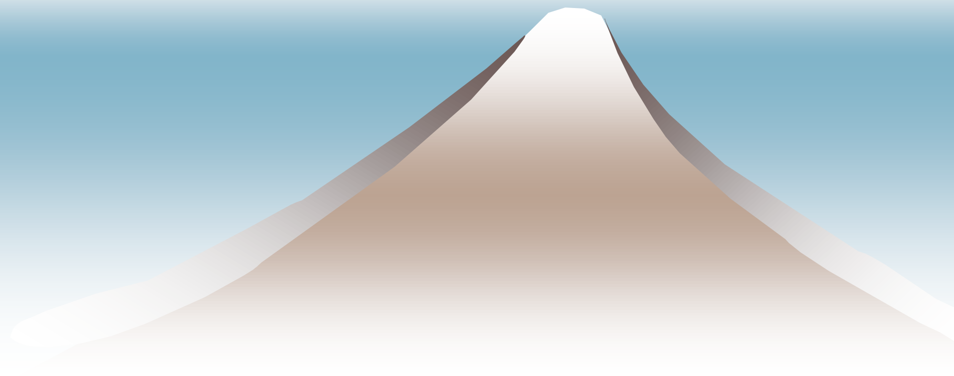
閉曲面上のグラフのハミルトン性

小関 健太
（国立情報学研究所）
（JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト）



Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinbergの必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(9:30 – 10:30)

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

- ✓ Thomassenによるもの
- ✓ 河原林&小関による新しいもの

(10:50 – 11:50)

(IV) Tutte 閉路・道の利用

- ✓ 3-連結3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

(13:30 – 14:30)

注：上記は予定

Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinberg の必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

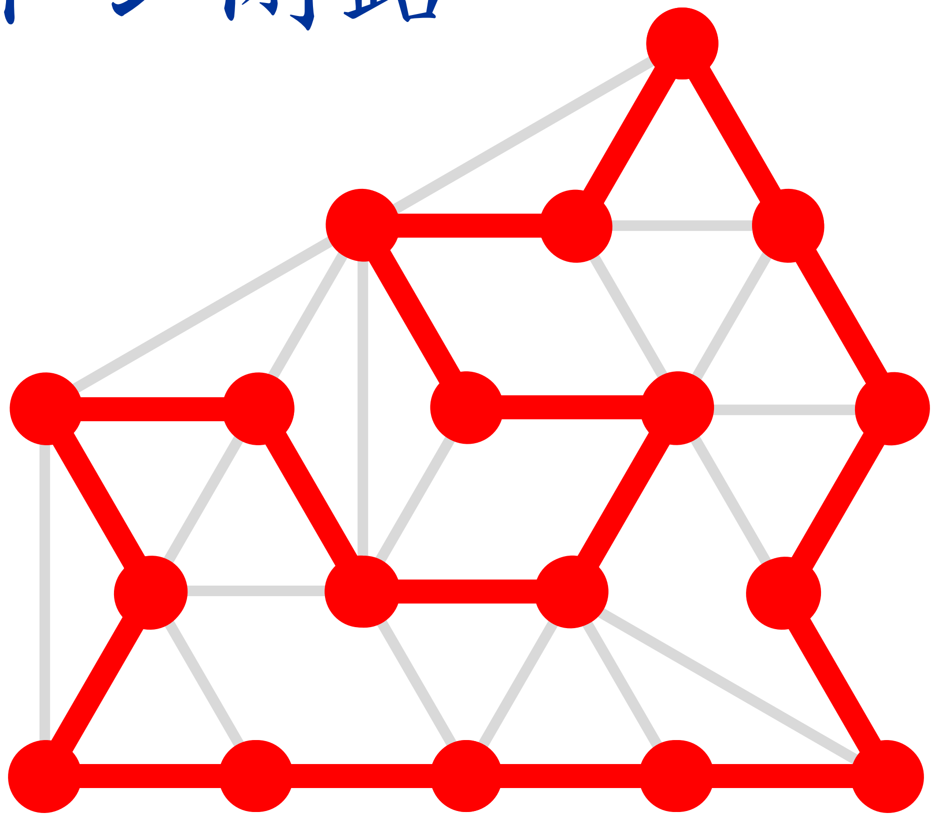
- ✓ Thomassen によるもの
- ✓ 河原林 & 小関による新しいもの

(IV) Tutte 閉路・道の利用

- ✓ 3-連結 3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

ハミルトン閉路

G のハミルトン閉路
$\Updownarrow$
G の全頂点を通る閉路



$\bullet \in V(G)$ 　 $\in E(G)$

ハミルトン閉路

Tait (1884) :

任意の 3-連結 3-正則平面グラフが ハミルトン閉路を持つ

False

$\Downarrow$

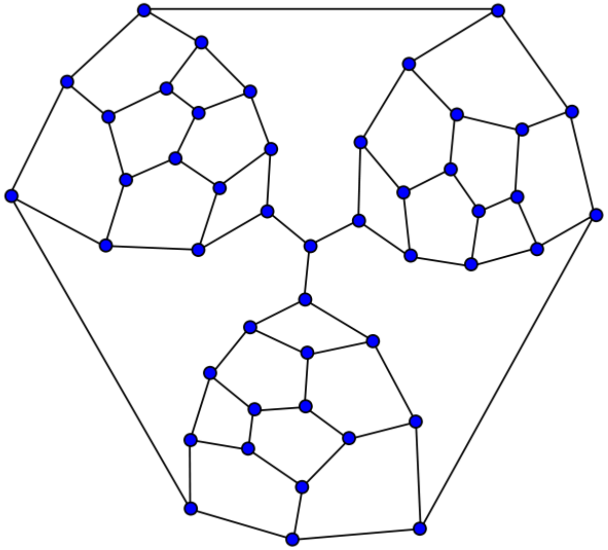
任意の平面グラフは 4-彩色を持つ

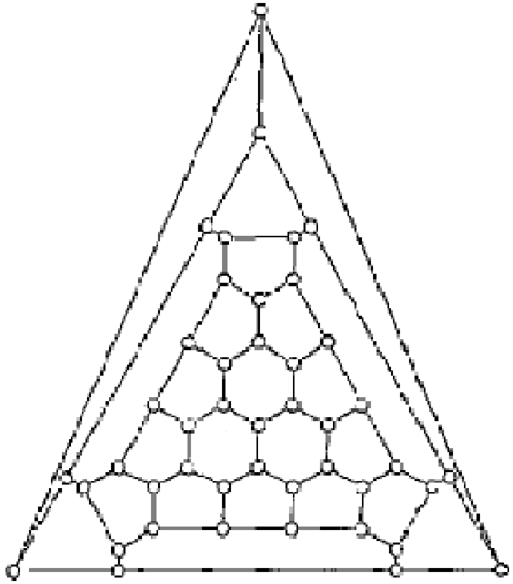
True (4色定理)

演習 0.：上の Tait の定理を示せ.

ハミルトン閉路

演習1.：





上はどちらも 3-連結 3-正則平面グラフである．

これらがハミルトン閉路を<u>持たない</u>ことを示せ． (Tutte, `46, `72)

左：https://en.wikipedia.org/wiki/Tutte_graph

右：M.N. Ellingham, Spanning paths, cycles and walks for graphs on surfaces, Congr. Numer. 115 (1996) 55–90.

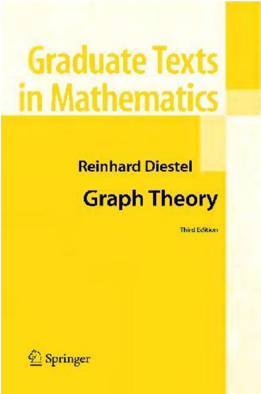
平面と閉曲面

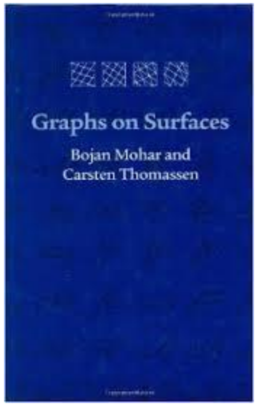
平面：$\mathbb{R}^2$ のこと

平面グラフ：平面に辺の交差なく描かれたグラフ

面など位相的なものの定義は簡単ではないが，
本講演では直観に従う．

参考：





R. Diestel, *Graph Theory*

B. Mohar & C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*

平面と閉曲面

閉曲面：連結でコンパクトなハウスドルフ空間で
任意の点がディスクと同相な近傍を持つもの．

↓

閉曲面の分類定理を仮定する．

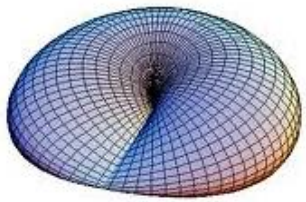
任意の閉曲面は，球面に適当な数のハンドルと
クロスキャップを付けたものと同相である．

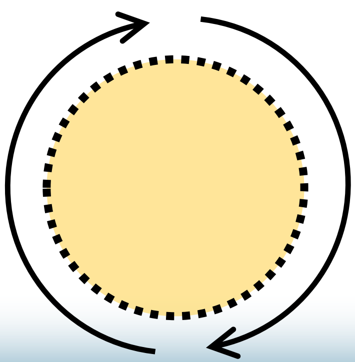
平面と閉曲面

$\chi(F^2)$: 閉曲面 F^2 のオイラー標数

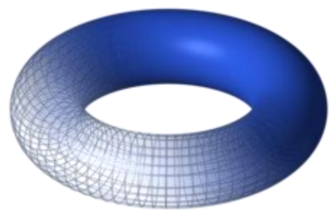
$\chi(S^2) = 2 \longrightarrow$ 球面 (平面) のオイラー標数は 2

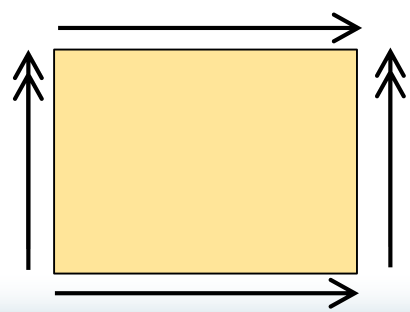
$\chi(P^2) = 1$
射影平面



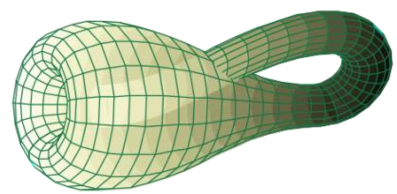


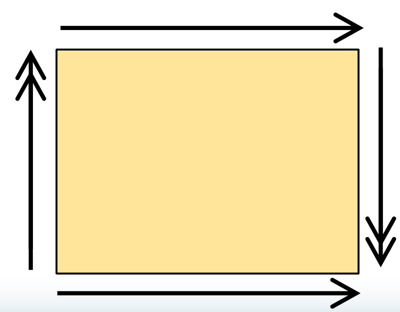
$\chi(T^2) = 0$
トーラス





$\chi(K^2) = 0$
Klein-ボトル





. . .

The pictures come from Wikipedia

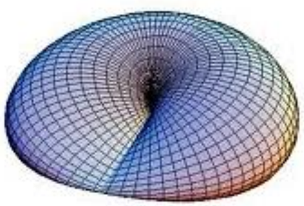
平面と閉曲面

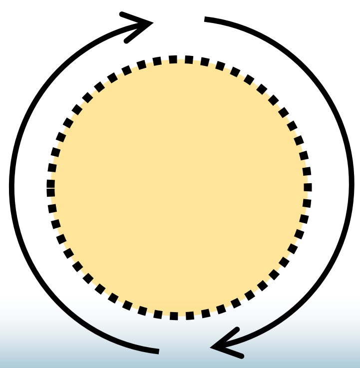
$\chi(F^2)$：閉曲面 F^2 のオイラー標数

$\forall G$: 閉曲面 F^2上のグラフで, $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \geq \chi(F^2)$

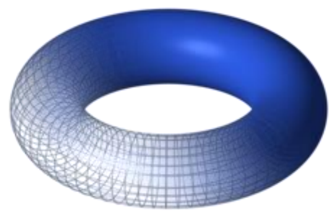
$\chi(S^2) = 2 \longrightarrow$ 球面(平面)のオイラー標数は 2

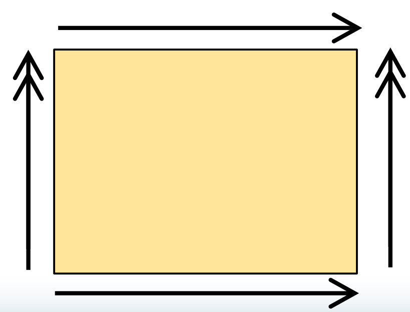
$\chi(P^2) = 1$
射影平面



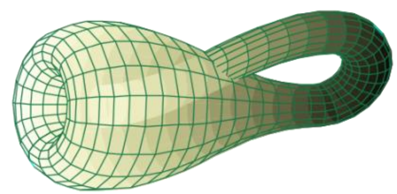


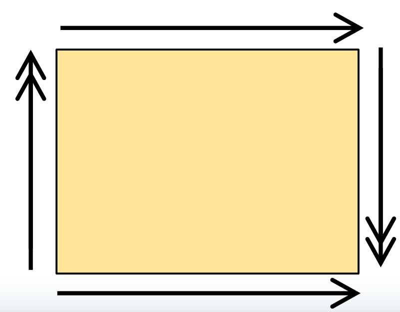
$\chi(T^2) = 0$
トーラス





$\chi(K^2) = 0$
Klein-ボトル





. . .

The pictures come from Wikipedia

Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinberg の必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

- ✓ Thomassen によるもの
- ✓ 河原林 & 小関による新しいもの

(IV) Tutte 閉路・道の利用

- ✓ 3-連結 3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

ハミルトン閉路の必要条件

演習2.：下の Grinberg の定理 (`68) を示せ．

G : 平面グラフでハミルトン閉路 C を持つ

$F_{\mathrm{int}}, F_{\mathrm{out}}$ ：それぞれ，C の内側，外側の面の集合

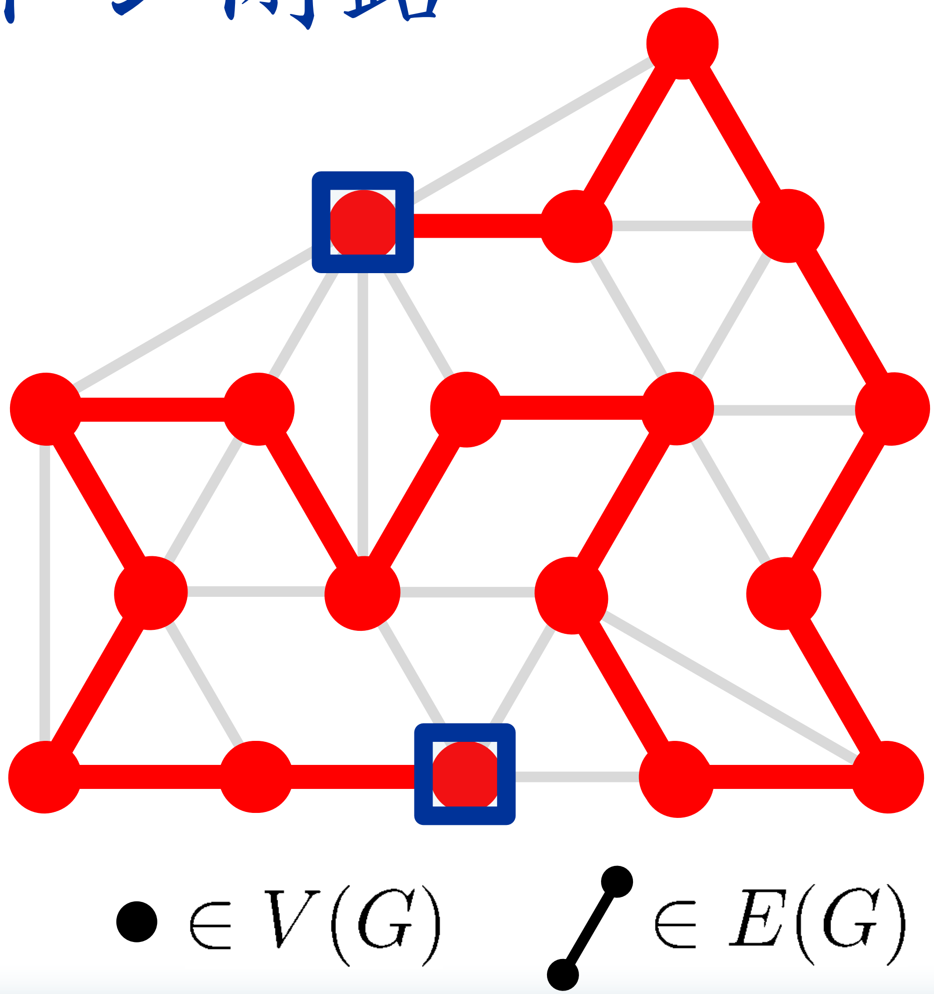
$|f|$ ：面 f の境界の長さ

このとき，$\boxed{\displaystyle\sum_{f\in F_{\mathrm{out}}}(|f|-2) = \sum_{f\in F_{\mathrm{out}}}(|f|-2)}$ が成り立つ．

ハミルトン閉路

G のハミルトン閉路
$\Updownarrow$
G の全頂点を通る閉路

G のハミルトン道
$\Updownarrow$
G の全頂点を通る道



ハミルトン閉路

G ：ハミルトン連結

$\Updownarrow$

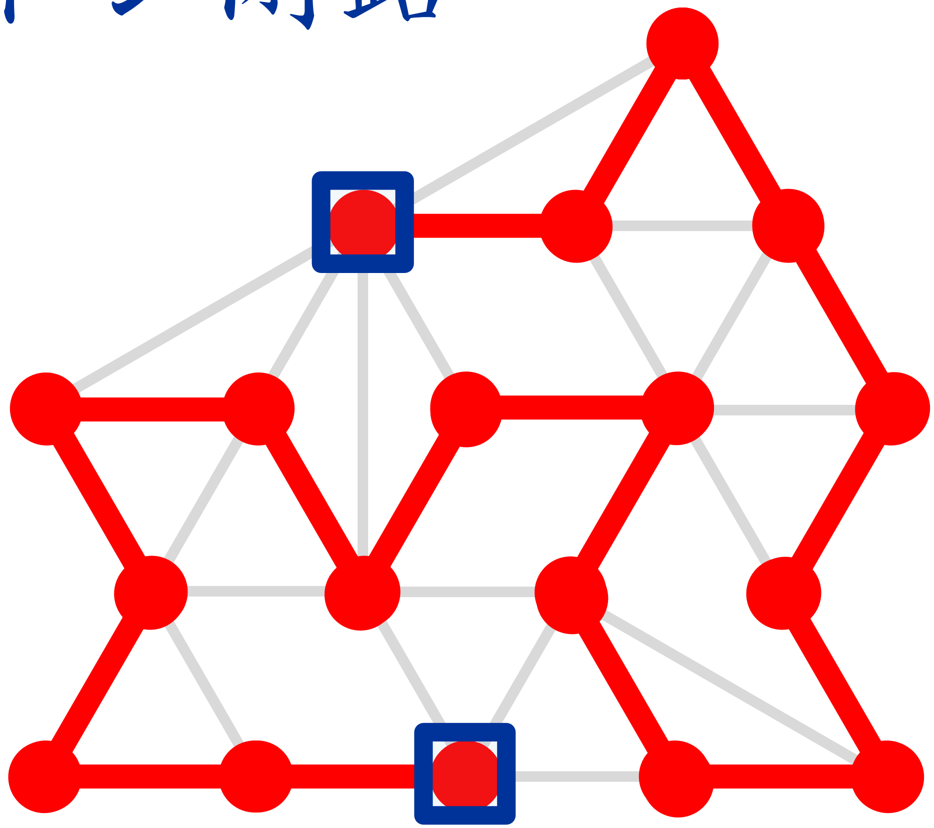
$^\forall$2頂点の間に

$^\exists$ハミルトン道

G ：ハミルトン連結

$\Rightarrow$ $^\exists$ハミルトン閉路

$\Rightarrow$ $^\exists$ハミルトン道

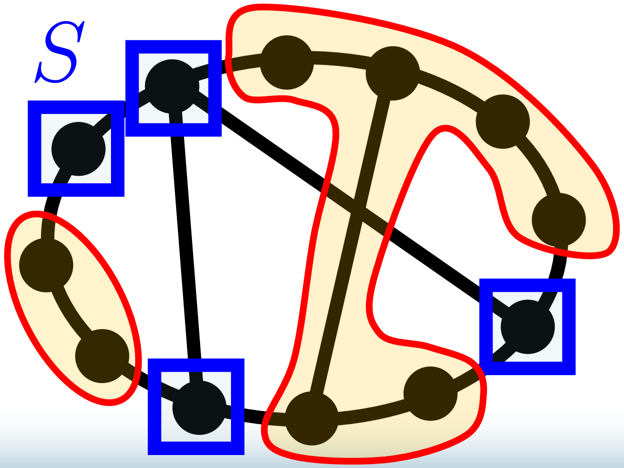


$\bullet \in V(G)$ $\in E(G)$

ハミルトン性とタフネス

$\varepsilon(\mathcal{P}) = -1$	$\mathcal{P}$　：ハミルトン道を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 0$	ハミルトン閉路を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 1$	ハミルトン連結

必要条件　$\forall S$：切断集合，$G-S$ の成分数 $\leq |S| - \varepsilon$



演習 8.：上のハミルトン連結
　　の場合を示せ

$\max\{\varepsilon : G$ は上の式を満たす$\}$

: scattering number of G

ハミルトン性とタフネス

タフネス(型)条件:

$\boxed{(*)\ \forall S: \text{切断集合}, (G-S \text{ の成分数}) \le a|S| + b}$

タフネス型条件を必要条件とする性質たち

(a,b)	
$(1,-t+1)$	t-leaf 連結
$(1,-t)$	$^{\forall}t$ 頂点を除いても ∃H-閉路
$(1,-1)$	ハミルトン連結
$(1,0)$	∃ハミルトン閉路
$(1,1)$	∃ハミルトン道
$(1,t-1)$	∃(葉の数) $\le t$ の全域木

(a,b)	
$(k,0)$	∃各頂点を $\le k$ 回通る全域閉歩道
$(k,0)$	∃ $\le k$ 個の閉路による頂点被覆
$(k,0)$	k-prism ハミルトニアン
$(k-1,1)$	∃最大次数 $\le k$ の全域木
$(k-1,t+1)$	∃ k からの超過数 $\le t$ の全域木

関連有：∃完全マッチング, matching extension など

ハミルトン性とタフネス

タフネス(型)条件:

$\boxed{(*)\ \forall S\text{: 切断集合}, (G-S \text{ の成分数}) \leq a|S|+b}$

タフネス型条件は十分条件となるだろうか？

→　一般には難しい

予想 (Chvátal `73)

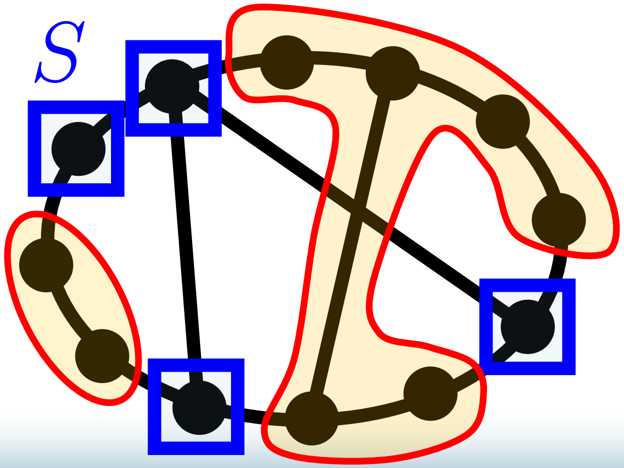
∃t : 正の定数 s.t. $(*)$を $(a,b)=(\frac{1}{t},0)$ で満たすような任意のグラフ G はハミルトン閉路を持つ

演習番外1.：ハミルトン閉路を持たないグラフで，なるべく大きい t で上を満たさないものを見つけよ．

ハミルトン性とタフネス

$\varepsilon(\mathcal{P}) = -1$	$\mathcal{P}$ ：ハミルトン道を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 0$	ハミルトン閉路を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 1$	ハミルトン連結

必要条件 $\boxed{\forall S: \text{切断集合，} G - S \text{ の成分数} \leq |S| - \varepsilon}$



G : k-連結

$\Leftrightarrow \forall S: \leq k-1$ 点頂点集合,

$G - S$: 連結

閉曲面上のグラフとタフネス

$\forall F^2$: 閉曲面
$\forall G$: 4−連結グラフ on F^2
$\forall S$: G の頂点集合,

$$\boxed{G-S \text{ の成分数} \le |S| - \chi(F^2)}$$

$\forall F^2$: 閉曲面
$\exists G$: 4−連結三角形分割
$\exists S$: G の頂点集合,
s.t.

$$\boxed{G-S \text{ の成分数} = |S| - \chi(F^2)}$$

必要条件

$$\boxed{G-S \text{ の成分数} \le |S| - \varepsilon}$$

$\varepsilon \le \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK
$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も不成立

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面 $\chi = 2$	射影平面 $\chi = 1$	トーラス $\chi = 0$	K-bottle $\chi = 0$	N_3 $\chi = -1$	その他 $\chi < -1$
H-道 $\varepsilon = -1$						×
H-閉路 $\varepsilon = 0$					×	×
H-連結 $\varepsilon = 1$			×	×	×	×

$\varepsilon \leq \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK

$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も 不成立

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面	射影平面	トーラス $\chi = 0$	K-bottle $\chi = 0$	N_3 $\chi = -1$	その他 $\chi < -1$
$\varepsilon = -$	○	○	○ Thomas, Yu & Zang ('05)	○ 河原林 & Oz ('15+)	?	×
H−閉路 $\varepsilon = 0$	○ Tutte ('56)	○ Thomas & Yu ('94)	? Grunbaum('70) Nash-Williams('73)	?	×	×
H−連結 $\varepsilon = 1$	○ Thomassen ('83)	○ 河原林 & Oz ('14)	×	×	×	×

千葉 & 西関 (`89) による
O(n)-アルゴリズム

4-連結な閉曲面上のグラフ

予想（Grunbaum `70, Nash-Williams `73）

$\forall G$: トーラス上の 4-連結グラフ

$\Rightarrow$ $\exists$ハミルトン閉路

この予想がなぜ難しいのか？

・閉曲面（及び埋め込まれたグラフ）の複雑化

・既存の手法の問題点

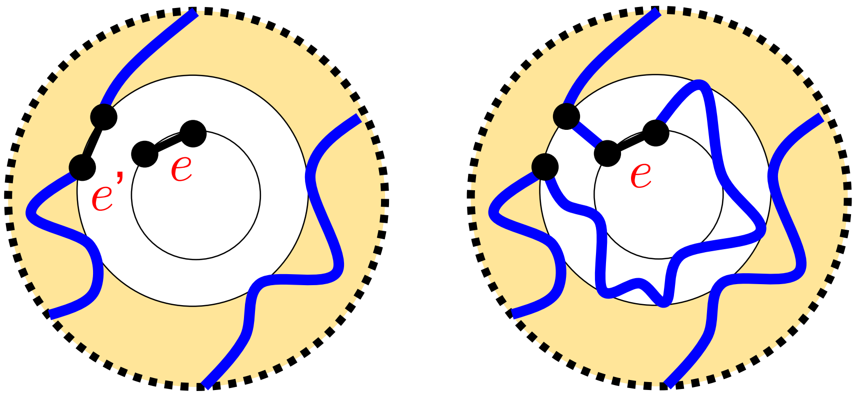
「$\exists$ H-閉路（$\varepsilon = 0$）」を示すために

$\varepsilon = 1$ の性質を示す

4-連結な閉曲面上のグラフ

例：射影平面上の 4-連結グラフ

任意の辺 e に対し
e を通る H-閉路が存在する
($\varepsilon = 1$) を示す.
(Due to Thomas & Yu, `94)



・既存の手法の問題点

「∃ H-閉路 ($\varepsilon = 0$)」を示すために

$\varepsilon = 1$ の性質を示す

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面 $\chi = 2$	射影平面 $\chi = 1$	トーラス $\chi = 0$	K-bottle $\chi = 0$	N_3 $\chi = -1$	その他 $\chi < -1$
H−道 $\varepsilon = -1$	○	○	○ Thomas, Yu & Zang ('05)	○ 河原林 & Oz ('15+)	?	×
H−閉路 $\varepsilon = 0$	○ Tutte ('56)	○ Thomas & Yu ('94)	? Grunbaum('70) Nash-Williams('73)	?	×	×
H−連結 $\varepsilon = 1$	○ Thomassen ('83)	○ 河原林 & Oz ('14)	×	×	×	×

4-連結な閉曲面上のグラフ

定理（藤沢，中本，小関 `12）

$\forall G$: トーラス上の 4-連結グラフ
　$\exists S$: 下の等号が成り立つ $\Rightarrow$ $\exists$ハミルトン閉路

G : トーラス上の 4-連結グラフ $\Rightarrow$ $\boxed{(G-S\text{ の成分数}) \leq |S|}$

$\exists S$: 等号が成り立つ $\rightarrow$ 既存の手法が使えない

・既存の手法の問題点
　「$\exists$ H-閉路 ($\varepsilon = 0$)」を示すために
　　$\varepsilon = 1$ の性質を示す

4-連結な閉曲面上のグラフ

定理（藤沢，中本，小関 `12）

$\forall G$: トーラス上の 4-連結グラフ
$\exists S$: 下の等号が成り立つ $\Rightarrow$ $\exists$ハミルトン閉路

G : トーラス上の 4-連結グラフ $\Rightarrow$ $\boxed{(G-S \text{ の成分数}) \leq |S|}$

$\exists S$: 等号が成り立つ $\rightarrow$ 既存の手法が使えない

よって，$\boxed{(G-S \text{ の成分数}) \leq |S|-1}$ のグラフ G だけ

考えればよく，既存の手法が使えるかも??

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面 $\chi = 2$	射影平面 $\chi = 1$	トーラス $\chi = 0$	K-bottle $\chi = 0$	N_3 $\chi = -1$	その他 $\chi < -1$
H−道 $\varepsilon = -1$	○	○	○ Thomas, Yu & Zang ('05)	○ 河原林 & Oz ('15+)	**?**	×
H−閉路 $\varepsilon = 0$	○ Tutte ('56)	○ Thomas & Yu ('94)	**?** Grunbaum('70) Nash-W	**?**	×	×
H−連結 $\varepsilon = 1$	○ Thomassen ('83)	○ 河原林 & Oz ('14)	×	×	×	×
$\varepsilon = 2$						

$\varepsilon \leq \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK

$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も 不成立

4-連結平面グラフと $\varepsilon = 2$

2-H : $\forall$頂点 x, y に対し, $G - \{x, y\}$ が H-閉路を持つ

1-HC : $\forall$頂点 x に対し, $G - x$ が H-連結

必要条件

$\boxed{(G - S \text{ の成分数}) \leq |S| - 2}$

G : 1-HC $\not\Leftrightarrow$ G : 2-H

演習 8'. : 上の必要条件を示せ.

- $\forall$4-連結平面グラフは 2-H (Tomas & Yu, `94)
- $\forall$4-連結平面グラフは 1-HC (Sanders, `97)

ハミルトン閉路

G が 1-ハミルトン連結 (1-HC)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の頂点 x に対し，$G - x$ がハミルトン連結.

演習 4.：これに対し，以下を示せ.

(I) 任意の 4-連結平面グラフは 1-ハミルトン連結である.

(II) 平面グラフの 1-ハミルトン連結性の判定問題は P である.

(III) 平面グラフのハミルトン連結性の判定問題はNP-完全である.

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面 $\chi=2$	射影平面 $\chi=1$	トーラス $\chi=0$	K-bottle $\chi=0$	N_3 $\chi=-1$	その他 $\chi<-1$
H−道 $\varepsilon=-1$	○	○	○ Thomas, Yu & Zang ('05)	○ 河原林 & Oz ('15+)	?	×
H−閉路 $\varepsilon=0$	○ Tutte ('56)	○ Thomas & Yu ('94)	? Grunbaum('70) Nash-W	?	×	×
H−連結 $\varepsilon=1$	○ Thomassen ('83)	○ 河原林 & Oz ('14)	×	×	×	×
$\varepsilon=2$	○	×				

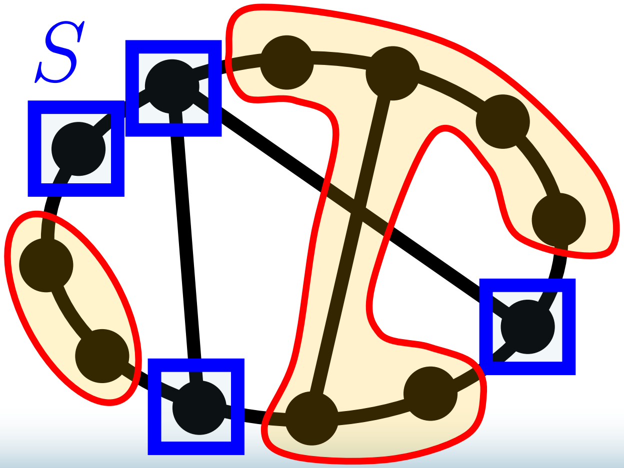
$\varepsilon \leq \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK

$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も不成立

ハミルトン性とタフネス

$\varepsilon(\mathcal{P}) = -1$	$\mathcal{P}$：ハミルトン道を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 0$	ハミルトン閉路を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 1$	ハミルトン連結

必要条件 $\forall S$：切断集合，$G - S$ の成分数 $\leq |S| - \varepsilon$



$\mathcal{P}$：$\exists$(葉の数) $\leq t$ の全域木 のとき

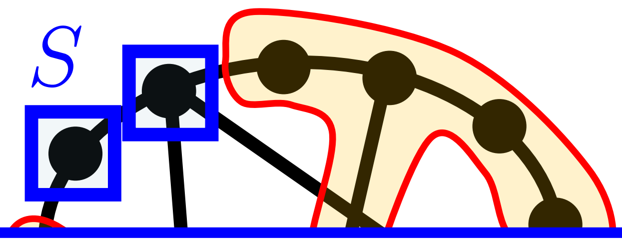
$$\boxed{\varepsilon(\mathcal{P}) = -t+1}$$

で必要条件が成り立つ

ハミルトン性とタフネス

$\varepsilon(\mathcal{P}) = -1$	$\mathcal{P}$：ハミルトン道を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 0$	ハミルトン閉路を持つ
$\varepsilon(\mathcal{P}) = 1$	ハミルトン連結

必要条件 $\forall S$：切断集合，$G-S$ の成分数 $\leq |S| - \varepsilon$



$\mathcal{P}$: $\exists$(葉の数) $\leq t$ の全域木 のとき

$\boxed{\varepsilon(\mathcal{P}) = -t+1}$

で必要条件が成り立つ

$\varepsilon \leq \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK

$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も不成立

ハミルトン性とタフネス

問題 (Oz, `14)

$\chi = \chi(F^2) < 0$

$\forall F^2$: 閉曲面　$\forall G$: 4-連結グラフ on F^2,

$\Rightarrow \exists$(葉の数) $\leq -\chi + 1$ の全域木

予想 (Mohar `95)

Locally planar

$\forall F^2$: 閉曲面 $\chi = \chi(F^2) < 0$　$\exists r(F^2)$: 定数

s.t. $\forall G$: 4-連結グラフ on F^2,　rep $> r(F^2)$

$\Rightarrow \exists$ 最大次数 ≤ 3 の全域木 s.t. 葉の数 $= O(-\chi)$

4-連結な閉曲面上のグラフ

	平面 $\chi=2$	射影平面 $\chi=1$	トーラス $\chi=0$	K-bottle $\chi=0$	N_3 $\chi=-1$	その他 $\chi<-1$?
H−道 $\varepsilon=-1$	○	○	○ Thomas, Yu & Zang ('05)	○ 河原林 & Oz ('15+)	?	×
H−閉路 $\varepsilon=0$	○ Tutte ('56)	○ Thomas & Yu ('94)	? Grunbaum('70) Nash-Williams ('73)	?	×	×
H−連結 $\varepsilon=1$	○ Thomassen ('83)	○ 河原林 & Oz ('14)	×	×	×	×
$\varepsilon=2$	○	×				

$\varepsilon \le \chi \Rightarrow$ 必要条件は OK

$\varepsilon > \chi \Rightarrow$ 必要条件も不成立