

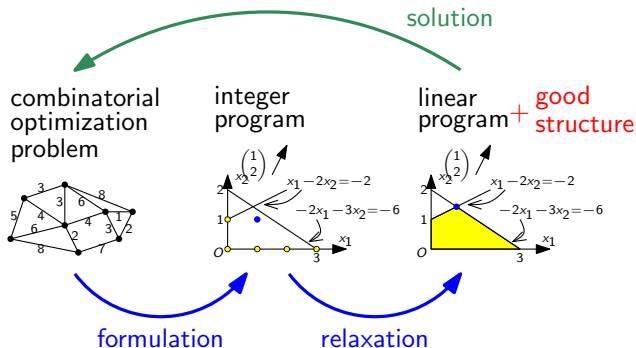
行列の分解と組合せ最適化問題の拡張定式化

岡本 吉央

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

2015 年 7 月 23 日 (一部修正)
組合せ最適化セミナー

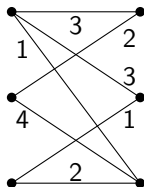
組合せ最適化問題を解くための一般的アプローチ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

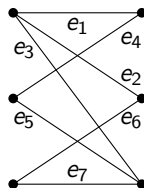
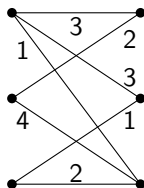
組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)



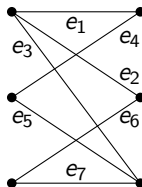
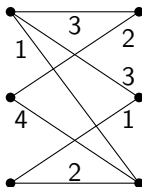
組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)



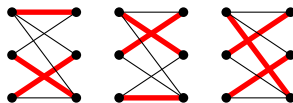
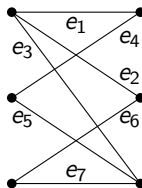
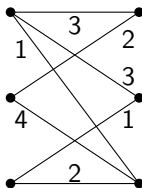
組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)



組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)

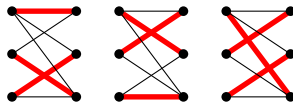
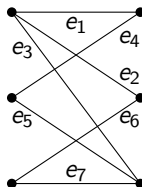
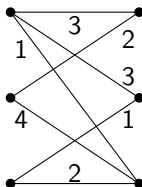


$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↑ 完全マッチングの特性ベクトル

組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)



$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v_1 •

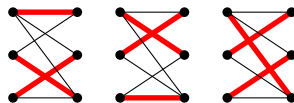
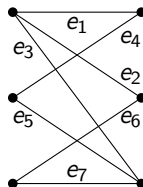
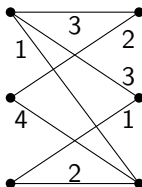
v_2 •

v_3 •

$$\begin{array}{|l} \text{最大化} \\ \text{条件} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3, 3, 1, 2, 4, 1, 2) \cdot x \\ x \in \{v_1, v_2, v_3\} \end{array}$$

組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)

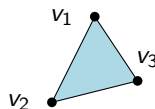


$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

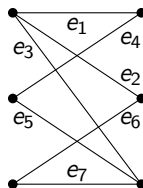
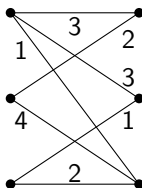
$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|l} \text{最大化} \\ \text{条件} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3, 3, 1, 2, 4, 1, 2) \cdot x \\ x \in \text{conv}\{v_1, v_2, v_3\} \end{array}$$



組合せ最適化問題の LP 定式化

最大重み完全マッチングを見つけよ (割当問題)



最大化 $(3, 3, 1, 2, 4, 1, 2) \cdot x$
条件 $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
 $x_4 + x_5 = 1,$
 $x_6 + x_7 = 1,$
 $x_1 + x_4 = 1,$
 $x_2 + x_6 = 1,$
 $x_3 + x_5 + x_7 = 1,$
 $x_1, \dots, x_7 \geq 0$

割当問題の LP 定式化

$G = (V, E)$ 二部グラフ, $w \in \mathbb{R}^E$ 辺重み

割当問題の LP 定式化 (Birkhoff-von Neumann の定理)

変数: $x \in \mathbb{R}^E$

$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w^\top x \\ \text{条件} & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

この定式化のサイズ (不等式の数) はグラフの大きさの **多項式**
(**コンパクト**な定式化)

割当問題の LP 定式化

$G = (V, E)$ 二部グラフ, $w \in \mathbb{R}^E$ 辺重み

割当問題の LP 定式化 (Birkhoff-von Neumann の定理)

変数: $x \in \mathbb{R}^E$

$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & w^\top x \\ \text{条件} & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

この定式化のサイズ (不等式の数) はグラフの大きさの **多項式**
(**コンパクト**な定式化)

事実

NP 困難な組合せ最適化問題のコンパクトな LP 定式化が存在する
 $\Rightarrow P = NP$

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これは「 $P = NP$ 」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「 $P = NP$ 」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「 $P = NP$ 」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Mathematics of Operational Research)

頂点彩色問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Operational Research)

集合分割問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「 $P = NP$ 」を導く

P=NP の (間違った) 証明

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('04)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('05)

二次割当問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Mathematics of Operational Research)

頂点彩色問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Diaby ('10, Int. J. of Operational Research)

集合分割問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

これらはすべて「 $P = NP$ 」を導く (ことになるので、正しくない)

$P=NP$ の (間違っただ) 証明 への対抗策？

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

P=NP の (間違っただ) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

P=NP の (間違っただけ) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

P=NP の (間違っただ) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

でも，こう直したら？

P=NP の (間違っただ) 証明 への対抗策？

巡回セールスマン問題に対する多項式サイズの
線形計画定式化，見つけたよ

それ，間違ってるよ

でも，こう直したらどう？

ここ，まだ間違ってるよ

でも，こう直したら？

(困ったな～)

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12, '15)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持たない

P=NP の (間違った) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持つ

Yannakakis ('91)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの対称線形計画定式化を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12, '15)

巡回セールスマン問題は多項式サイズの線形計画定式化を持たない

注意

「線形計画定式化を持たない」ということの意味を
厳密に定義する必要あり

- ① 組合せ最適化問題の拡張定式化
 拡張定式化の定義
 拡張定式化の例
- ② 行列の分解
- ③ 乱択通信プロトコル
- ④ まとめ，文献案内，未解決問題

拡張定式化

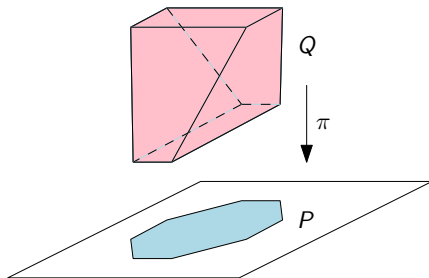
$P \subseteq \mathbb{R}^d$, $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ 凸多面体, $d \leq k$

拡張 (extention) とは？

Q が P の拡張であるとは, ある直射影 $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\pi(Q) = P$$

となること



$P=NP$ の (間違っただ) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持つ

Yannakakis ('91)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの対称拡張を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12, '15)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持たない

拡張のサイズとは？

ファセットの数 (非冗長不等式表現における不等式の数)

$P=NP$ の (間違っただ) 証明 への対抗策

Swart ('86/'87)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持つ

Yannakakis ('91)

ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの対称拡張を持たない

Fiorini, Massar, Pokutta, Tiwary, de Wolf ('12, '15)

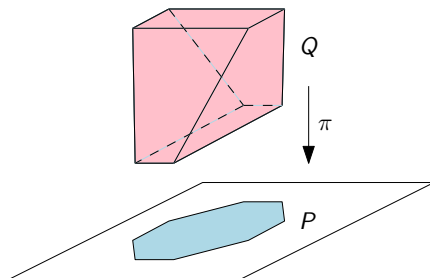
ハミルトン閉路多面体は多項式サイズの拡張を持たない

⇨ 「拡張のサイズ」に対する興味

拡張のサイズとは？

ファセットの数 (非冗長不等式表現における不等式の数)

拡張



▶ P のサイズ = 8

▶ Q のサイズ = 6

⇒ 次元を上げることで、サイズ (ファセット数) が減る場合もある

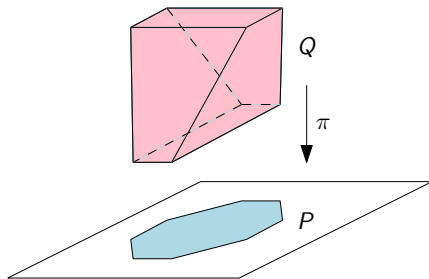
拡張複雑度

$P \subseteq \mathbb{R}^d$ 凸多面体

拡張複雑度 (extention complexity) とは？

P の **拡張複雑度** とは、 P の拡張が持つファセット数の最小値 $xc(P)$ で表す

例 : $xc(P) \leq 6$



最適化手法としての拡張定式化

拡張定式化：拡張を用いて，組合せ最適化問題を定式化する

拡張定式化のための一般的手法

- ▶ Lift and project (Balas, Ceria, Cornuéjols '93)
- ▶ Disjunctive programming (Balas '74, '98)
- ▶ ...

組合せ最適化，整数計画法ではよく用いられている

拡張定式化に関するサーベイ

- ▶ Balas ('05, Ann. OR)
- ▶ Vanderbeck, Wolsey ('10, 50 Yrs of IP)
- ▶ Kaibel ('11, Optima)
- ▶ Conforti, Cornuéjols, Zambelli ('13 Ann. OR)

目次

- ① 組合せ最適化問題の拡張定式化
 - 拡張定式化の定義
 - 拡張定式化の例
- ② 行列の分解
- ③ 乱択通信プロトコル
- ④ まとめ，文献案内，未解決問題

パリティ多面体

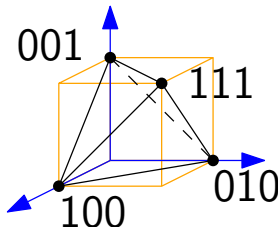
自然数 d

パリティ多面体 (parity polytope) とは？

各座標が 0 か 1 の点で、1 である座標が奇数であるものの全体の凸包

$$\text{PAR}(d) = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^d \mid x_1 + \cdots + x_d \equiv 1 \pmod{2}\}$$

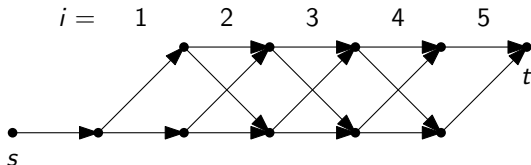
$d = 3$ の場合



パリティ多面体の拡張 (1)

(Carr, Konjevod '04)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域がパリティ多面体の拡張

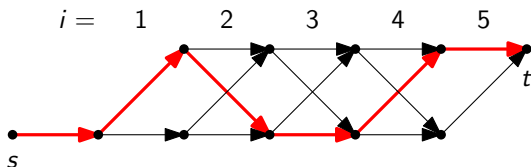
 $d = 5$ のとき

注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 端点座標がすべて整数

パリティ多面体の拡張 (1)

(Carr, Konjevod '04)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域がパリティ多面体の拡張

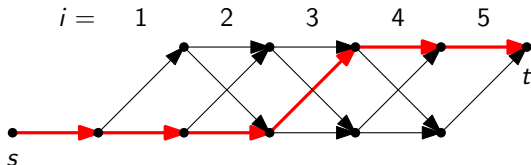
 $d = 5$ のとき

注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 端点座標がすべて整数

パリティ多面体の拡張 (1)

(Carr, Konjevod '04)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域がパリティ多面体の拡張

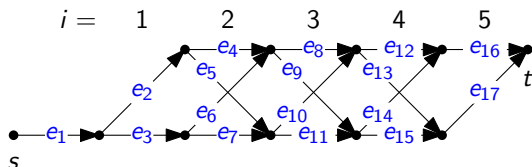
 $d = 5$ のとき

注：最大流問題の許容領域は (容量が整数の場合) 端点座標がすべて整数

パリティ多面体の拡張 (2)

(Carr, Konjevod '04)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域がパリティ多面体の拡張

 $d = 5$ のとき : e_i 上の流れを f_i とすると

▶ 流量保存制約 :

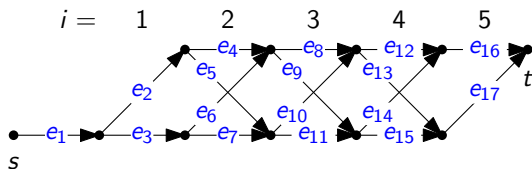
$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_2 + f_3, & f_2 &= f_4 + f_5, & f_3 &= f_6 + f_7, & f_4 + f_6 &= f_8 + f_9, \\
 f_5 + f_7 &= f_{10} + f_{11}, & f_8 + f_{10} &= f_{12} + f_{13}, & f_9 + f_{11} &= f_{14} + f_{15}, \\
 f_{12} + f_{14} &= f_{16}, & f_{13} + f_{15} &= f_{17}
 \end{aligned}$$

▶ 容量制約 : $0 \leq f_i \leq 1$ for all $i \in \{1, \dots, 17\}$

パリティ多面体の拡張 (3)

(Carr, Konjevod '04)

次のグラフ上の最大流問題の許容領域がパリティ多面体の拡張

 $d = 5$ のとき : e_i 上の流れを f_i とすると

► 射影 :

$$x_1 = f_2, x_2 = f_5 + f_6, x_3 = f_9 + f_{10}, x_4 = f_{13} + f_{14}, x_5 = f_{17} \text{ として,}$$

$$f_1, \dots, f_{17} \text{ を消去}$$

$$\therefore \text{拡張のサイズ : } xc(\text{PAR}(d)) \leq 8d$$

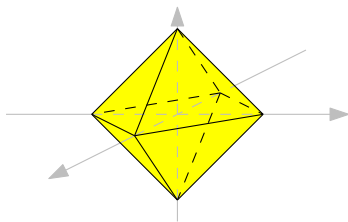
十字多面体 (crosspolytope)

d 次元十字多面体 C_d^* とは

$$C_d^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1 \right\} \quad (\text{ファセット表現})$$

例えば, $d = 3$ のとき

$$C_3^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y + z \leq 1, x + y - z \leq 1, x - y + z \leq 1, \\ x - y - z \leq 1, -x + y + z \leq 1, -x + y - z \leq 1, \\ -x - y + z \leq 1, -x - y - z \leq 1 \end{array} \right\}.$$



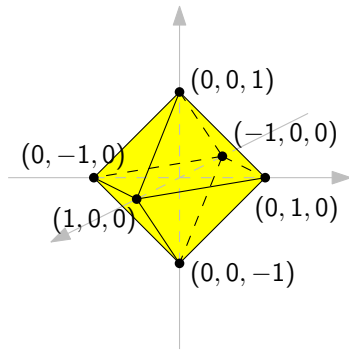
2^d 個のファセット

十字多面体 (crosspolytope) の頂点表現

 d 次元十字多面体 C_d^* の頂点表現

$$C_d^* = \text{conv}\{(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)\}$$

頂点の数は $2d$ 個



十字多面体の拡張

- ▶ 次の Q を考える

$$Q = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{2d} \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i \geq 0 \text{ for all } i \in \{1, \dots, 2d\} \end{array} \right. \right\}$$

- ▶ このとき, C_d^* の頂点を $v_1, \dots, v_{2d}$ として,

$$C_d^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \left| x = \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i v_i, \lambda \in Q \right. \right\}$$

- ▶ つまり, Q は C_d^* の拡張 ($\text{xc}(C_d^*) \leq 2d$)

- ① 組合せ最適化問題の拡張定式化
拡張定式化の定義
拡張定式化の例
- ② 行列の分解
- ③ 乱択通信プロトコル
- ④ まとめ，文献案内，未解決問題

凸多面体のスラック行列

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ の

- ▶ 頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$
- ▶ ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき, P のスラック行列とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

$$S_{i,j} = b_i - a_i^\top z_j$$

S の行 $\leftrightarrow P$ のファセット

S の列 $\leftrightarrow P$ の頂点

スラック行列：例

8 個の不等式

1 $x \leq 2$

2 $-x \leq 2$

3 $y \leq 2$

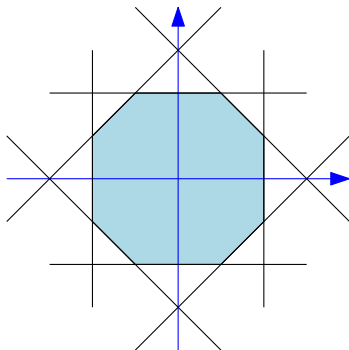
4 $-y \leq 2$

5 $x + y \leq 3$

6 $x - y \leq 3$

7 $-x + y \leq 3$

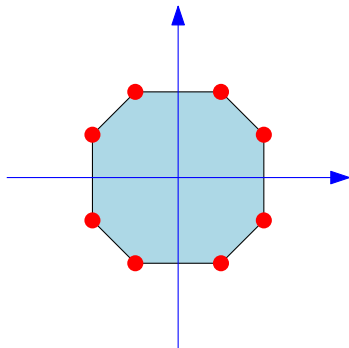
8 $-x - y \leq 3$



スラック行列：例

8 個の頂点

- 1 $(2, 1)$
- 2 $(2, -1)$
- 3 $(-2, 1)$
- 4 $(-2, -1)$
- 5 $(1, 2)$
- 6 $(-1, 2)$
- 7 $(1, -2)$
- 8 $(-1, -2)$



スラック行列：例

頂点表現： $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現： $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき、 P のスラック行列とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

$$S_{i,j} = b_i - a_i^\top z_j$$

	(2, 1)	(2, -1)	(-2, 1)	(-2, -1)	(1, 2)	(-1, 2)	(1, -2)	(-1, -2)
$x \leq 2$	0	0	4	4	1	3	1	3
$-x \leq 2$	4	4	0	0	3	1	3	1
$y \leq 2$	1	3	1	3	0	0	4	4
$-y \leq 2$	3	1	3	1	4	4	0	0
$x + y \leq 3$	0	2	4	6	0	2	4	6
$x - y \leq 3$	2	0	6	4	4	6	0	2
$-x + y \leq 3$	4	6	0	2	2	0	6	4
$-x - y \leq 3$	6	4	2	0	6	4	2	0

スラック行列：例

頂点表現： $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現： $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

P のスラック行列とは？

このとき、 P のスラック行列とは非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で

$$S_{i,j} = b_i - a_i^\top z_j$$

	(2, 1)	(2, -1)	(-2, 1)	(-2, -1)	(1, 2)	(-1, 2)	(1, -2)	(-1, -2)
$x \leq 2$	0	0	4	4	1	3	1	3
$-x \leq 2$	4	4	0	0	3	1	3	1
$y \leq 2$	1	3	1	3	0	0	4	4
$-y \leq 2$	3	1	3	1	4	4	0	0
$x + y \leq 3$	0	2	4	6	0	2	4	6
$x - y \leq 3$	2	0	6	4	4	6	0	2
$-x + y \leq 3$	4	6	0	2	2	0	6	4
$-x - y \leq 3$	6	4	2	0	6	4	2	0

$$3 - (x + y) = 3 - ((-2) + 1) = 4$$

スラック行列と凸多面体の拡張

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理 (Yannakakis '91)

次の2つは同値

- ▶ P はサイズ r の拡張を持つ
- ▶ ある 非負 行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

つまり, スラック行列を調べれば, 拡張のサイズが分かる

行列の非負階数

非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

非負階数とは？

非負行列 S の非負階数とは、
ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

となるような、最小の r のこと

S の非負階数を $\text{rank}_+(S)$ で表す

性質

- ▶ $\text{rank}_+(S)$ の計算は難しい (NP 困難) (Vavasis '09)
- ▶ 任意の定数 k に対して、 $\text{rank}_+(S) \leq k$ であるかの判定は $O(nm^{O(k^2)})$ 時間でできる (Moitra '13)

行列の階数との類似性

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理 (Yannakakis '91)

次の2つは同値

- ▶ S の 非負 階数 $\text{rank}_+(S)$ が r 以下 (P はサイズ r の拡張を持つ)
- ▶ ある 非負 行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

線形代数における事実

次の2つは同値

- ▶ S の階数 $\text{rank}(S)$ が r 以下
- ▶ ある行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

Yannakakis の定理 : 証明 (下から上)

仮定

- ▶ P のファセット表現 $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$)
- ▶ ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して $S = FV$

このとき, 次の凸多面体 Q を考える

- ▶ $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+r} \mid Ax + Fy = b, y \geq 0\}$
- ▶ 直射影 $\pi: (x, y) \mapsto x$ を考えると, $\pi(Q) = P$ になる (演習問題)

Q のサイズ (ファセット数) は?

- ▶ Q のファセット数 $\leq y$ の次元 $= r$

Yannakakis の定理 : 証明 (上から下) 1

仮定

- ▶ P のファセット表現 $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$)
- ▶ P の頂点は $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$
- ▶ P がサイズ r の拡張 Q を持つ
 - ▶ $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+r} \mid Cx + Dy = e, y \geq 0\}$ とする
 $(C \in \mathbb{R}^{\ell \times d}, D \in \mathbb{R}^{\ell \times r}, e \in \mathbb{R}^{\ell})$
 - ▶ 直射影 $\pi: (x, y) \mapsto x$ により $\pi(Q) = P$ となる

このとき, P の任意の頂点 z_i と任意のファセット $a_j^\top x \leq b_j$ を考える

目標

任意の $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ に対して
 $b_j - a_j^\top z_i = f_j^\top v_i$ となるベクトル $f_j \in \mathbb{R}^r, v_i \in \mathbb{R}^r$ を見つける

Yannakakis の定理 : 証明 (上から下) 2

P の頂点 $\bar{z}$ が不等式 $a_j^\top x \leq b_j$ を等号で満たすとする
(つまり, $a_j^\top \bar{z} = b_j$)

線形計画問題 (P)

変数は $(x, y) \in \mathbb{R}^{d+r}$

$$\begin{array}{|l} \text{最大化} \quad a_j^\top x \\ \text{条 件} \quad Cx + Dy = e, y \geq 0 \end{array}$$

その双対問題 (D)

変数は $w \in \mathbb{R}^\ell$

$$\begin{array}{|l} \text{最小化} \quad e^\top w \\ \text{条 件} \quad C^\top w = a_j, D^\top w \geq 0 \end{array}$$

(P) の最適解を (x^*, y^*) , (D) の最適解を w^* とする

Yannakakis の定理 : 証明 (上から下) 3

このとき、頂点 $\bar{z}$ が $(\bar{z}, \bar{y}) \in Q$ の射影として得られるとすると、

$$e^\top w^* \stackrel{\text{強双対性}}{=} a_j^\top x^* \stackrel{\text{最適性}}{\geq} a_j^\top \bar{z} = b_j$$

一方で、 $(x^*, y^*) \in Q$ を射影すると x^* が得られるので、 $x^* \in P$ であり、

$$e^\top w^* \stackrel{\text{強双対性}}{=} a_j^\top x^* \leq b_j$$

したがって、

$$e^\top w^* = b_j$$

Yannakakis の定理 : 証明 (上から下) 4

つまり,

P の任意の頂点 z_i に対して, z_i が $(z_i, y_i) \in Q$ の射影であるとする

$$\begin{aligned} a_j^\top z_i + (D^\top w^*)^\top y_i &= (C^\top w^*)^\top z_i + (D^\top w^*)^\top y_i = w^{*\top} C z_i + w^{*\top} D y_i \\ &= w^{*\top} (C z_i + D y_i) = w^{*\top} e = e^\top w^* = b_j \end{aligned}$$

よって, $f_j = D^\top w^*$, $v_i = y_i$ とすれば,

$$b_j - a_j^\top z_i = f_j^\top v_i$$

となる



スラック行列の分解：例

先ほどの八角形の例

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 2 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、左辺にある行列の非負階数 ≤ 6

スラック行列の分解：例

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Q = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \right) \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. z, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \right\}$$

非負行列分解

非負行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

非負階数とは？

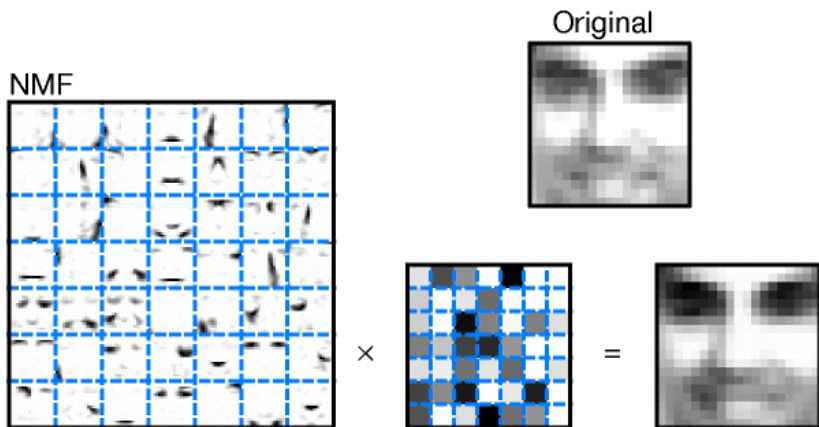
非負行列 S の非負階数とは、
ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV \quad \leftarrow \text{非負行列分解 (非負値行列分解)}$$

となるような、最小の r のこと

非負行列分解 (non-negative matrix factorization, NMF) は
様々な分野に応用されてきている

非負行列分解の応用：機械学習，画像理解



Daniel D. Lee and H. Sebastian Seung, Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization, Nature 401 (1999) 788–791

- ① 組合せ最適化問題の拡張定式化
拡張定式化の定義
拡張定式化の例
- ② 行列の分解
- ③ 乱択通信プロトコル
- ④ まとめ，文献案内，未解決問題

スラック行列と凸多面体の拡張

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理

次は同値

- ▶ P はサイズ r の拡張を持つ
- ▶ ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

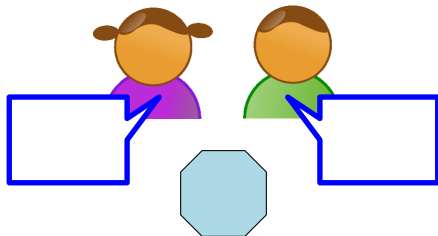
(Yannakakis '91)

- ▶ S を平均的に計算する通信プロトコルで,
通信複雑度が $\lceil \log_2 r \rceil$ ビットのものが存在
(Faenza, Fiorini, Grappe, Tiwary '12, Zhang '12)

スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$



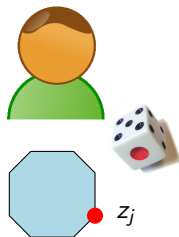
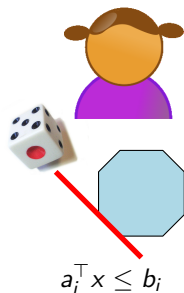
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



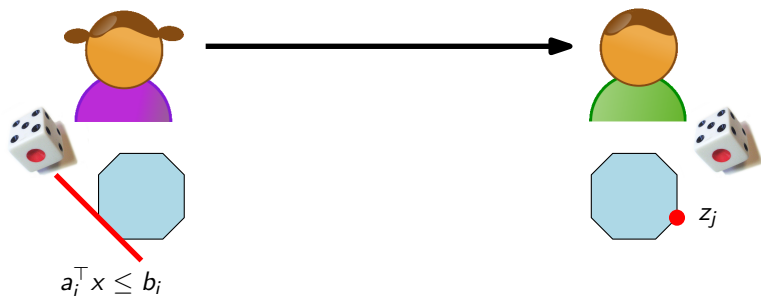
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



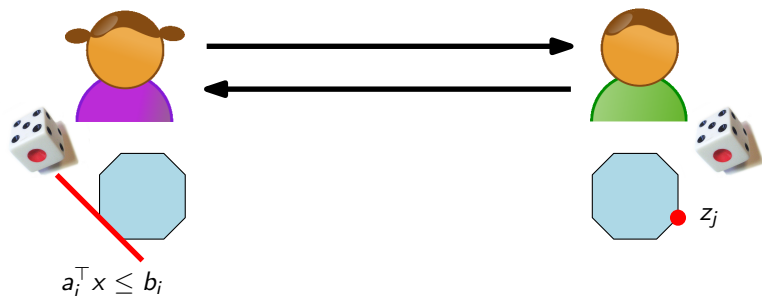
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



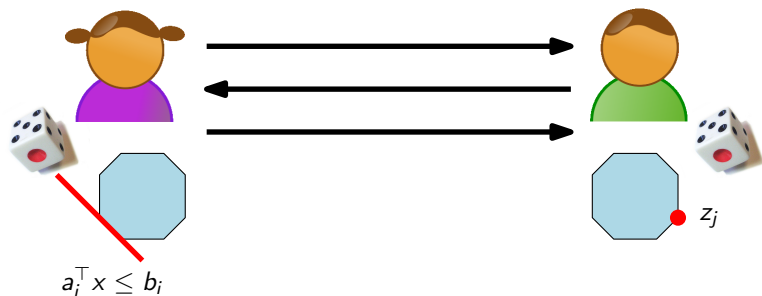
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



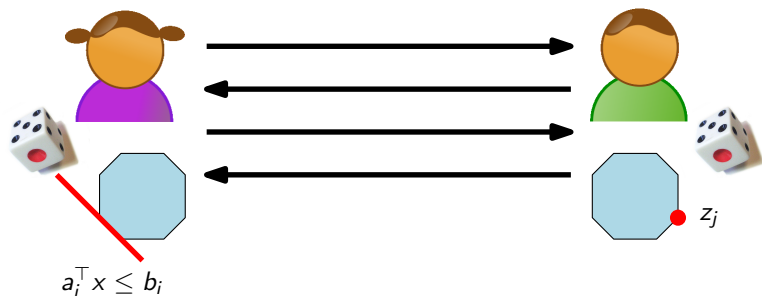
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



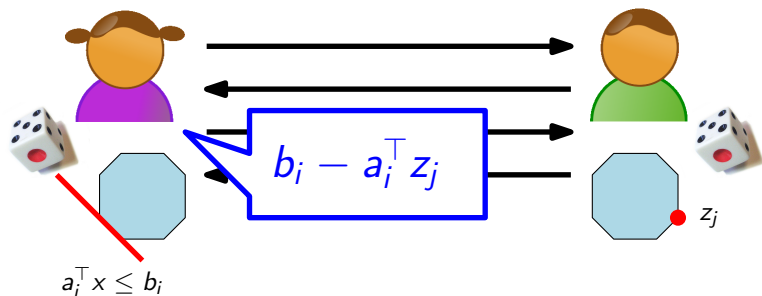
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



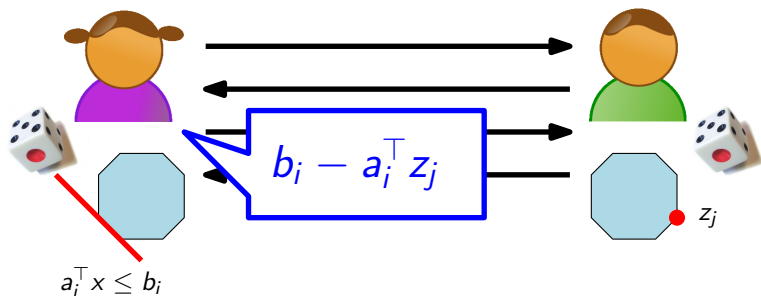
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



▶ アリスとボブの出力は必ず非負

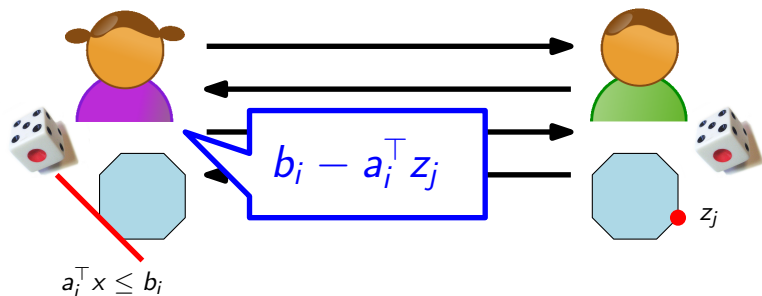
スラック行列を計算する通信プロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ



- ▶ アリスとボブの出力は必ず非負
- ▶ 出力の期待値が $b_i - a_i^\top z_j$ となるようにする

スラック行列と凸多面体の拡張 (再掲)

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理

次は同値

- ▶ P はサイズ r の拡張を持つ
- ▶ ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

(Yannakakis '91)

- ▶ S を平均的に計算する通信プロトコルで,
通信複雑度が $\lceil \log_2 r \rceil$ ビットのものが存在
(Faenza, Fiorini, Grappe, Tiwary '12, Zhang '12)

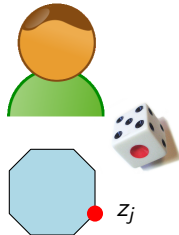
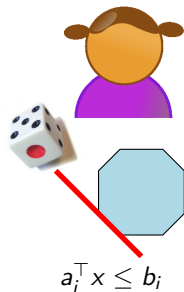
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



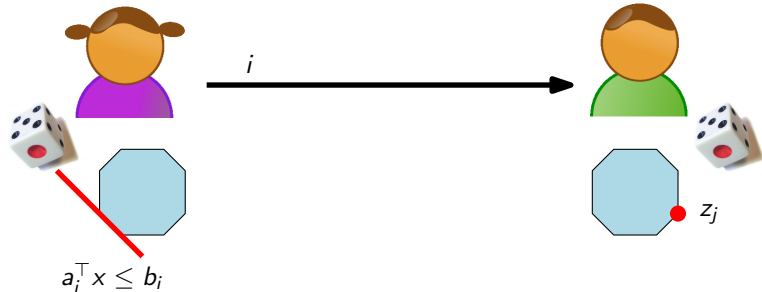
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



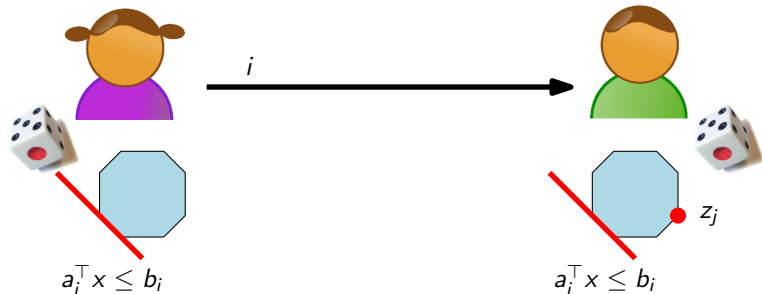
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



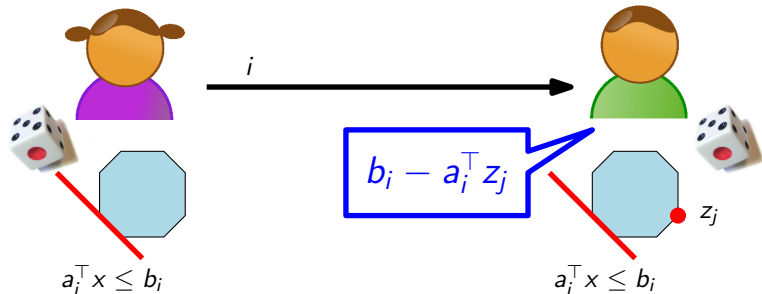
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



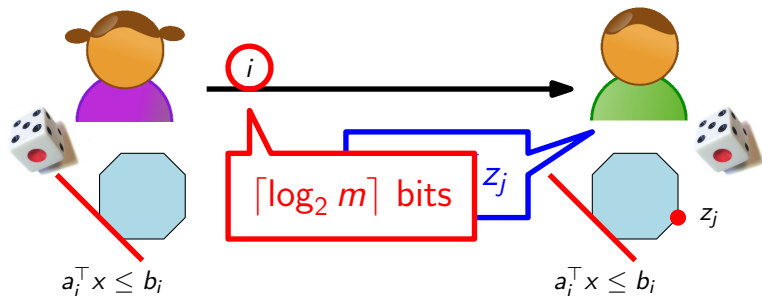
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

ボブは頂点を 1 つ持つ



通信複雑度 = $\lceil \log_2 m \rceil$ bits

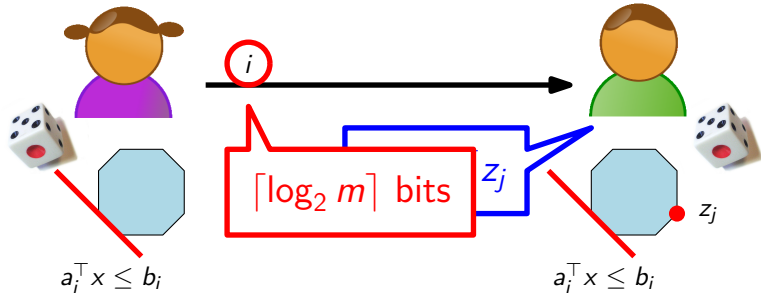
スラック行列を計算する通信プロトコル : 「自明」なプロトコル

頂点表現 : $P = \text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$,

ファセット表現 : $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

アリスはファセットを 1 つ持つ

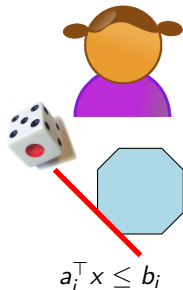
ボブは頂点を 1 つ持つ



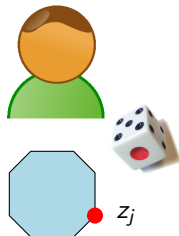
通信複雑度 = $\lceil \log_2 m \rceil$ bits, よって, サイズ $m + O(1)$ の拡張が存在

注意

アリスはファセットを1つ持つ



ボブは頂点を1つ持つ



注意：

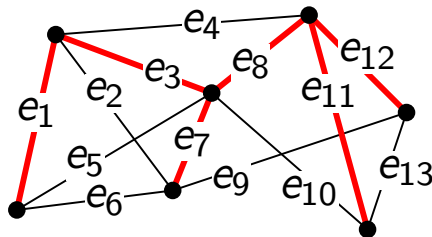
- ▶ 乱数は共有していない (private coin)
- ▶ アリスとボブのどちらが出力をしてもよい
- ▶ アリスとボブは通信を終えたら、乱数を使用してはいけない

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木多面体とは？

$$P_{\text{spt}}(G) = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^E \mid x \text{ は } G \text{ の全域木の辺集合の特性ベクトル}\}$$



特性ベクトル：

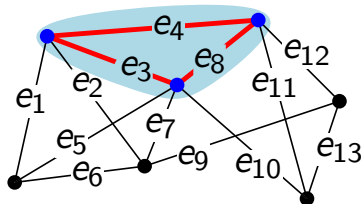
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 不等式記述

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木多面体の不等式記述 (Edmonds '71)

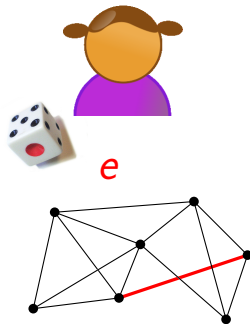
$$P_{\text{spt}}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^E \mid \begin{array}{l} \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\ \sum_{e \in E(X)} x_e \leq |X| - 1 \quad \forall X \subseteq V, X \neq \emptyset \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

 $X =$ 青い3頂点の集合 のとき,

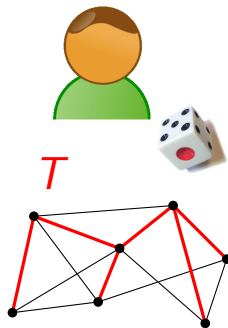
$$E(X) = \{e_3, e_4, e_8\}$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 準備 (1)

アリスはファセットを1つ持つ



ボブは頂点を1つ持つ

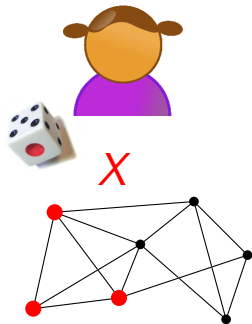


- ▶ ボブの持つ頂点は G の全域木 T に対応
- ▶ アリスの持つファセットは次のどちらかに対応

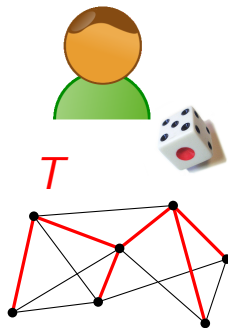
1 辺 $e \in E$ (不等式 $x_e \geq 0$ に対応)2 頂点部分集合 $X \subseteq V$ (不等式 $\sum_{e \in E(X)} x_e \leq |X| - 1$ に対応)

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 準備 (1)

アリスはファセットを1つ持つ



ボブは頂点を1つ持つ



- ▶ ボブの持つ頂点は G の全域木 T に対応
- ▶ アリスの持つファセットは次のどちらかに対応

1 辺 $e \in E$ (不等式 $x_e \geq 0$ に対応)2 頂点部分集合 $X \subseteq V$ (不等式 $\sum_{e \in E(X)} x_e \leq |X| - 1$ に対応)

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 準備 (2)

アリスとボブの出力は？

▶ z = ボブが持つ全域木 T の特性ベクトル

1 アリスの持つファセットが辺 $e \in E$ に対応するとき

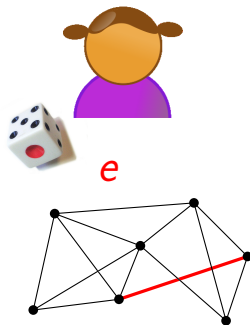
$$\text{▶ 出力} = z_e - 0 = \begin{cases} 1 & (e \in T \text{ のとき}) \\ 0 & (e \notin T \text{ のとき}) \end{cases}$$

2 アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき

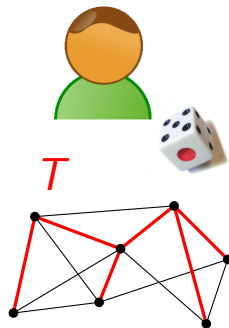
$$\text{▶ 出力} = |X| - 1 - \sum_{e \in E(X)} z_e = |X| - 1 - |E(X) \cap T|$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (1)

アリスはファセットを1つ持つ



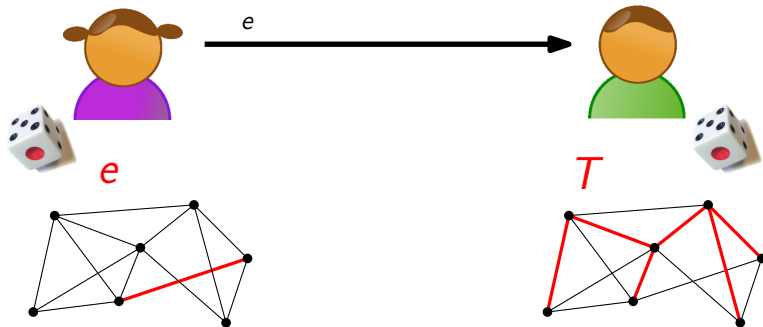
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが辺 $e \in E$ に対応するとき,(1-1) アリス：「 e の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (1)

アリスはファセットを1つ持つ

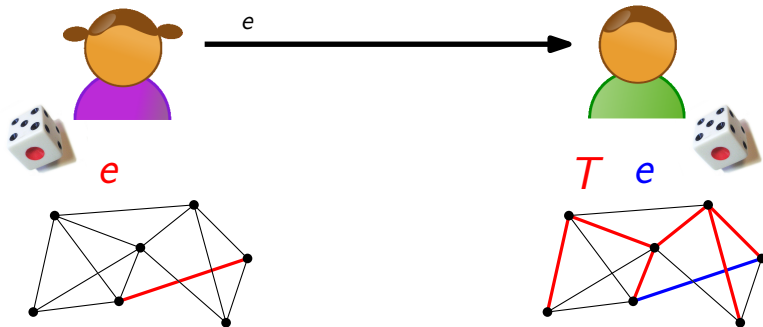
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが辺 $e \in E$ に対応するとき,(1-1) アリス：「 e の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (1)

アリスはファセットを1つ持つ

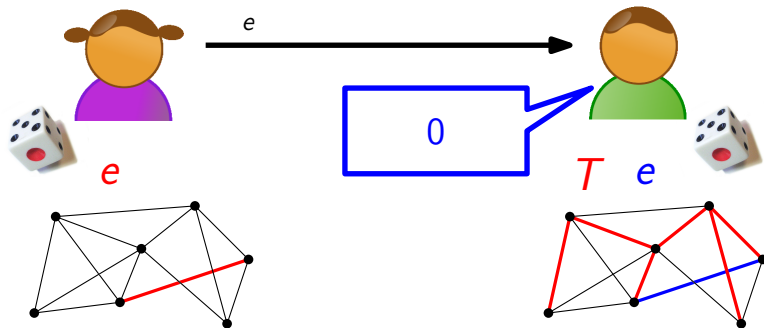
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが辺 $e \in E$ に対応するとき,(1-1) アリス：「 e の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (2)

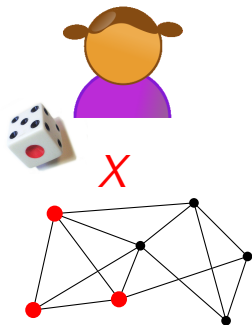
アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ

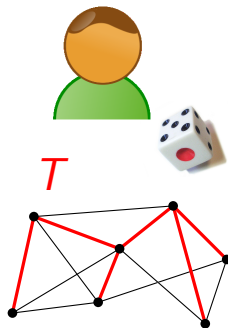
アリスの持つファセットが辺 $e \in E$ に対応するとき,(1-2) ボブ: $e \in T$ ならば「1」を, $e \notin T$ ならば「0」を出力

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (3)

アリスはファセットを1つ持つ



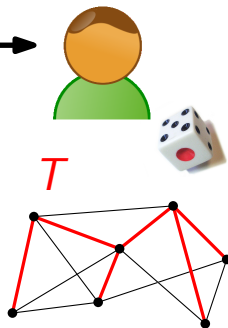
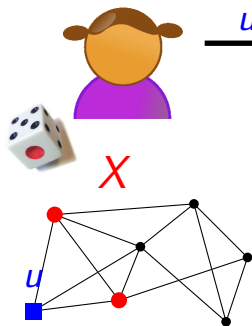
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき,(2-1) アリス：任意の頂点 $u \in X$ を選び, 「 u の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (3)

アリスはファセットを1つ持つ

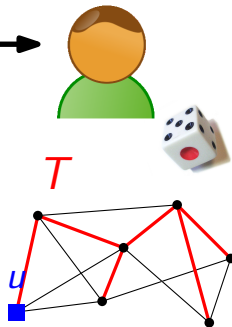
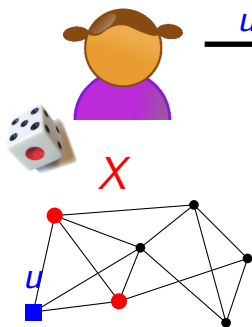
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき,(2-1) アリス：任意の頂点 $u \in X$ を選び, 「 u の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (3)

アリスはファセットを1つ持つ

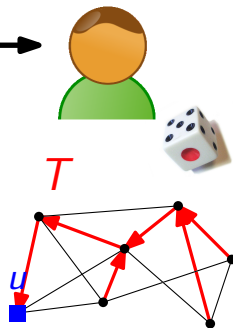
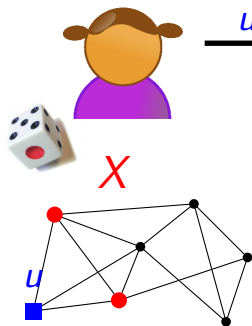
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき,(2-1) アリス：任意の頂点 $u \in X$ を選び、「 u の ID」を送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (4)

アリスはファセットを1つ持つ

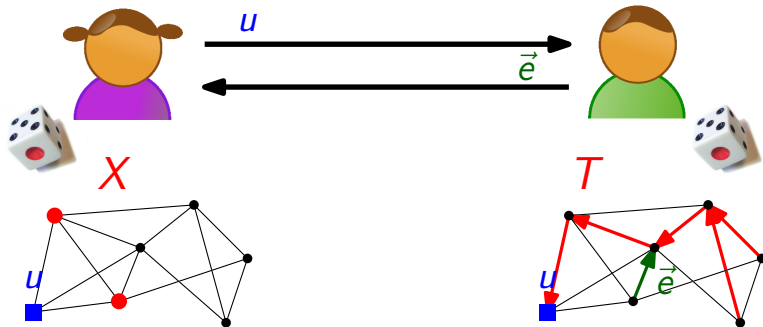
ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき、(2-2) ボブ： T の辺を u に向かって向き付ける

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (5)

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ

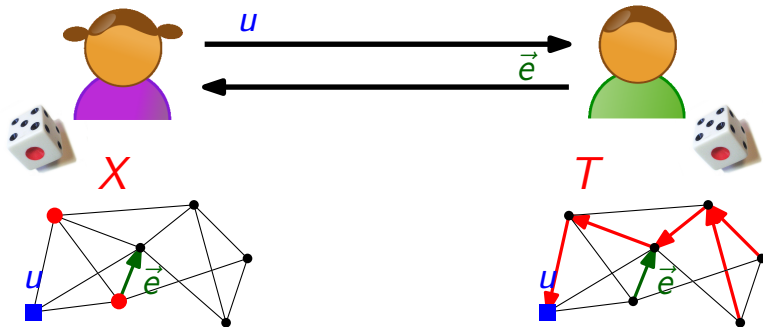
アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき,

- (2-3) ボブ: T の有向辺 $\vec{e}$ を1つ一様ランダムに選び,
 $\vec{e}$ の ID と向きを送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (5)

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ

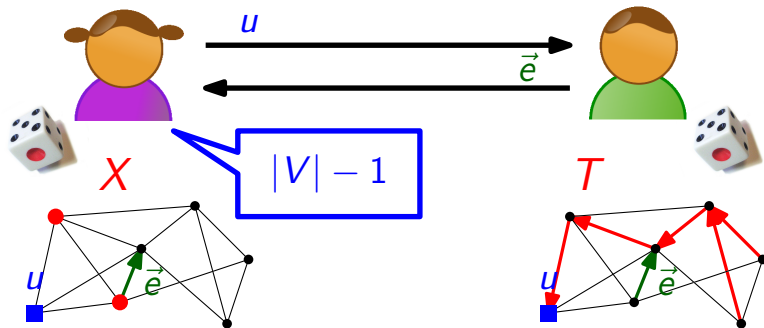
アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき,

- (2-3) ボブ: T の有向辺 $\vec{e}$ を1つ一様ランダムに選び,
 $\vec{e}$ の ID と向きを送る

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — (6)

アリスはファセットを1つ持つ

ボブは頂点を1つ持つ

アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき、

(2-3) アリス： $\vec{e}$ が始点を X に、終点を $V - X$ に持つ有向辺であるならば、
 $|V| - 1$ を出力 (そうでないときは、0 を出力)

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — プロトコルのまとめ

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る
- (1) 辺 e に対応する場合
 - (1-1) A : e の ID を送る
 - (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
 - (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る
 - (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
 - (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る
 - (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る
- (1) 辺 e に対応する場合
 - (1-1) A : e の ID を送る
 - (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
 - (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る
 - (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
 - (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る
 - (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

通信複雑度

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

1 bit

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る
- (1) 辺 e に対応する場合
 - (1-1) A : e の ID を送る
 - (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
 - (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る
 - (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
 - (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る
 - (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

通信複雑度 ≤ 1

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

(0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る

1 bit

(1) 辺 e に対応する場合

(1-1) A : e の ID を送る

 $\lceil \log_2 |E| \rceil$ bits

(1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了

(2) 頂点部分集合 X に対応する場合

(2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る

(2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける

(2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び,
 $\vec{e}$ の ID と向きを送る

(2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば,
 $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

通信複雑度 $\leq 1 + \max\{\lceil \log_2 |E| \rceil, \quad \}$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る 1 bit
- (1) 辺 e に対応する場合
- (1-1) A : e の ID を送る $\lceil \log_2 |E| \rceil$ bits
- (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
- (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る $\lceil \log_2 |V| \rceil$ bits
- (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
- (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る
- (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

$$\text{通信複雑度} \leq 1 + \max\{\lceil \log_2 |E| \rceil, \lceil \log_2 |V| \rceil\}$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る 1 bit
- (1) 辺 e に対応する場合
 - (1-1) A : e の ID を送る $\lceil \log_2 |E| \rceil$ bits
 - (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
 - (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る $\lceil \log_2 |V| \rceil$ bits
 - (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
 - (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る $\lceil \log_2 |E| \rceil + 1$ bits
 - (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

$$\text{通信複雑度} \leq 1 + \max\{\lceil \log_2 |E| \rceil, \lceil \log_2 |V| \rceil + \lceil \log_2 |E| \rceil + 1\}$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 通信複雑度

- (0) A : 持っているファセットが辺と頂点部分集合のどちらに対応するのか送る 1 bit
- (1) 辺 e に対応する場合
 - (1-1) A : e の ID を送る $\lceil \log_2 |E| \rceil$ bits
 - (1-2) B : $e \in T$ ならば 1, $e \notin T$ ならば 0 を出力して終了
- (2) 頂点部分集合 X に対応する場合
 - (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る $\lceil \log_2 |V| \rceil$ bits
 - (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
 - (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び, $\vec{e}$ の ID と向きを送る $\lceil \log_2 |E| \rceil + 1$ bits
 - (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば, $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

$$\begin{aligned}
 \text{通信複雑度} &\leq 1 + \max\{\lceil \log_2 |E| \rceil, \lceil \log_2 |V| \rceil + \lceil \log_2 |E| \rceil + 1\} \\
 &\leq \log_2 |V| + \log_2 |E| + O(1)
 \end{aligned}$$

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 正当性 (1)

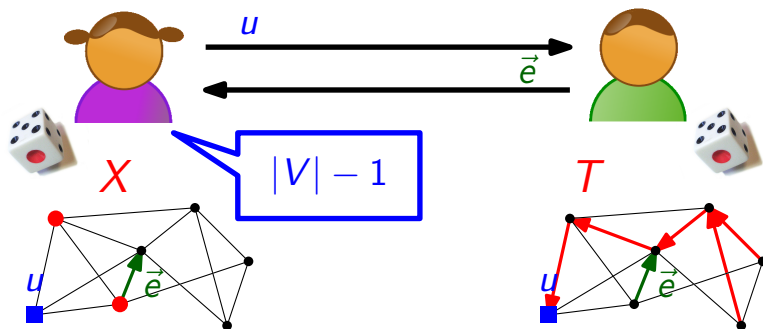
(2) 頂点部分集合 X に対応する場合

- (2-1) A : 頂点 $u \in X$ を任意に選び, u の ID を送る
- (2-2) B : T の辺を u に向かって向き付ける
- (2-3) B : T の有向辺 $\vec{e}$ を一様ランダムに選び,
 $\vec{e}$ の ID と向きを送る
- (2-4) A : $\vec{e}$ が始点を X に, 終点を $V - X$ に持つならば,
 $|V| - 1$ を出力, そうでないときは 0 を出力して終了

復習：アリスの持つファセットが頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対応するとき

- ▶ 出力の期待値 $= |X| - 1 - |E(X) \cap T|$ でなければならない

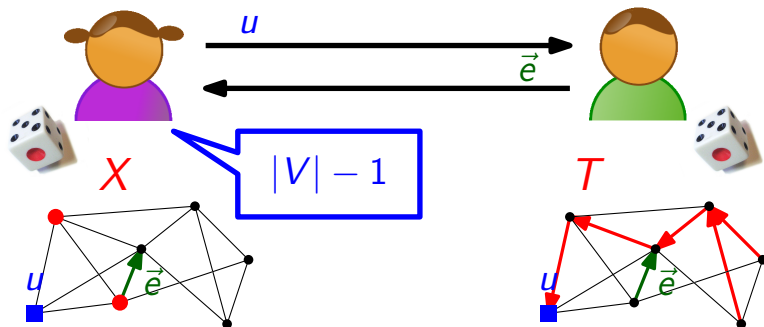
乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 正当性 (2)



- ▶ $\sum_{v \in X} \text{out-deg}(v) = |X| - 1$ (out-deg(v) = v から出る有向辺の総数)
- ▶ $\sum_{v \in X} \text{out-deg}(v) = |E(X) \cap T| + (X \text{ から出る有向辺の総数})$

「 X から出る有向辺」とは、始点を X 、終点を $V - X$ に持つ有向辺のこと

乱択通信プロトコルの例：全域木多面体 — 正当性 (3)



$$\begin{aligned}
 \text{出力の期待値} &= \frac{X \text{ から出る有向辺の総数}}{\text{有向辺の総数}} \cdot (|V| - 1) \\
 &= \frac{|X| - 1 - |E(X) \cap T|}{|V| - 1} \cdot (|V| - 1) \\
 &= |X| - 1 - |E(X) \cap T|
 \end{aligned}$$

- ① 組合せ最適化問題の拡張定式化
 - 拡張定式化の定義
 - 拡張定式化の例
- ② 行列の分解
- ③ 乱択通信プロトコル
- ④ まとめ，文献案内，未解決問題

スラック行列と凸多面体の拡張

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$, そのスラック行列 $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

定理

次は同値

- ▶ P はサイズ r の拡張を持つ
- ▶ ある非負行列 $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$ と $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ が存在して

$$S = FV$$

(Yannakakis '91)

- ▶ S を平均的に計算する通信プロトコルで,
通信複雑度が $\lceil \log_2 r \rceil$ ビットのものが存在
(Faenza, Fiorini, Grappe, Tiwary '12, Zhang '12)

多項式サイズの拡張を持つ多面体

- ▶ 全域木 (Martin '91)
- ▶ 平面的グラフの最大マッチング (Barahona '93)
- ▶ 定数種数グラフの最大マッチング (Gerards '91)
- ▶ 比較可能グラフの安定集合 (Yannakakis '91)
- ▶ 置換多面体 (Goemans '15+)

多項式サイズの拡張を持つ多面体

- ▶ 全域木 (Martin '91)
- ▶ 平面的グラフの最大マッチング (Barahona '93)
- ▶ 定数種数グラフの最大マッチング (Gerards '91)
- ▶ 比較可能グラフの安定集合 (Yannakakis '91)
- ▶ 置換多面体 (Goemans '15+)

未解決問題

理想グラフの安定集合多面体は多項式サイズの拡張を持つか？
(現状: $n^{O(\log n)}$, Yannakakis '91)

多項式サイズの拡張を持つ多面体

- ▶ 全域木 (Martin '91)
- ▶ 平面的グラフの最大マッチング (Barahona '93)
- ▶ 定数種数グラフの最大マッチング (Gerards '91)
- ▶ 比較可能グラフの安定集合 (Yannakakis '91)
- ▶ 置換多面体 (Goemans '15+)

未解決問題

理想グラフの安定集合多面体は多項式サイズの拡張を持つか？
(現状: $n^{O(\log n)}$, Yannakakis '91)

これらはすべて多項式時間で解ける組合せ最適化問題に付随する多面体

多項式サイズの拡張を持たない (と証明されている) 多面体

- ▶ ハミルトン閉路 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 安定集合 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 最大カット (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

- ▶ マトロイド (Rothvoß '13)
- ▶ 完全マッチング (Rothvoß '14)

多項式サイズの拡張を持たない (と証明されている) 多面体

- ▶ ハミルトン閉路 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 安定集合 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 最大カット (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

- ▶ マトロイド (Rothvoß '13)
- ▶ 完全マッチング (Rothvoß '14)

多項式時間で解ける組合せ最適化問題に付随する多面体の
拡張定式化がコンパクトにならない場合がある !!

多項式サイズの拡張を持たない (と証明されている) 多面体

- ▶ ハミルトン閉路 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 安定集合 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 最大カット (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

- ▶ マトロイド (Rothvoß '13)
- ▶ 完全マッチング (Rothvoß '14)

多項式時間で解ける組合せ最適化問題に付随する多面体の
拡張定式化がコンパクトにならない場合がある !!

Rothvoß '13

拡張定式化のサイズが指数関数的になるマトロイドが**存在する**

多項式サイズの拡張を持たない (と証明されている) 多面体

- ▶ ハミルトン閉路 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 安定集合 (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 最大カット (Fiorini et al. '12, '15)
- ▶ 多くの NP 困難問題 (Avis, Tiwary '13)

- ▶ マトロイド (Rothvoß '13)
- ▶ 完全マッチング (Rothvoß '14)

多項式時間で解ける組合せ最適化問題に付随する多面体の
拡張定式化がコンパクトにならない場合がある !!

Rothvoß '13

拡張定式化のサイズが指数関数的になるマトロイドが**存在する**

未解決問題

どのようなマトロイドなのか, 分からない

多項式サイズの拡張を持つと分かっているマトロイド多面体

- ▶ 一様マトロイド, 分割マトロイド (簡単)
- ▶ 横断マトロイド, ガンモイド (最大流)
- ▶ グラフ的マトロイド (Martin '91)
- ▶ 疎性マトロイド (Iwata, Kamiyama, Katoh, Kijima, Okamoto '14)
- ▶ 正則マトロイド (Kaibel, Lee, Walter, Weltge '15)

講義中の文献

- ▶ David Avis, Hans Raj Tiwary: On the Extension Complexity of Combinatorial Polytopes. ICALP (1) 2013: 57-68 (Full version to appear in Math. Program.)
- ▶ Egon Balas: Disjunctive Programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points. Discrete Applied Mathematics 89(1-3): 3-44 (1998) (Technical Report in 1974)
- ▶ Egon Balas: Projection, Lifting and Extended Formulation in Integer and Combinatorial Optimization. Annals OR 140(1): 125-161 (2005)
- ▶ Egon Balas, Sebastián Ceria, Gérard Cornuéjols: A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs. Math. Program. 58: 295-324 (1993)
- ▶ Francisco Barahona: On cuts and matchings in planar graphs. Math. Program. 60: 53-68 (1993)
- ▶ Robert D. Carr and Goran Konjevod: Polyhedral combinatorics. Tutorials on Emerging Methodologies and Applications in Operations Research, Chapter 2. Springer, 2004
- ▶ Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, Giacomo Zambelli: Extended formulations in combinatorial optimization. Annals OR 204(1): 97-143 (2013)
- ▶ Jack Edmonds: Matroids and the greedy algorithm. Math. Program. 1(1): 127-136 (1971)

- ▶ Yuri Faenza, Samuel Fiorini, Roland Grappe, Hans Raj Tiwary: Extended Formulations, Nonnegative Factorizations, and Randomized Communication Protocols. ISCO 2012: 129-140 (Full version to appear in Math. Program.)
- ▶ Samuel Fiorini, Serge Massar, Sebastian Pokutta, Hans Raj Tiwary, Ronald de Wolf: Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds. STOC 2012: 95-106
- ▶ Samuel Fiorini, Serge Massar, Sebastian Pokutta, Hans Raj Tiwary, Ronald de Wolf: Exponential Lower Bounds for Polytopes in Combinatorial Optimization. J. ACM 62(2): 17 (2015)
- ▶ Albertus M. H. Gerards: Compact systems for T -join and perfect matching polyhedra of graphs with bounded genus. Oper. Res. Lett., 10(7):377-382 (1991)
- ▶ Michel X. Goemans: Smallest compact formulation for the permutahedron. Math. Program., to appear.
- ▶ Satoru Iwata, Naoyuki Kamiyama, Naoki Katoh, Shuji Kijima, Yoshio Okamoto: Extended Formulations for Sparsity Matroids. CoRR abs/1403.7272 (2014) (Full version to appear in Math. Program.)
- ▶ Volker Kaibel: Extended Formulations in Combinatorial Optimization Optima 85: 2-7 (2011)

- ▶ Volker Kaibel, Jon Lee, Matthias Walter, Stefan Weltge: Extended Formulations for Independence Polytopes of Regular Matroids. CoRR abs/1504.03872 (2015)
- ▶ R. Kipp Martin: Using separation algorithms to generate mixed integer Oper. Res. Lett., 10(3):119-128 (1991)
- ▶ Ankur Moitra: An Almost Optimal Algorithm for Computing Nonnegative Rank. SODA 2013: 1454-1464
- ▶ Thomas Rothvoß: Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations. Math. Program. 142(1-2): 255-268 (2013)
- ▶ Thomas Rothvoß: The matching polytope has exponential extension complexity. STOC 2014: 263-272
- ▶ François Vanderbeck, Laurence A. Wolsey: Reformulation and Decomposition of Integer Programs. 50 Years of Integer Programming 2010: 431-502
- ▶ Stephen A. Vavasis: On the Complexity of Nonnegative Matrix Factorization. SIAM Journal on Optimization 20(3): 1364-1377 (2009)
- ▶ Mihalis Yannakakis: Expressing Combinatorial Optimization Problems by Linear Programs. J. Comput. Syst. Sci. 43(3): 441-466 (1991)
- ▶ Shengyu Zhang: Quantum strategic game theory. ITCS 2012: 39-59

演習問題に関する文献

- 1 Balas の離接計画法 (disjunctive programming) による. 上の Balas ('98) 参照.
- 2 鏡像の利用による拡張の構成は次の論文による. より一般的に, コクセター群の枠組みで記述している.

- ▶ Volker Kaibel, Kanstantsin Pashkovic: Constructing Extended Formulations from Reflection Relations. Facets of Combinatorial Optimization – Festschrift for Martin Grötschel: 77-100 (2013)

正多角形に対する拡張をはじめて陽に与えたのは, Ben-Tal と Nemirovski による次の論文である.

- ▶ Aharon Ben-Tal, Arkadi Nemirovski: On Polyhedral Approximations of the Second-Order Cone. Math. Oper. Res. 26(2): 193-205 (2001)

正多角形のスラック行列の分解を与え, 正多角形ではない凸 n 角形の拡張複雑度が $\Omega(\sqrt{n})$ になりうることを示したのが次の論文である.

- ▶ Samuel Fiorini, Thomas Rothvoß, Hans Raj Tiwary: Extended Formulations for Polygons. Discrete & Computational Geometry 48(3): 658-668 (2012)

凸 n 角形の拡張複雑度が $\Omega(n)$ になりうるかどうかは未解決.

3 次に挙げる Cohen と Rothblum の論文に書いてある.

- ▶ Joel E. Cohen, Uriel G. Rothblum: Nonnegative ranks, decompositions, and factorizations of nonnegative matrices. Linear Algebra and its Appl. 190(1): 149-168 (1993)

これは非負行列分解に関する基本文献.

4 これも Cohen と Rothblum の論文 ('93) に書いてある.

5 これは Yannakakis '91 の論文に書いてある証明に沿っている.

6 プロトコルはオリジナル. ファセット表現は次の論文による.

- ▶ R. G. Jeroslow. On defining sets of vertices of the hypercube by linear inequalities. Discrete Mathematics, 11:119-124, 1975.