここで，δ と γ の値は，実行可能領域を定める $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ に依存して決まり，目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ には無関係である．

単体法により，初期実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ より実行可能基底解の列 $\{\boldsymbol{x}^t | t = 1, 2, \cdots\}$ と基底の列 $\{B^t | t = 1, 2, \cdots\}$ を生成したとする．t 番目の基底 B^t に対して，$N^t = \{1, 2, \ldots, n\} - B^t$ を非基底とし，$\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t} = \boldsymbol{c}_{N^t} - \boldsymbol{A}_{N^t}^T(\boldsymbol{A}_{B^t}^{-1})^T\boldsymbol{c}_{B^t}$ とすれば，主問題の辞書は

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \boldsymbol{c}_{B^t}^T\boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}^T\boldsymbol{x}_{N^t}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}_{B^t} = \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{B^t}^{-1}\boldsymbol{A}_{N^t}\boldsymbol{x}_{N^t}, \\ & \boldsymbol{x}_{B^t} \ge \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_{N^t} \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{17}$$

と表わされる．もし，$\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t} \ge \boldsymbol{0}$ が成立するならば，現在の基底解 $\boldsymbol{x}^t$ は最適解となる．さもなければ，単体法では，基底に新しく入る変数と出る変数を定めてピボット演算を行うことにより，新しい基底解を得る．新しく基底に入る変数を定めるのに，いくつかの規則があり，たとえば，最小係数規則 (Dantzig の規則)，最良改善規則，最小添え字規則などがある．Dantzig の規則を使う場合には，縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の要素で最小となる添え字，すなわち

$$j^t \in \arg\min_{j \in N^t} \bar{c}_j$$

に対する変数 x_{j^t} を選ぶ．このときの縮約コストの絶対値を

$$\Delta^t = -\bar{c}_{j^t}$$

とする．最良改善規則では，隣り合う基底解の中で目的関数値が最小となるように基底に入る変数を選ぶ．主単体法では，基底に入る変数が決まったら，問題 (14) の実行可能基底解が得られるように，基底から出る変数を定める．

退化した線形計画問題に対して単体法を適用する場合，ピボット規則によっては同じ解が生成され続ける巡回と呼ばれる現象が起こり得る．たとえば，Dantzig の規則では，巡回が起こりうるが，最小係数規則では巡回が起こらず，有限回の反復でアルゴリズムが終了する．

3.1.2　単体法によって生成される解の数の上界

本節の内容は，Ye [17], Kitahara and Mizuno [11], Kitahara, Matsui, and Mizuno [6] に基づいている．ここで述べられている定理，補題等の証明は，それらの文献などに掲載されている．

まずはじめに，任意の最適でない実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^t$ において，線形計画問題 (14) の最適値の下界と縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の最小値の絶対値 Δ^t の下界が得られることを示す．

補題 3.2　([6, 11]) 線形計画問題 (14) の最適値を z^* とし，最適でない任意の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$ とし，辞書における縮約コストベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}_{N^t}$ の最小値の絶対値 $-\min_{j\in N}\bar{c}^t_j$ を Δ^t とすれば，不等式

$$z^* \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t - \min\{n-m, m\}\Delta^t\gamma$$

および

$$\Delta^t \geq \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t - z^*}{\min\{n-m, m\}\gamma}$$

が成り立つ．

つぎに，上の補題を使うと，Dantzig の規則を使った単体法で基底解が更新される場合には，目的関数値と最適値の差（ギャップ）がある一定の割合で減少することを示す．また，その減少率は，目的関数の係数 $\boldsymbol{c}$ に無関係である．

定理 3.3　(Theorem 1 in [11] and Theorem 3.1 in [6]) Dantzig の規則を使った単体法で生成される t 番目の基底解と $(t+1)$ 番目の基底解をそれぞれ $\boldsymbol{x}^t$ と $\boldsymbol{x}^{t+1}$ とする．もし，$\boldsymbol{x}^{t+1} \neq \boldsymbol{x}^t$ であるならば，不等式

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{t+1} - z^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{\min\{n-m, m\}\gamma}\right)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t - z^*) \tag{18}$$

が成立する．

上の定理より，単体法で生成される異なる解の数の上界が次のように得られる．

系 3.4　(Corollary 3.1 in [6]) 線形計画問題の 2 番目に目的関数値が小さい，すなわち最適解を除いて目的関数値が最も小さい実行可能基底解を $\bar{\boldsymbol{x}}$ とする．初期の実行可能基底解 $\boldsymbol{x}^0$ から，Dantzig の規則を使った単体法により基底解の列を生成するとき，生成され

る異なった解の数は，高々

$$\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 - z^*}{\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} - z^*}\right)\right\rceil \tag{19}$$

である．ここで，実数 a に対して，$\lceil a \rceil$ は a より大きい最小の整数を表している．

上の系で得られる上界 (19) は，目的関数に依存している．初期解での目的関数値と最適値のギャップと，2 番目に小さい基底解での目的関数値と最適値のギャップの比が小さい場合には，これがよい上界となる．しかし，制約式には大きな係数がないが，目的関数に大きな係数があるような問題では，この上界が大きな値となってしまう可能性がある．そこで，以下の議論では，目的関数に依存しない上界を得る．次の補題では，最適でない実行可能基底解において，基底変数の中に最適値とのギャップに比例した上界をもつ変数が存在することを示す．

補題 3.5 (Lemma 2 in [11]) 主問題の最適ではない任意の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$ とし，その基底を B^t とする．このとき，ある基底変数 $x_{\bar{j}}$ ($\bar{j} \in B^t$) が存在し，$x_{\bar{j}}^t > 0$，$s_{\bar{j}}^* > 0$，かつ任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}^k$ において

$$x_{\bar{j}}^k \le \min\{m, n-m\}\frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - z^*}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^t - z^*}x_{\bar{j}}^t$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{s}^*$ は双対問題の最適基底解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ のスラックベクトルである．

上の補題により，最適でない基底解では，基底変数の中に最適値とのギャップに比例した上界をもつ変数が存在する．そのような変数は，ギャップが十分小さい実行可能基底解において値が δ より小さくなる．基底変数の値が δ より小さいということはゼロとなることを意味するので，定理 3.3 の結果と組み合わせることにより，次の結果を得ることができる．

補題 3.6 (Lemma 3 in [11] and Lemma 3.1 in [6]) Dantzig の規則を使った単体法で生成される t 番目の実行可能基底解を $\boldsymbol{x}^t$，そのときの基底を B^t とする．これが最適解でないならば，ある $\bar{j} \in B^t$ に対して，$x_{\bar{j}}^t > 0$ かつ $s_{\bar{j}}^* > 0$ となり，さらに単体法により，この基底解から

$$\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

以上の異なった解が生成されたとすれば，変数 $x_{\bar{j}}$ の値はゼロとなり，その後もゼロのままである．

上の補題で述べたような，ある変数の値が，ある基底解において正の値を取り，一定の反復後に値が 0 になりその後もゼロであるというようなイベントは，各変数 x_j ($j \in \{1, 2, \cdots, n\}$) について高々 1 回のみ起こり，候補となる変数は双対問題の最適基底解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{s}^*)$ で s_j^* が正となる j に対する x_j のみである．そのような変数は高々 $(n-m)$ 個であるので，次の定理が得られる．

定理 3.7 (Theorem 3.2 in [6]) 初期点 $\boldsymbol{x}^0$ から Dantzig の規則を使った単体法で主問題 (14) の基底解の列を生成するとき，異なった解の数は多くとも

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

である．

この定理の結果は，単体法により最適解が得られる場合のみでなく，巡回に陥る場合にも成り立つ．もし主問題 (14) が非退化ならば，単体法で生成される解はすべて異なるので，次の系が得られる．

系 3.8 もし主問題 (14) が非退化ならば，任意の初期実行可能基底解から，Dantzig の規則を使った単体法により

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\right)\right\rceil$$

以下の反復で最適解を得ることができる．

3.2 他のクラスの線形計画問題への上界の拡張

Kitahara, Matsui, and Mizuno [6] は，前節で得た標準形の線形計画問題に対する結果を，変数に上限制約がついた問題に拡張した．そして，Kitahara and Mizuno [9] は，双対単体法で生成される異なる解の数の上界を求めた．この節では，これらの結果をまとめる．

3.2.1 変数に上限制約のついた線形計画問題

ネットワーク最適化などに現れる線形計画問題には，各変数に上限制約がつくことがよくある．ここでは，各変数に上限制約のついた次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u} \end{array} \tag{20}$$

を扱う．ここで，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T \in \Re^n$ の各要素 u_i は，各変数 x_i の上限を表している．この問題には，次の結果が得られている．

定理 3.9 (Corollary 4.1 in [6]) 上限制約のついた線形計画問題 (20) を Dantzig の規則を使った単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil (n-m)\frac{u_{\max}}{\delta}\log\left((n-m)\frac{u_{\max}}{\delta}\right)\right\rceil$$

である．ここで，$u_{\max} = \max_i u_i$ である．

3.2.2 双対単体法

主問題 (14) に対する双対単体法，すなわち，双対問題 (15) の実行可能基底解を生成する単体法については，次のような結果を得ることができる．

定理 3.10 (Theorem 3.2 in [9]) 主問題 (14) を Dantzig の規則（最大係数規則）を使った双対単体法により解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$m\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma_D}{\delta_D}\log\left(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma_D}{\delta_D}\right)\right\rceil$$

となる．ここで，δ_D と γ_D は，それぞれ双対問題 (15) のすべての実行可能基底解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ におけるベクトル $\boldsymbol{s}$ のすべての正の要素の最小値と最大値を表す．

上で定義した δ_D と γ_D の値は，双対問題の基底解におけるベクトル $\boldsymbol{s}$ の要素の値によって決まり，ベクトル $\boldsymbol{y}$ の値とは，無関係であることを注意する．すなわち，不等式表現のみで表わされた多面体 $\{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}\}$ を実行可能領域とする線形計画問題では，δ_D と γ_D の値は，その多面体の頂点の座標ではなく，スラック変数の値によって決まる．このことは，不等式表現のみで表わされた多面体を実行可能領域とする線形計画問題では，多面体を平行移動すると頂点の座標が変化するが，単体法で生成される基底解の数が変化しないことにも矛盾しない．

3.3 特殊な線形計画問題への適用

この節では，前節までに得られた結果を使うことにより，特殊な線形計画問題を単体法で解くときに必要な反復回数，あるいは生成される解の数があまり多くならないことを示す．ここでは，$0-1$ 基底解からなる線形計画問題，最短路問題，完全ユニモジュラ (Totally unimodular) 行列の線形計画問題を取り上げる．ここで，最短路問題が線形計

画問題として定式化できること，その係数行列が完全ユニモジュラになり，基底解が整数となることは，周知のこととして扱うが，詳しくは Ahuja, Magnanti, and Orlin [1] などの文献が参考となる．

3.3.1 $0-1$ 基底解

ここでは，割り当て問題のように，すべての基底解のすべての要素が 0 または 1，すなわち $\delta = \gamma = 1$ であるような線形計画問題 (14) を扱う．このとき，$\gamma/\delta = 1$ であるから，次の結果が得られる．

定理 3.11 すべての基底解のすべての要素が 0 または 1 であるような線形計画問題 (14) を Dantzig の規則を使った単体法で解くとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\} \log \min\{m, n-m\} \right\rceil$$

である．

3.3.2 最短路問題

頂点の集合を V，枝の集合を E とするグラフ $G = (V, E)$ 上で，ある頂点 $v \in V$(ソース) から，すべての頂点への最短路を求める問題を線形計画問題として定式化すると

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}, \\ \text{subject to} & \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \begin{cases} |V|-1 & \text{for } i = v \\ -1 & \text{for } i \in V \text{ and } i \neq v \end{cases} \\ & x_{ij} \geq 0 \text{ for each } (i,j) \in E \end{array} \tag{21}$$

となる．ここで，c_{ij} は枝 $(i,j) \in E$ の長さを表す定数であり，x_{ij} は枝 $(i,j) \in E$ を k 個の頂点への最短路に使うとき k という値をとり，どの頂点へも使わないとき 0 という値をとる変数である．最短路問題では，上の線形計画問題 (21) が非退化となることが知られている．また，変数の数 $n = |E|$，等式制約の数 $m = |V|-1$(問題の等式制約のうちの一つは冗長）であり，すべての基底解のすべての要素が整数である．これは制約行列が完全ユニモジュラ行列であることによる (3.3.3 節参照)．また，最大値が $|V|-1$ 以下であるので，$\delta = 1$ かつ $\gamma \leq |V|-1$ となる．したがって，系 3.8 より次の結果が得られる．

定理 3.12 最短路問題 (21) を Dantzig の規則を使った単体法で解くとき，高々

$$(|E|-|V|+1)\left\lceil \min\{|V|, |E|-|V|+1\}|V| \log\left(\min\{|V|, |E|-|V|+1\}|V|\right) \right\rceil,$$

あるいはより単純に $2|E||V|^2 \log |V|$ の反復で最適解を得ることができる．

この定理で得られた反復回数は強多項式である．

3.3.3 完全ユニモジュラ行列の線形計画問題

ここでは，主問題 (14) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が完全ユニモジュラ (Totally Unimodular) であり，定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素が整数である場合について考察する．行列 $\boldsymbol{A}$ は，すべての正方な部分小行列の行列式が 1，0，-1 のいずれかであるとき，完全ユニモジュラであるといわれる．このとき，すべての基底解の要素が整数となるので，正の要素の最小値 $\delta = 1$ となる．主問題 (14) の基底を B とし，基底解を $(\boldsymbol{x}_B^T, \boldsymbol{0})^T \in \Re^m \times \Re^{n-m}$ とすれば，$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．完全ユニモジュラ行列の逆行列の任意の成分は，1，0，-1 のいずれかであるので，$\boldsymbol{x}_B$ の各要素の値は高々 $\|\boldsymbol{b}\|_1$ であり，基底解の正の要素の最大値 γ は $\|\boldsymbol{b}\|_1$ 以下となる．以上の議論と定理 3.8 から，次の結果が得られる．

系 3.13 (Corollary 4 in [11]) 主問題 (14) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が完全ユニモジュラであり，定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素が整数であるとする．任意の初期実行可能基底解から Dantzig の規則を使った単体法を使うとき，生成される異なる解の数は，高々

$$(n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\|\boldsymbol{b}\|_1 \log(\min\{m, n-m\}\|\boldsymbol{b}\|_1)\right\rceil$$

である．

3.4 単体法で生成される解の最大数の下界

Kitahara and Mizuno [7, 8] は，Klee-Minty の線形計画問題の単純な変種を構築することにより，単体法で生成される解の数が γ/δ に一致することがあることを示した．このことは，γ/δ が単体法で生成される解の最大数の下界となり，上界として γ/δ よりよいものを得ることができないことを意味している．したがって，3 節で得た上界がかなり良いものであることがいえる．ここでは，Kitahara and Mizuno [7, 8] の結果を簡単に説明する．

変数の数が n 以下，等式制約の数が m 以下，任意の実行可能基底解の任意の正の成分が δ 以上 γ 以下であるような任意の線形計画問題 (14) と任意の初期実行可能基底解に対して，Dantzig の規則を使った単体法を適用するとき，生成される異なる実行可能基底解の最大数を $M(m, n, \delta, \gamma)$ とする．このとき，定理 3.7 より，$M(m, n, \delta, \gamma)$ の上界が

$$M(m, n, \delta, \gamma) \le (n-m)\left\lceil \min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta}\log(\min\{m, n-m\}\frac{\gamma}{\delta})\right\rceil$$

と得られる．

Dantzig and Thapa による線形計画問題の本 [3] などには，Klee-Minty の線形計画問題として

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{m} 10^{m-i} x_i, \\
\text{subject to} & x_1 \leq 1, \\
& 2\sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} x_i + x_k \leq 100^{k-1} \quad \text{for } k = 2, 3, \cdots, m, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

が示されている．ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ は変数ベクトルである．この問題を Dantzig の規則を使った単体法で解くとき，最大 $(2^m - 1)$ の異なる基底解が生成されることが知られている．この問題では，不等式制約の定数項のみでなく，目的関数の係数あるいは不等式制約の係数にも指数的に大きな値が使われている．その結果，実行可能基底解の成分が非常に大きな値，あるいは非常に小さな正の値をとり，比 γ/δ は 100^{m-1} 程度の莫大な値となる．この場合，比 γ/δ は単体法で生成される異なる解の最大数 $(2^m - 1)$ よりもかなり大きな値となる．

Kitahara and Mizuno [7] は，Klee-Minty の線形計画問題の単純な変種を構築し，その問題で生成される異なる基底解の数が比 γ/δ と等しくなることを示した．その問題は，

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{m} x_i, \\
\text{subject to} & x_1 \leq 1, \\
& 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \leq 2^k - 1 \quad \text{for } k = 2, 3, \cdots, m, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と表わされる．この問題では，目的関数の任意の係数あるいは不等式制約の任意の係数がとても単純な値 (0，1，2) となっている．上の問題にスラック変数のベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ を導入すると，標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{m} x_i, \\
\text{subject to} & x_1 + y_1 = 1, \\
& 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k + y_k = 2^k - 1 \quad \text{for } k = 2, 3, \cdots, m, \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{22}
$$

が得られる．この問題の等式制約の数は m であり，変数の数は $n = 2m$ である．

補題 3.14 (Lemma 2.1 in [8]) 線形計画問題 (22) は次のような性質を持つ．

1. 任意の実行可能基底解において，任意の $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して，変数 x_k と y_k のどちらか一方のみが基底変数となる．
2. 実行可能基底解の数は 2^m である．
3. 任意の実行可能基底解の各成分は整数である．

4. 非退化である．
5. 最適解は

$$\boldsymbol{x}^* = (0, 0, \cdots, 0, 2^m - 1)^T,$$
$$\boldsymbol{y}^* = (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^{m-1} - 1, 0)^T$$

であり，その最適値は $(2^m - 1)$ である．

6. すべての実行可能基底解のすべての正の成分の最小値が 1 であり，最大値が $(2^m - 1)$ である．すなわち，

$$\delta = 1,\ \gamma = 2^m - 1$$

である．

問題 (22) の初期実行可能基底解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y} = (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^m - 1)^T$ とし，次の Dantzig の規則を使った単体法により基底解を更新するとする：

- 辞書において縮約コストが最大（最大化問題の場合）となる非基底変数を基底に入れる変数に選ぶ．
- 2 つ以上の非基底変数の縮約コストが同時に最大となるときは，その中で x_i または y_i の添え字 i が最も小さなものを選ぶ．

このとき，次の結果が得られる．

定理 3.15 (Theorem 3.1 in [8]) 問題 (22) を初期実行可能基底解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} = (1, 2^2 - 1, \cdots, 2^m - 1)^T$ から Dantzig の規則を使った単体法を使って解くとき，次のことが成り立つ．

- 反復回数は $(2^m - 1)$ である．
- 任意の辞書における任意の縮約コスト係数の値は，1 または -1 である．
- 目的関数値は，各反復でちょうど 1 ずつ増える．

上の定理 3.15 より，問題 (22) には，任意の整数 $k \in [0, 2^m - 1]$ に対して目的関数値が k となる実行可能基底解が存在し，単体法により，それらの基底解が目的関数の小さい順にすべて生成されることが分かる．また，上の定理より，次の結果も得られる．

系 3.16 $n = 2m$，$\delta = 1$，$\gamma = 2^m - 1$ とすれば，

$$M(m, n, \delta, \gamma) \geq \gamma/\delta$$

が成り立つ．したがって，$M(m, n, \delta, \gamma)$ の上界として γ/δ より小さな値を得ることはできない．

さらに，Kitahara and Mizuno [8] では，m 次元立方体上の線形計画問題を使って，次のような結果も得ている．

系 3.17 (Corollary 5.3 in [8]) 任意の $m \geq 1$, $n \geq m$, $\delta > 0$, と $\gamma \geq \delta$ に対して次の不等式を満たすような $s \in [0, 1)$ は存在しない：

$$M(m, n, \delta, \gamma) \leq m^s \frac{\gamma}{\delta} \tag{23}$$

4 強多項式アルゴリズムと単体法

すでに述べたように，線形計画問題を解く方法として，Dantzig[2] の提案した単体法，Khachiyan の楕円体法 [5]，Karmarkar の内点法 [4] がよく知られており，楕円体法と内点法は多項式アルゴリズムであるが，単体法については 多項式アルゴリズムであるかわかっていない．

標準形の線形計画問題を再掲すると，

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる．行列 A の要素の最大絶対値を

$$A_{\max} = \{|a| \big| a \text{ は行列 } A \text{ の要素 }\}$$

とし，正方部分行列の行列式の最大絶対値を

$$\Delta_A = \max\{|\det \boldsymbol{D}| \big| \boldsymbol{D} \text{は行列 } \boldsymbol{A} \text{ の正方部分行列 }\}$$

と定義する．明らかに，$A_{\max} \leq \Delta_A$ と $\Delta_A \leq m! A_{\max}^m$ が成立する．線形計画問題 (14) を解くアルゴリズムが多項式アルゴリズムであるということは，解くときに必要とされる計算量（あるいは基本演算の回数）が m, n, L_A, L_b, L_c の多項式で抑えることができることを意味する．ここで，L_A, L_b, L_c はそれぞれ $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のサイズを表し，具体的には，

$$\begin{array}{l} L_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \log(|a_{ij}| + 1), \\ L_b = \sum_{i=1}^m \log(|b_i| + 1), \\ L_c = \sum_{j=1}^n \log(|c_j| + 1) \end{array}$$

である．単体法では，各反復で必要とする計算量が m, n の多項式で抑えることができるので，反復回数が m, n, L_A, L_b, L_c の多項式で抑えることができれば多項式アルゴリズムとなる．

Tardos [16] は，$\log(A_{\max})$ が m, n の多項式で抑えられる線形計画問題 (14) に対して，強多項式アルゴリズムを提案した．強多項式アルゴリズムとは，m, n の多項式で抑えられる計算量で問題を解くことができることを意味する．$\log(A_{\max})$ が m, n の多項式で抑えられるならば，定義より行列 A のサイズ L_A も m, n の多項式で抑えられる．Tardos は，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のサイズ L_b と L_c が A のサイズの多項式で抑えられる複数の補助線形計画問題を解くことにより，元の問題 (14) が解けることを示した．このとき，それぞれの補助問題を多項式アルゴリズムで解けば，各補助問題は m, n, L_A の多項式で抑えられる計算量で解くことができる．また，解かれる補助問題の総数も m, n の多項式で抑えることができるので，$\log(A_{\max})$ が m, n の多項式で抑えられるならば，全計算量が m, n の多項式で抑えることができることになる．

Tardos のアルゴリズムは，補助問題を解くときに多項式アルゴリズムを使う必要があるので，単体法を使った場合には，強多項式アルゴリズムとは言えない．Tardos のアルゴリズムでは，ベクトル $\boldsymbol{c}$ のサイズ L_c を m, n, L_A の多項式で抑えた補助問題を複数解く基本アルゴリズムを使い，さらにベクトル $\boldsymbol{b}$ のサイズ L_b を m, n, L_A の多項式で抑えるための工夫を加えている．一方，Mizuno [13] は，Δ_A が m, n の多項式で抑えられる問題 (14) に対して，Tardos の基本アルゴリズムに現れる補助問題を単体法で解くことにより，強多項式アルゴリズムが得られることを示した．

本節では，前節で説明した，問題 (14) を解く主単体法あるいは双対単体法で生成される異なる基底解の数の上界にクラメルの公式を使うことにより，上界がより具体的に表現できることを示す．その上界を使い，Mizuno [13] によって得られた単体法の計算量の結果を示す．その結果は，次のように述べることができる：解くべき補助問題がすべてが非退化ならば，提案される単体法で問題 (14) の最適基底を得るか，最適基底が存在しないことが判定でき，そのときに必要とされる総計算量が m, n, Δ_A の多項式で抑えることができる．もし，行列 $\boldsymbol{A}$ が全ユニモジュラ ($\Delta_A = 1$) ならば，総計算量が m と n の多項式で抑えられるので，提案される単体法は強多項式アルゴリズムとなる．

本節では，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\|_1$ と $\|\boldsymbol{a}\|_\infty$ は，それぞれ $\boldsymbol{a}$ の ℓ_1 ノルムと ℓ_∞ ノルムを表す．また，実数 a に対して，$\lceil a \rceil$ は a より小さくない最小の整数を表す．本節の内容は，論文 [15] に加筆と適宜修正等を加えたものである．

4.1　単体法で生成される解の数（行列式を使った評価）

標準形の線形計画問題 (14) の双対問題を再掲すると，

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{s}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{24}$$

となる．前節の結果より，線形計画問題 (14) を Dantzig の規則を使った主単体法で解くときに生成される異なった基底解の数は

$$nm\frac{\gamma}{\delta}\log(m\frac{\gamma}{\delta}) \tag{25}$$

で抑えられる（より正確には，整数への切り上げを使う必要があるが，簡単のため略している）．ここで，δ と γ は，ぞれぞれ問題 (14) の実行可能基底解の正の成分の最小値と最大値を表している．問題が非退化ならば，上の値 (25) は，単体法の反復回数の上界にもなっている．

上の結果から，γ/δ が小さいならば，単体法により問題 (14) を効率的に解くことができることがわかる．例えば，線形計画問題の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が全ユニモジュラ (totally unimodular) ならば (25) の値は，たかだか

$$nm\|\boldsymbol{b}\|_1\log(m\|\boldsymbol{b}\|_1)$$

となる．したがって，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各成分の絶対値が大きくない整数ならば，単体法で効率よく解ける．しかし，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の中に整数ではない実数値あるいは値の大きな整数があれば，単体法は多くの反復を必要とする可能性がある．

より一般の行列 $\boldsymbol{A}$ の場合に，線形計画問題 (14) の基底解の各成分は，クラメルの公式を使うと，分数 p/q で表され，分母 q は行列 $\boldsymbol{A}$ の正方部分行列式の値，分子 p はその行列のある列をベクトル $\boldsymbol{b}$ に置き換えた行列式の値となる．したがって，

$$\begin{array}{l} q\leq\Delta_A, \\ p\leq\Delta_A\|\boldsymbol{b}\|_1 \end{array}$$

が成立し，

$$\begin{array}{l} \delta\geq 1/\Delta_A, \\ \gamma\leq\Delta_A\|\boldsymbol{b}\|_1 \end{array}$$

となる．このとき，(25) の値は，たかだか

$$nm\Delta_A^2\|\boldsymbol{b}\|_1\log(m\Delta_A^2\|\boldsymbol{b}\|_1)$$

となる．もし，Δ_A と $\|\boldsymbol{b}\|_1$ の値が小さいならば，単体法で効率よく線形計画問題 (14) を解くことができる．

同様に，線形計画問題 (14) を Dantzig の規則を使った双対単体法で解くときに生成される異なった基底解の数は

$$m^2\frac{\gamma_D}{\delta_D}\log(m\frac{\gamma_D}{\delta_D}) \tag{26}$$

で抑えられる．この式の中で，δ_D と γ_D は，それぞれ双対実行可能基底解 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})$ における $\boldsymbol{s}$ の要素の中の最小値と最大値を表している．双対問題 (24) では，$\gamma_D \leq \Delta_A\|\boldsymbol{c}\|_1$ かつ $\delta_D \geq 1/\Delta_A$ となるので，その上界 (26) は，たかだか

$$m^2\Delta_A^2\|\boldsymbol{c}\|_1\log(m\Delta_A^2\|\boldsymbol{c}\|_1) \tag{27}$$

となる．もし双対問題 (24) が非退化ならば，双対単体法の反復回数も同様に (27) で抑えられる．

これまでの議論により，係数行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式の最大絶対値 Δ_A が小さな場合（たとえば $\boldsymbol{A}$ が全ユニモジュラ行列である場合）には，制約式の右辺ベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素の絶対値が小さい整数ならば主単体法で，目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素の絶対値が小さい整数ならば双対単体法により，問題 (14) と (24) を効率よく解くことができることがわかる．しかし，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の要素が整数とは限らない場合，あるいは絶対値が大きな整数である場合などには，単体法で効率よく解けるとは言えない．このような場合には，Mizuno [13] が示したように，Tardos の基本アルゴリズムと単体法を組み合わせることにより，効率よく解くことが可能となることを次節以降で示す．

4.2 Tardos の基本アルゴリズムと単体法

この節では，Mizuno [13] によって提案された，標準形の線形計画問題 (14) とその双対問題 (24) を解くアルゴリズムを説明する．そのアルゴリズムは，Tardos [16] によって提案された基本アルゴリズムを使い，その中の補助問題を解くときに楕円体法 [5] あるいは内点法 [4] ではなく，単体法を使う．

本節では，集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ とする．N の部分集合 K とその補集合 $\bar{K}=N-K$ に対して，必要ならば順序を入れ替えたのちに，行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_K,\boldsymbol{A}_{\bar{K}}),\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_K\\ \boldsymbol{c}_{\bar{K}}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_K\\ \boldsymbol{x}_{\bar{K}}\end{pmatrix}$$

と分解する．このとき，問題 (14) は

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}_K^T \boldsymbol{x}_K + c_{\bar{K}}^T \boldsymbol{x}_{\bar{K}}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K \boldsymbol{x}_K + \boldsymbol{A}_{\bar{K}} \boldsymbol{x}_{\bar{K}} = \boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{x}_K, \boldsymbol{x}_{\bar{K}}) \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{28}$$

と表すことができる．

線形計画問題 (14) の各変数 $x_i (i \in N)$ には，任意の最適解で常に 0 になるもの，常に正になるものと，それ以外のものがある．いま，常に 0 となる変数 x_i の添え字 i の集合を

$$\bar{K}^* = \{ i \big| \text{任意の最適解 } \boldsymbol{x}^* \text{ で } x_i^* = 0 \text{ となる } i \in N \}$$

とし，その補集合を $K^* = N - \bar{K}^*$ とする．このとき，問題 (14) の最適解の集合は，

$$O = \{ (\boldsymbol{x}_{K^*}, \boldsymbol{x}_{\bar{K}^*}) \big| \boldsymbol{A}_{K^*} \boldsymbol{x}_{K^*} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_{\bar{K}^*} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_{K^*} \geq \boldsymbol{0} \}$$

と表される．したがって，集合 $\bar{K}$ が $\bar{K}^*$ の部分集合ならば，問題 (28) において，$\boldsymbol{x}_{\bar{K}} = \boldsymbol{0}$ とした問題を解くことにより，元の問題を解くことが可能となる．

提案するアルゴリズムでは， 次のような補助問題

$$\begin{array}{ll} \min & \bar{\boldsymbol{d}}_K^T \boldsymbol{x}_K, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_K \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{29}$$

を最大で n 個解く．ここで，$\bar{\boldsymbol{d}}_K$ は元問題のベクトル $\boldsymbol{c}$ を使って求めたベクトルであり，$\bar{\boldsymbol{d}}_K$ の各成分は絶対値が $n^2 \Delta_A$ 以下の整数である．問題 (29) を主問題とするとき，その双対問題は，

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_K = \bar{\boldsymbol{d}}_K,\ \boldsymbol{s}_K \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{30}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{s}_K$ はスラック変数のベクトルである．

提案するアルゴリズムでは，最適基底解の基底変数の添え字集合 $B \subset K$ と双対問題の最適基底解

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \bar{\boldsymbol{d}}_B, \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s}_{\bar{B}} = \bar{\boldsymbol{d}}_{\bar{B}} - \boldsymbol{A}_K^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \bar{\boldsymbol{d}}_B$$

を双対単体法法により計算する．ここで，$\bar{B} = K - B$ である．このとき，主問題の最適解は，

$$\boldsymbol{x}_B = (\boldsymbol{A}_B)^{-1} \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_{\bar{B}} = \boldsymbol{0}$$

と計算できる．

以上の準備のもとで，アルゴリズムは次のよう述べることができる．

アルゴリズム 4.1 提案するアルゴリズムは，次のようになる．

ステップ 0: ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素が整数でかつ $\|\boldsymbol{c}\|_\infty \le n^2\Delta_A$ ならば，線形計画問題 (14) を双対単体法で解き，停止する．さもなければ，$K = N$ として，ステップ 1 へ行く．

ステップ 1: ベクトル $\boldsymbol{c}_K$ を部分空間 $\{\boldsymbol{x}_K | \boldsymbol{A}_K\boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{0}\}$ に射影したベクトルを $\boldsymbol{c}'_K$ とする，すなわち，$\boldsymbol{c}'_K = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_K^T(\boldsymbol{A}_K\boldsymbol{A}_K^T)^{-1}\boldsymbol{A}_K)\boldsymbol{c}_K$ と計算する．もし $\boldsymbol{c}'_K = \boldsymbol{0}$ ならば停止し，さもなければステップ 2 へ行く．

ステップ 2: ベクトル $\boldsymbol{d}_K = (n^2\Delta_A/\|\boldsymbol{c}'_K\|_\infty)\boldsymbol{c}'_K$, $\bar{d}_i = \lceil d_i \rceil$ $(i \in K)$ とし，$\bar{d}_i$ $(i \in K)$ からなるベクトルを $\bar{\boldsymbol{d}}_K$ とする．次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \min & \bar{\boldsymbol{d}}_K^T\boldsymbol{x}_K, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K\boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_K \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{31}$$

とその双対問題

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_K = \bar{\boldsymbol{d}}_K,\ \boldsymbol{s}_K \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{32}$$

を考える．双対問題の実行可能領域 $F = \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_K) | \boldsymbol{A}_K^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_K = \bar{\boldsymbol{d}}_K, \boldsymbol{s}_K \ge \boldsymbol{0}\}$ が空であるかチェックする．もし空ならば停止し，さもなければ，初期実行可能基底解 $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{s}_K^0) \in F$ を求め，線形計画問題 (31) を Dantzig の規則を使った双対単体法で解く．もし，問題 (31) が非有界 (無限解を持つ) ならば停止し，さもなければ最適基底解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{s}}_K)$ と最適基底に対する添え字集合 $B \subset K$ を求める．集合 $J = \{i | d_i - \boldsymbol{a}_i^T\bar{\boldsymbol{y}} \ge n\Delta_A, i \in K\}$ を求める．ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は行列 $\boldsymbol{A}_K$ の第 i 列を表している．この集合 J に属する添え字 i をすべて K から除き，ステップ 1 へ戻る．

4.3 強多項式アルゴリズム

前節で説明したアルゴリズムでは，元の線形計画問題 (14) においてベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素が整数でかつ $\|\boldsymbol{c}\|_\infty \le n^2\Delta_A$ ならば，その問題 (14) を双対単体法で直接解く．このとき，単体法で生成される異なった基底解の数は，2 節での結果から，m, n, Δ_A の多項式で抑えることができる．

もしステップ 2 で実行可能領域 F が空ならば，$\boldsymbol{c}'_K$, $\boldsymbol{d}_K$, $\bar{\boldsymbol{d}}_K$ の定義から，双対問題 (24) が実行不能であることがわかる．このとき，主問題 (14) は非有界である (無限解を持つ) か，あるいは実行不能である．2 段階単体法を使えば，その第 1 段階で，実行可能領域 F が空であるかどうか判定することができ，空でない場合には初期の実行可能基底

解 $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{s}_K^0) \in F$ を求めることができる．双対問題が非退化ならば，第 2 段階で，初期解 $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{s}_K^0) \in F$ から双対単体法を実行することにより，最適基底解 $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{s}}_K)$ とそのときの最適基底 $B \subset K$ をみつけるか，あるいは問題が非有界であることを判定できる．最適基底が見つかった場合には，主問題の最適基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}_K$ も簡単に計算できる．ステップ 2 における J の定義と，相補性条件から，任意の $i \in J$ に対して，$\bar{x}_i = 0$ となる．したがって，アップデートした新しい K に対する $\bar{\boldsymbol{x}}_K$ は，次の反復における問題 (31) の実行可能解となる．

ステップ 2 において，双対問題 (32) が非有界であることが判明した場合には，主問題 (31) は実行不能である．また，主問題の最適基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}_K$ は次の反復における主問題 (31) の実行可能解なので，主問題が実行不能となりえるのは，第 1 反復のみである．したがって，この場合には，元の主問題 (14) が実行不能であることがわかる．

Mizuno [13] は，Tardos [16] の結果を使うことにより，任意の $i \in J$ に対して，線形計画問題 (14) の任意の最適基底解で $x_i^* = 0$ となることを示し (下の Lemma 4.2)，各反復で集合 J が少なくとも一つの要素を持つことを示した (下の Lemma 4.3)．アルゴリズムにおいて，ステップ 1 で $\boldsymbol{c}'_K = \boldsymbol{0}$ が成立し停止した場合には，条件 $\boldsymbol{A}_K \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{x}_K \geq \boldsymbol{0}$ をみたす任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}_K^*$ に $\boldsymbol{x}_{\bar{K}}^* = \boldsymbol{0}$ を付け加えた解が問題 (14) の最適解となる．前の反復で求めた主問題の最適基底解 $\bar{\boldsymbol{x}}_K$ がその条件をみたす解であるので，問題 (14) の最適基底と最適解を得ることができる．もし最初の反復で $\boldsymbol{c}'_K = \boldsymbol{0}$ となったならば，問題 (14) の任意の実行可能解が最適解となる．したがって，目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を絶対値が $n^2\Delta_A$ 以下となる要素からなる任意のベクトルに置き換えてから，問題 (14) を双対単体法で解くことにより，最適基底を得ることができる．

ここで，Mizuno [13] と Tardos [16] による結果を二つの Lemma として述べる．

補題 4.2 (Lemma 1.1 in Tardos [16] and Lemma 1 in [13]) 問題 (31) と (32) の最適基底解をそれぞれ $\bar{\boldsymbol{x}}_K$ と $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{s}}_K)$ とする．このとき，問題

$$\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{d}_K^T \boldsymbol{x}_K, \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}_K \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_K \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{33}$$

の任意の最適解 $\boldsymbol{x}_K^*$ において，次のこと

$$d_i - \boldsymbol{a}_i^T \bar{\boldsymbol{y}} \geq n\Delta_A \text{ implies } x_i^* = 0 \text{ for any } i \in K,$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{a}_i$ は行列 $\boldsymbol{A}_K$ の第 i 列のベクトルを表している．

補題 4.3 (Lemma 1.2 in Tardos [16] and Lemma 2 in [13]) アルゴリズムの各反復のステップ 2 で定義された集合 J は少なくとも一つの要素 i を含む．

以上の議論をまとめると，前節で提案したアルゴリズムは，各反復で集合 K の要素数が少なくとも 1 つ減るので，たかだか n 回の反復で終了する．また，集合 K から除かれる要素は，最適解において値が 0 となる要素のみなので，アルゴリズムがステップ 1 で $\boldsymbol{c}'_K = \boldsymbol{0}$ となって停止した場合には，最適基底と最適解を求めることができる．ステップ 2 で停止した場合には，線形計画問題 (14) は実行不能であるか非有界であり，最適解を持たないことがわかる．補助問題では目的関数の係数ベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}_K$ の各成分の絶対値が $n^2\Delta_A$ 以下の整数であるので，双対問題が非退化であるとき，問題 (29) を解く双対単体法の反復回数は，式 (27) と $\|\boldsymbol{c}\|_1 \leq n^3\Delta_A$ より，たかだか

$$m^2n^3\Delta_A^3 \log(mn^3\Delta_A^3)$$

で抑えられる．また，各反復で 2 段階単体法を適用するので，解くべき補助問題の数は，たかだか $2n$ である．この結果より，次の結果が得られる．

定理 4.4 係数行列 $\boldsymbol{A}$ が全ユニモジュラ ($\Delta_A = 1$) である，あるいは Δ_A が n の多項式で抑えられ，すべての補助問題が非退化である場合には，アルゴリズム 4.1 は強多項式アルゴリズムとなる．

本節では，単体法で線形計画問題 (14) を解くときに，生成される異なる解の数あるいは反復回数について議論した．その結果は，Kitahara and Mizuno [9, 11] によって得られた上界にクラメルの公式を適用することにより得ることができる．また，Mizuno [13] によって提案されたように，Tardos [16] の基本アルゴリズムにおいて，補助問題を単体法で解いた場合の計算量を求めた．その結果，線形計画問題の係数行列 $\boldsymbol{A}$ が全ユニモジュラならば，そのアルゴリズムが強多項式となることを示した．なお，単体法で各問題が確実に解けることを保証するためには，解くべき補助問題がすべて非退化であることを仮定する必要がある．理論的に少し強い条件であるが，実際に単体法で問題を解くときに巡回に陥ることはめったにないので，実用的には大きな問題とはならないと思われる．また，辞書的順序などを導入すれば，巡回を避けることが可能であるが，その場合の反復回数については不明であり，今回の結果を直接適用することはできない．

謝辞：本研究は，部分的に科学研究費基盤研究 (A)26242027 の補助を受け行われました．

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin: *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications.* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993).

[2] G. B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions* (Princeton University Press, Princeton, 1963).

[3] G. B. Dantzig and M. N. Thapa: *Linear Programming* (Springer-Verlag, New York 1997).

[4] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, 373–395 (1984)

[5] L. G. Khachiyan, A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Math. Dokl.*, 20, 191–194 (1979)

[6] T. Kitahara, T. Matsui, and S. Mizuno: On the Number of Solutions Generated by the Simplex Method for LP with Bounded Variables, *Pacific Journal of Optimization*, **8** (2012) 445–457.

[7] T. Kitahara and S. Mizuno: Klee-Minty's LP and Upper Bounds for Dantzig's Simplex Method, *Operations Research Letters*, **39** (2011), 88–91.

[8] T. Kitahara and S. Mizuno: Lower Bounds for the Maximum Number of Solutions Generated by the Simplex Method, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54** (2011), 191–200.

[9] T. Kitahara and S. Mizuno: On the Number of Solutions Generated by the Dual Simplex Method, *Operations Research Letters*, **40** (2012), 172–174.

[10] 北原知就，水野眞治：単体法の計算量の新評価，日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌，Vol. 55 (2012) 66–83. (T. Kitahara and S. Mizuno: New Evaluation of Computational Amount of the Simplex Method, *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 55 (2012) 66–83.)

[11] T. Kitahara and S. Mizuno: A Bound for the Number of Different Basic Solutions Generated by the Simplex Method, *Mathematical Programming*, 137, 579–586 (2013).

[12] V. Klee and G. J. Minty: How good is the simplex method. In O. Shisha, editor, *Inequalities III*, pp. 159–175, Academic Press, New York, NY (1972).

[13] S. Mizuno: A strongly polynomial simplex method for totally unimodular LP, Technical Report 2014-3, Department of Industrial Engineering and Management, Tokyo Institute of Technology (2014).

[14] 水野眞治：学習・研究用テキスト「線形計画法」，東京工業大学，経営工学専攻，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text.html，(2010)

[15] 水野眞治：線形計画問題に対する単体法の計算量と強多項式アルゴリズム，京都大学

数理解析研講究録 1931, 「最適化アルゴリズムの進展：理論・応用・実装」, (2015 年 1 月) 79-88.

[16] É. Tardos: A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs, *Oper. Res.*, 34, 250–256 (1986)

[17] Y. Ye: The Simplex and Policy Iteration Methods are Strongly Polynomial for the Markov Decision Problem with a Fixed Discount Rate, *Mathematics of Operations Research*, **36** (2011), 593–603.