演習問題 1 任意の凸多面体 $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathrm{xc}(\mathrm{conv}(P \cup Q)) \leq \mathrm{xc}(P) + \mathrm{xc}(Q) + 2$ が成り立つことを証明せよ．

演習問題 2 任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ とそのファセット F を記述する不等式 $a^\top x \leq b$ を考える (ただし，$a \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$)．$P$ のファセット F を含む超平面 $H = \{x \mid a^\top x = b\}$ に関する P の鏡像を P' として，$Q = \mathrm{conv}(P \cup P')$ とする．このとき，$\mathrm{xc}(Q) \leq \mathrm{xc}(P) + 2$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：平行移動により $b = 0$ であると仮定してよいので，それを利用すると簡潔になるかもしれない．)

これを用いて，正 n 角形がサイズ $O(\log n)$ の拡張を持つことを証明せよ．

演習問題 3 非負行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の非負階数が r 以下であることと，$2r$ 個の非負ベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^m$ と $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{R}^n$ が存在して，$A = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k y_k^\top$ と書けることが同値であることを証明せよ．

演習問題 4 任意の非負行列 $A \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ と任意の非負行列 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，

$$\mathrm{rank}_+(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}_+(A), \mathrm{rank}_+(B)\}$$

が成り立つことを証明せよ．

演習問題 5 凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ のファセット表現が，ある行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ とあるベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ を用いて $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ と与えられるとする．また，P のスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が (すなわち，P の頂点は n 個存在する)，ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}, V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ を用いて $S = FV$ と書けるとする．このとき，凸多面体 $Q \subseteq \mathbb{R}^{d+r}$ を $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+r} \mid Ax + Fy = b, y \geq 0\}$ と定義すると，Q が P の拡張になることを証明せよ．

演習問題 6 $\mathbb{R}^d$ におけるパリティ多面体 $\mathrm{PAR}(d)$ のスラック行列計算を期待値の意味で行う，通信複雑度が $O(\log d)$ であるような乱択通信プロトコルを設計せよ．ヒント：パリティ多面体は次のような不等式表現を持つ．

$$\mathrm{PAR}(d) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{i \in A} x_i - \sum_{i \notin A} x_i \leq |A| - 1 \quad \text{for all } A \subseteq \{1, \ldots, d\} \text{ such that } |A| \text{ が偶数} \right\}.$$