Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinberg の必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

- ✓ Thomassen によるもの
- ✓ 河原林 & 小関による新しいもの

(IV) Tutte 閉路・道の利用

- ✓ 3-連結 3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

C-Tutte 道

C: グラフ G の部分グラフ

T: G の C-Tutte 道

$\Updownarrow$

$\forall B$: $G - V(T)$ の連結成分,

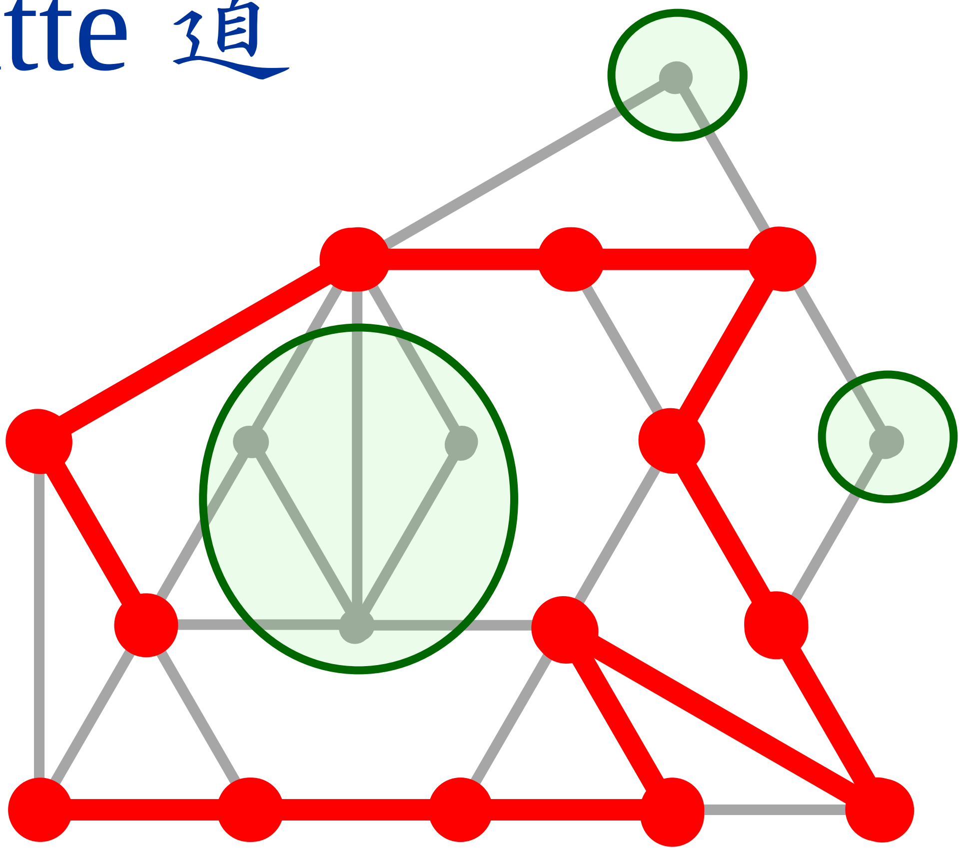
・B の T 上の近傍は ≤ 3 点

・B が C の点を含む

$\Rightarrow$ 近傍は ≤ 2 点

G: 4-連結, $|T| \geq 4$

$\Rightarrow$ T: ハミルトン道



G の C-Tutte 道

(C は外領域の境界閉路)

Tutte 閉路・道の歴史

1931	Whitney	三角形分割に対して
1956	Tutte	
1983	Thomassen	
1986	Chiba & Nishizeki	Thomassen の証明のミスを指摘・修正
90年代前半〜00年代前半	Thomas & Yu (Zang)	さまざまなバリエーション
90年代後半	Sanders	平面以外の閉曲面
2010年代	河原林 & 小関	新しい証明方針
もうすぐ	誰か	Grunbaum, Nash-Williams 予想の解決

Tutte 道

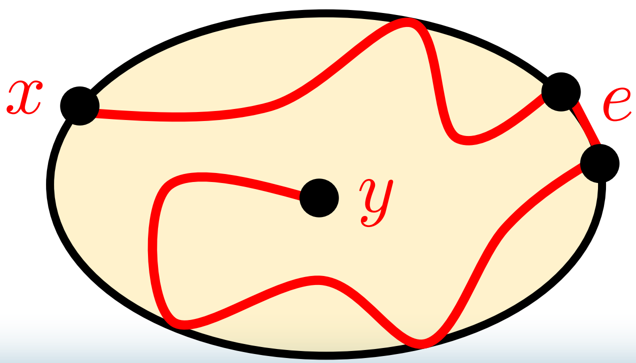
定理 (Thomassen, `83)

G : 平面グラフ,　C : 外領域の境界歩道

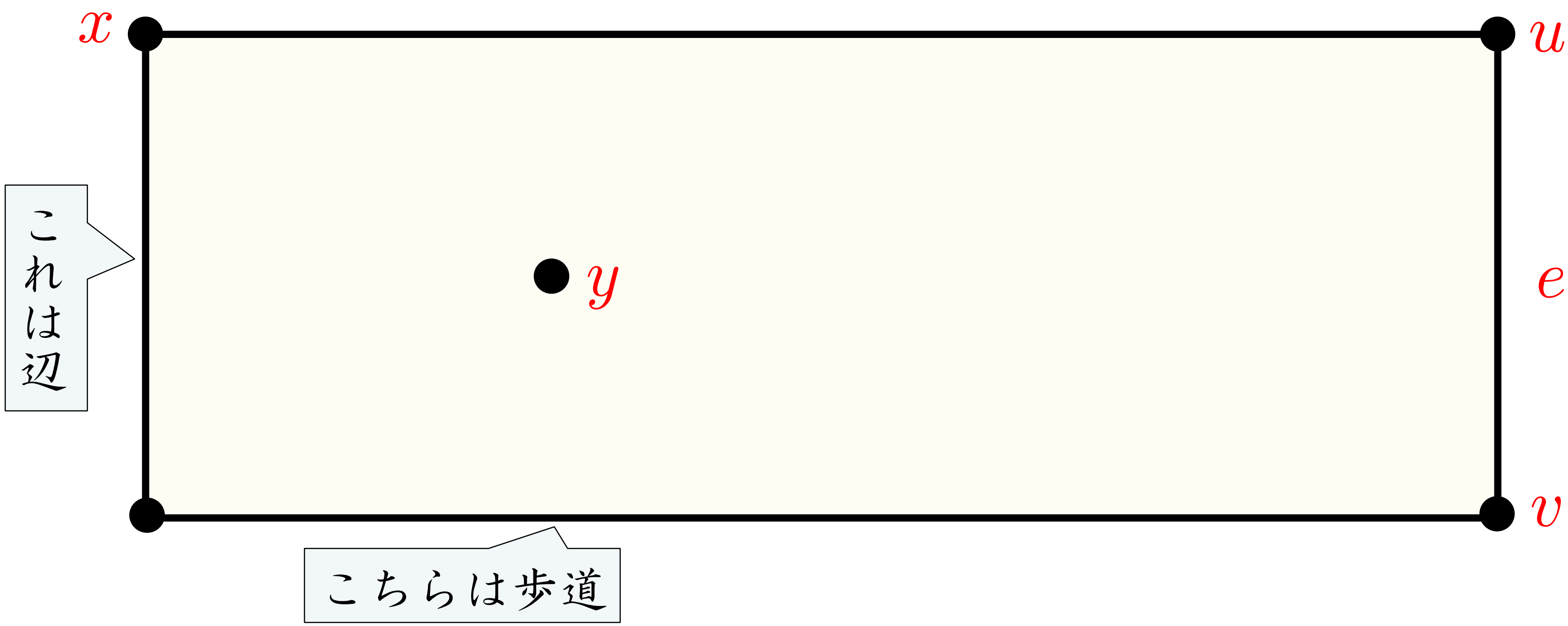
x : C 上の頂点,　e : C 上の辺,　$y \in V(G) - \{x\}$

∃ x から y への道で e を通るもの

⇒ ∃ x から y への C-Tutte 道で e を通るもの



証明の概略

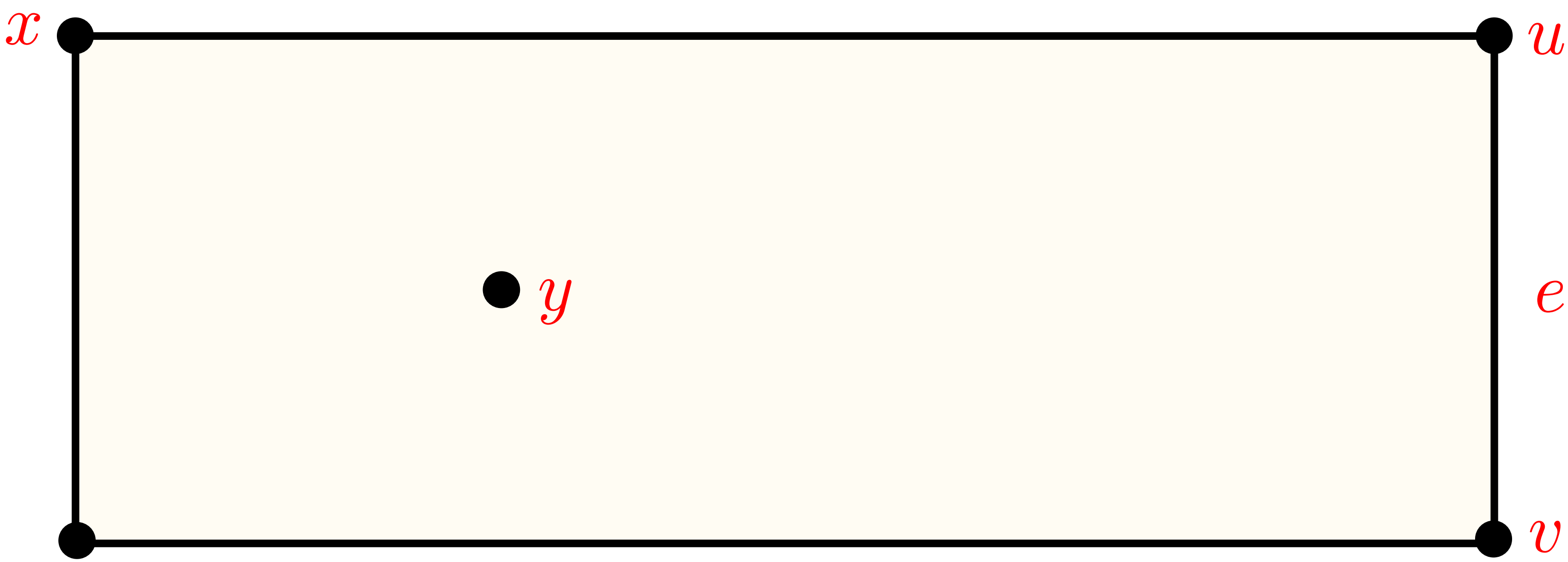


$e = uv$

$C[x,u]$: C の時計まわりの部分歩道で x から u まで

「x から y への道で e を通るもの」を「道 s.t. $x \xrightarrow{e} y$」と書く.

証明の概略

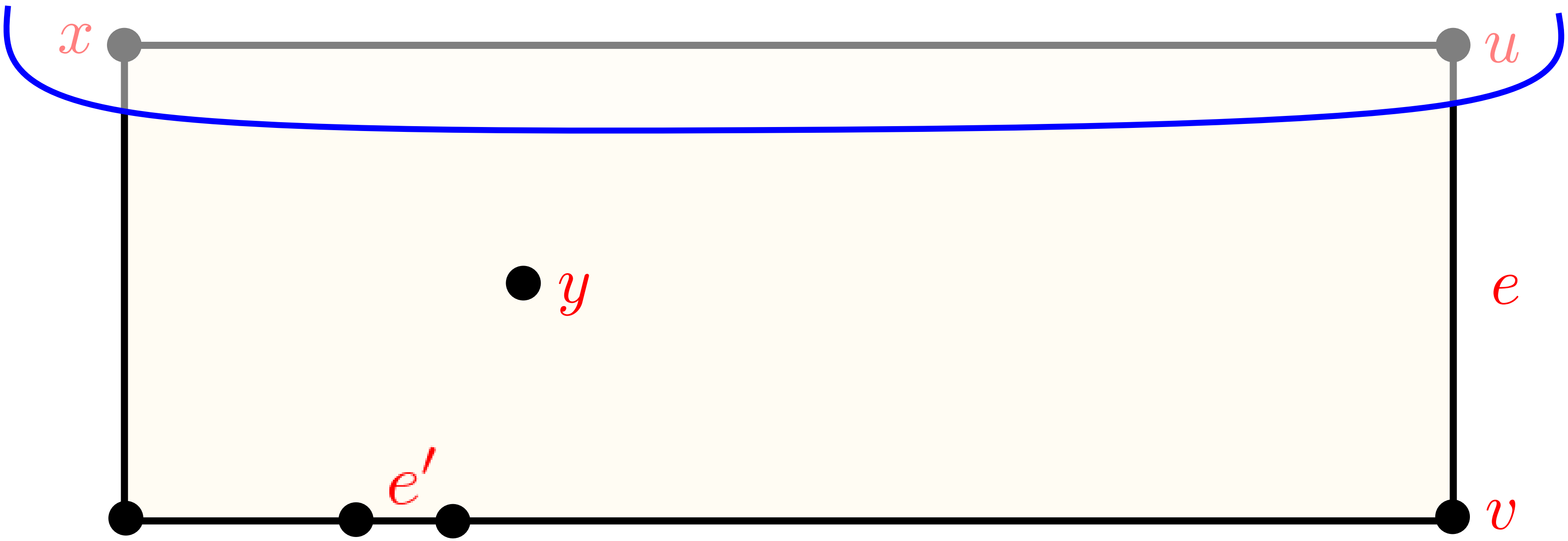


$\exists$ 道 in $G - V\bigl(C[x,u]\bigr)$ s.t. $v \longrightarrow y$

または，$\exists$ 道 in $G - V\bigl(C[v,x]\bigr)$ s.t. $u \longrightarrow y$

演習番外2.：これを示せ．

証明の概略



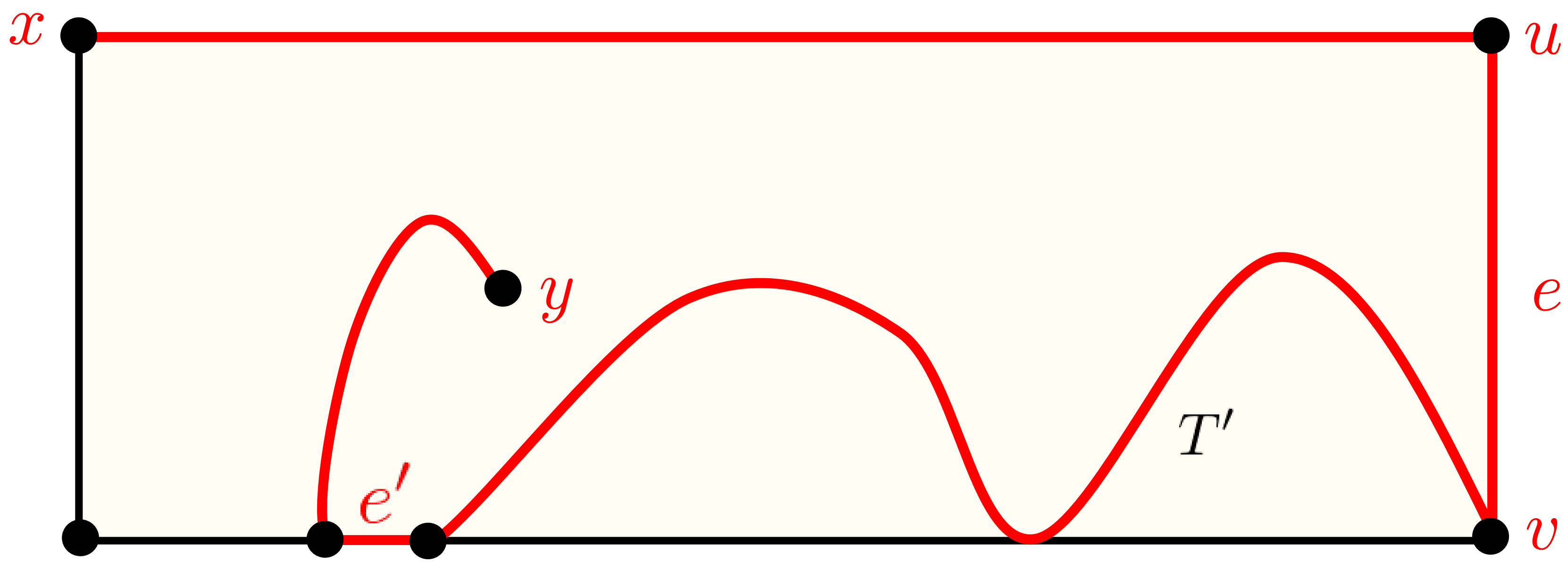
対称性より，∃道 in $G - V\big(C[x,u]\big)$ s.t. $v \longrightarrow y$ としてよい

$G' = G - V\big(C[x,u]\big)$，$C'$: G' の外領域の境界歩道，とおく

e' : $C[v,x)$ 上の辺で，∃道 s.t. $v \xrightarrow{e'} y$ を満たし x に一番近い

とする

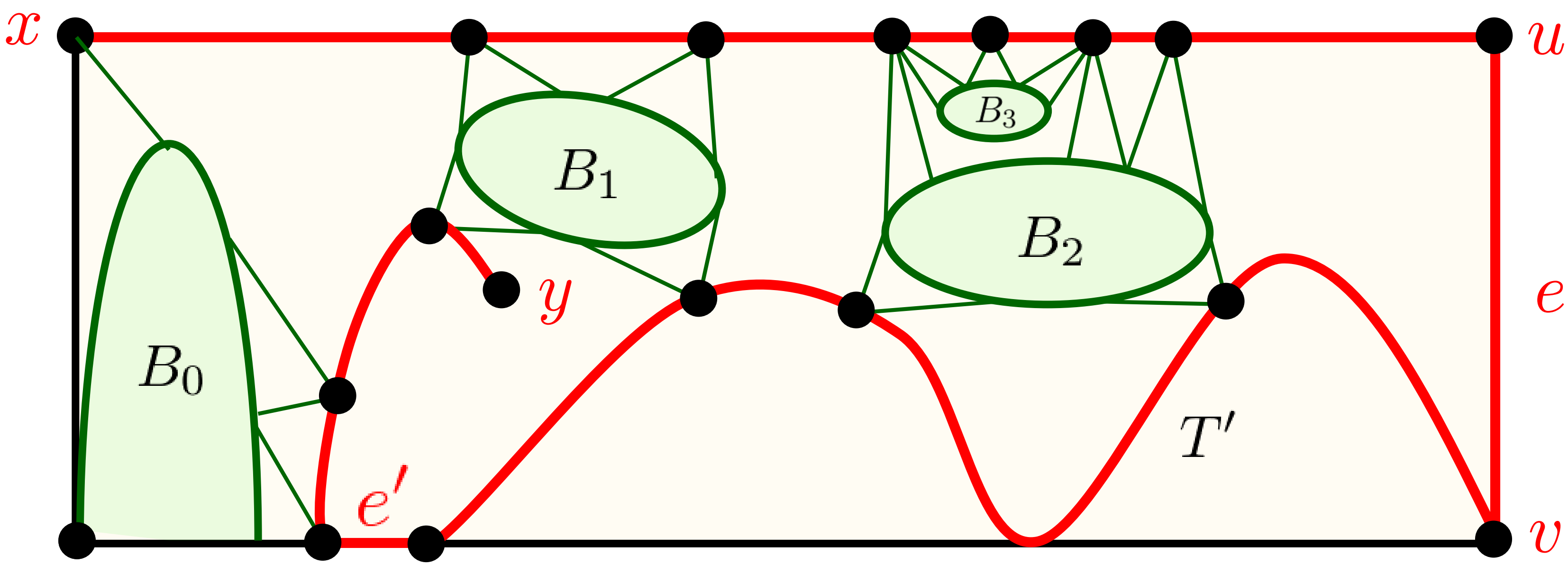
証明の概略



帰納法の仮定より，$\exists T'$: C'-Tutte道 in G' s.t. $v \xrightarrow{e'} y$

$C[x,v] \cup T'$: C-Tutte 道 in G の``候補”

証明の概略



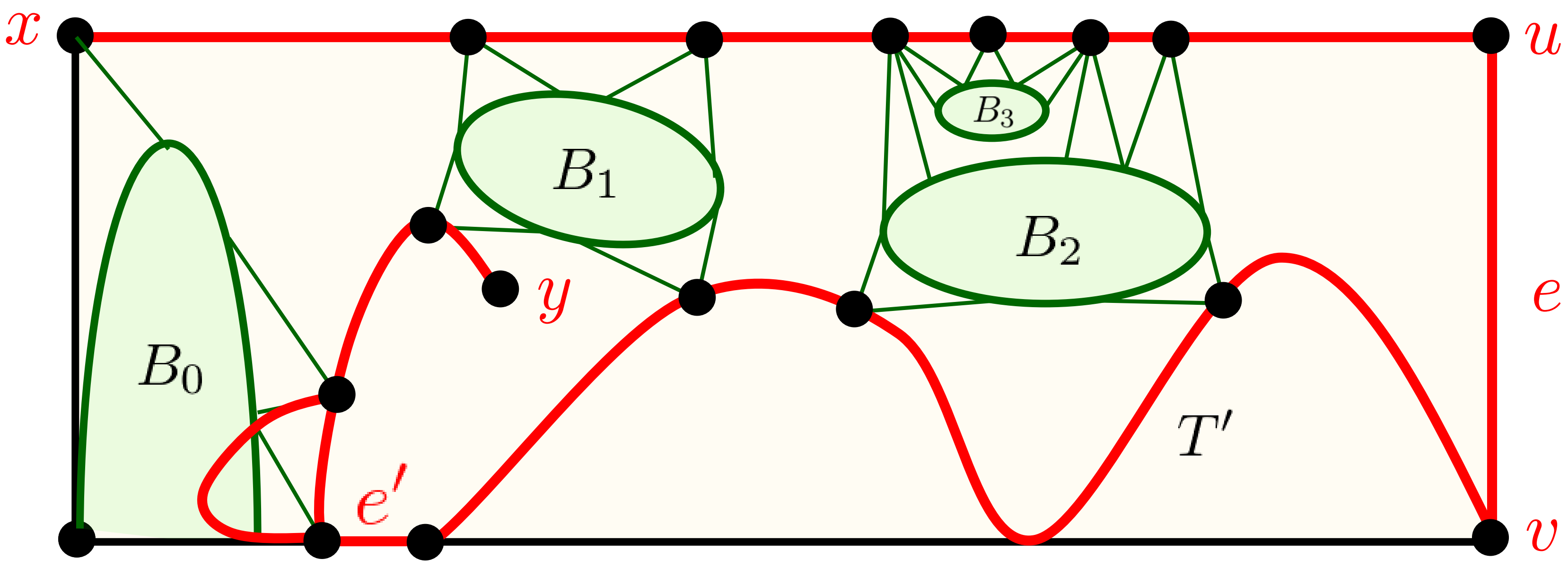
$C[x,v] \cup T'$ が C-Tutte 道でない理由：

(a) $G - V\big(C[x,v] \cup T'\big)$ の連結成分が $C[x,u]$ に ≥ 2 個近傍を持つ (B_1, B_2, B_3)

(b) $G - V\big(C[x,v] \cup T'\big)$ の連結成分で $C(e',x)$ の点を含んでいて，

T' に ≥ 2 個近傍を持つ (B_0)

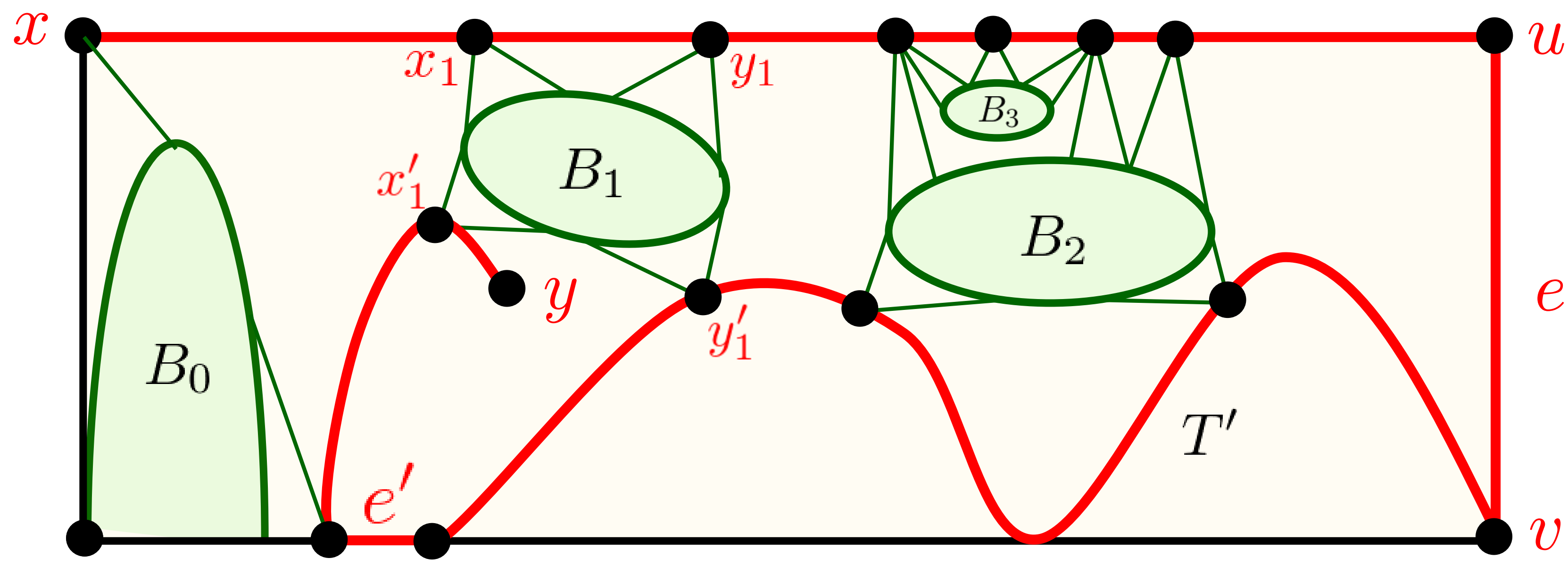
証明の概略



ただし，(b) が存在すると，e' の選び方に矛盾．

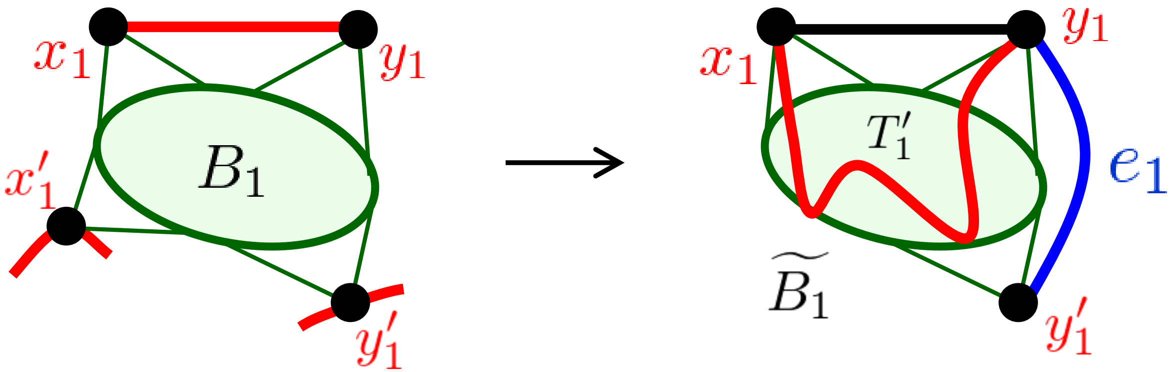
e' : $C[v, x)$ 上の辺で，∃道 s.t. $v \xrightarrow{e'} y$ を満たし x に一番近い

証明の概略



$C[x,v] \cup T'$: C-Tutte 道 in G の``候補"

証明の概略



$\widetilde{B_1}$: 上から x'_1 を取り除き，辺 $e_1 = y_1 y'_1$ を加えたグラフ

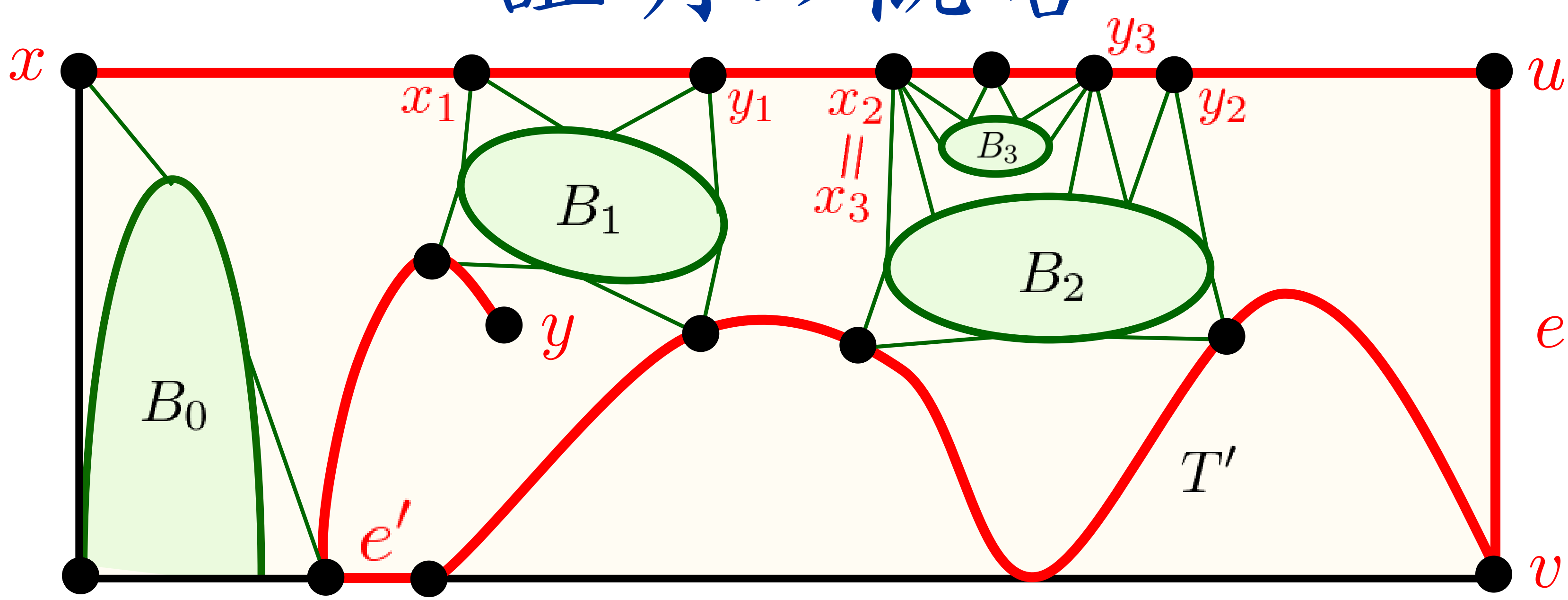
C_1 : $\widetilde{B_1}$ の外領域の境界歩道

帰納法の仮定より，$\exists\, T'_1$: C_1-Tutte道 in $\widetilde{B_1}$ s.t. $x_1 \xrightarrow{e_1} y'_1$

$T_1 = T'_1 - y'_1$ は，道 s.t. $x_1 \longrightarrow y_1$

<u>Claim</u> $T_1 \cup \{x'_1, y'_1\}$: $C[x_1, y_1]$-Tutte 部分グラフ in G

証明の概略



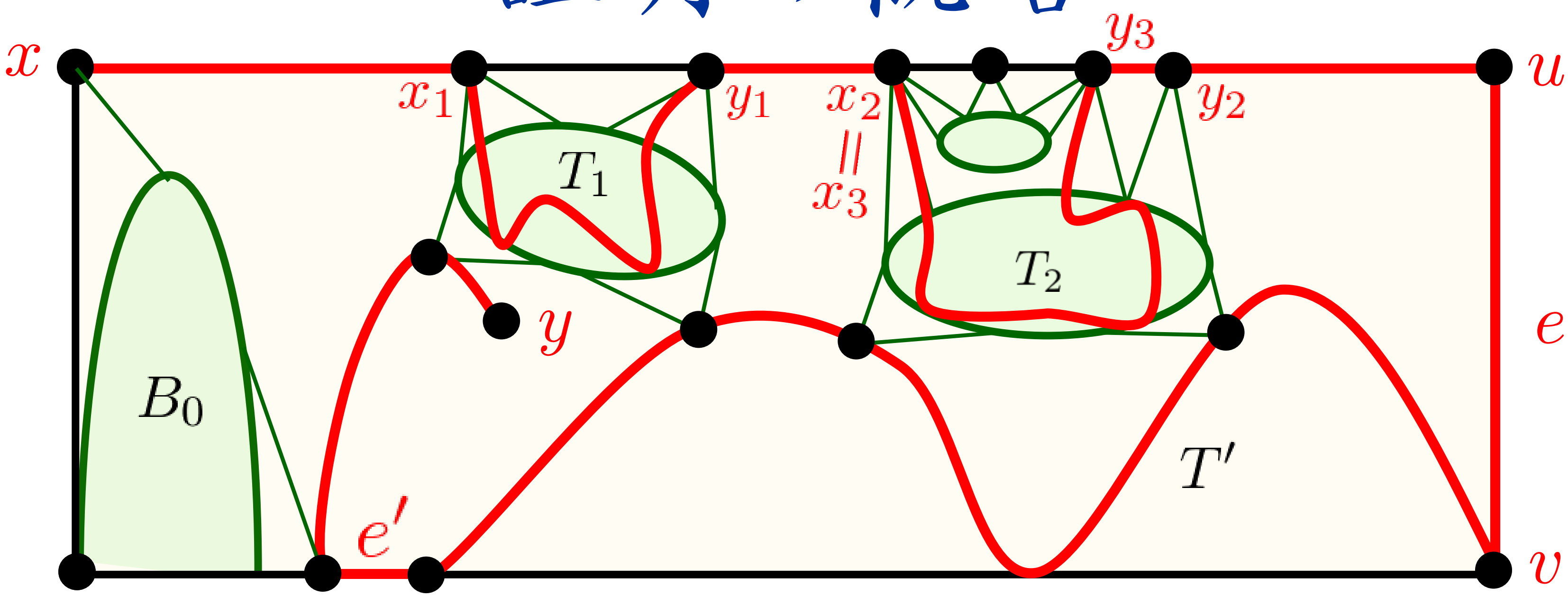
$C[x,v] \cup T'$: C-Tutte 道 in G の``候補”

注：$C[x_i, y_i] \cap C[x_j, y_j] \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad C[x_j, y_j] \subseteq C[x_i, y_i]$ または $C[x_i, y_i] \subseteq C[x_j, y_j]$

演習番外 3.：上の注を示せ.

極大な $C[x_i, y_i]$ をすべて T_i に替えることで C-Tutte 道を得る.

証明の概略



$C[x,v] \cup T'$: C-Tutte 道 in G の``候補''

注：$C[x_i,y_i] \cap C[x_j,y_j] \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad C[x_j,y_j] \subseteq C[x_i,y_i]$ または $C[x_i,y_i] \subseteq C[x_j,y_j]$

演習番外 3.：上の注を示せ．

極大な $C[x_i,y_i]$ をすべて T_i に替えることで C-Tutte 道を得る．

Tutte 道

定理 (Thomassen, `83)

G : 平面グラフ，　C : 外領域の境界歩道

x : C 上の頂点，　e : C 上の辺，　$y \in V(G) - \{x\}$

$\exists$ x から y への道で e を通るもの

$\Rightarrow$ $\exists$ x から y への C-Tutte 道で e を通るもの

Sanders (`95)

x : C 上の頂点 $\rightarrow$ x : G の任意の頂点

と拡張している．

Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

✓ Grinberg の必要条件

✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

✓ Thomassen によるもの

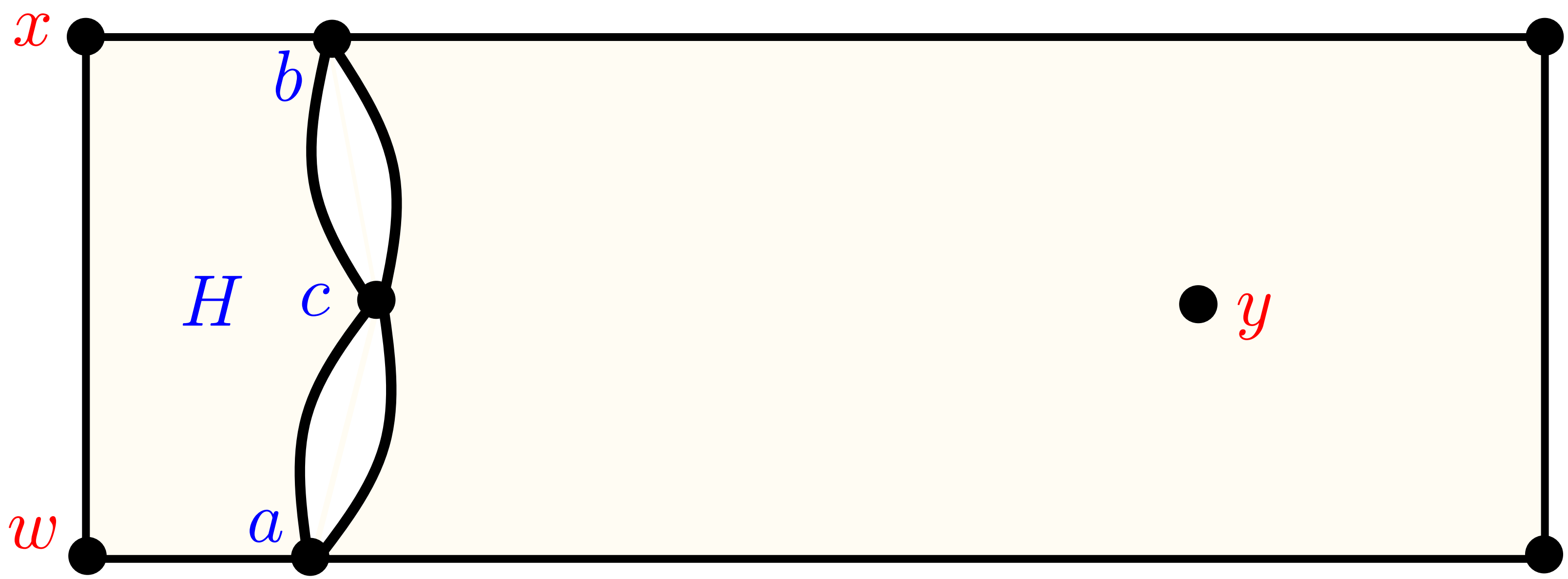
✓ 河原林＆小関による新しいもの

(IV) Tutte 閉路・道の利用

✓ 3-連結 3-正則平面グラフ

✓ 本型埋め込み

ハミルトン性の別証明

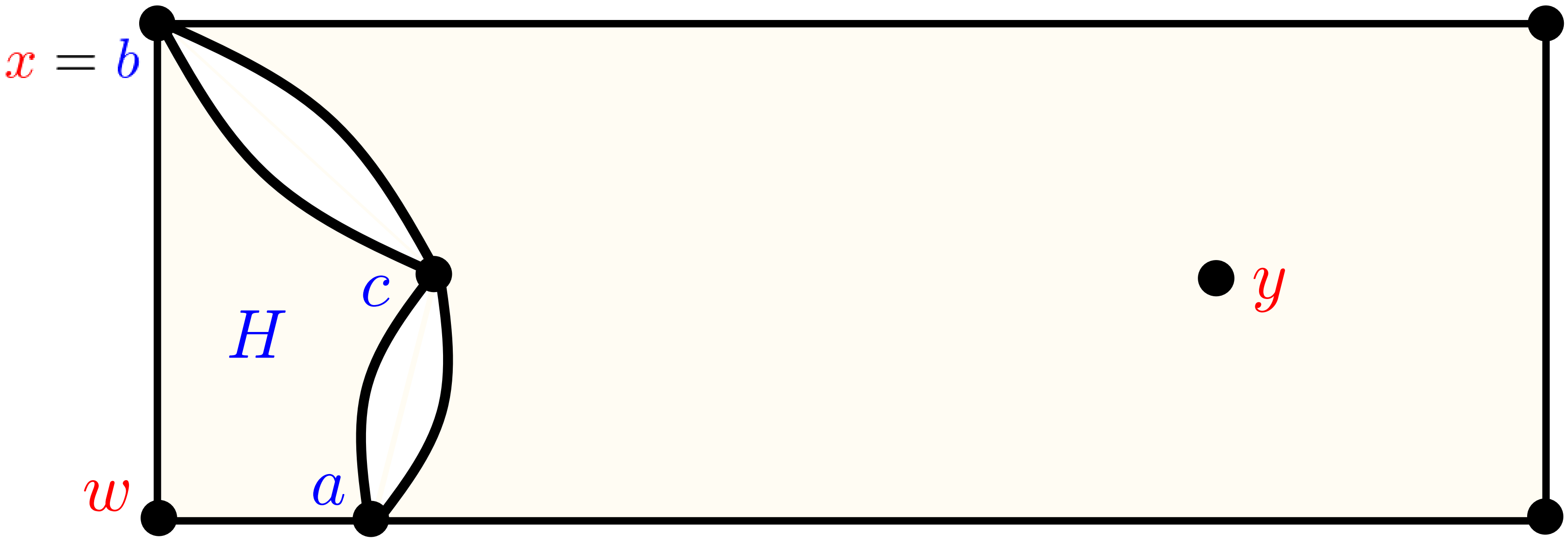


$\{a,b,c\}$: x と y を分離する G の 3-cut で $a,b \in V(C)$

H : yを含まない $G-\{a,b,c\}$ の連結成分

この H を (x, y を分離する) G の C-flap とよぶ

ハミルトン性の別証明



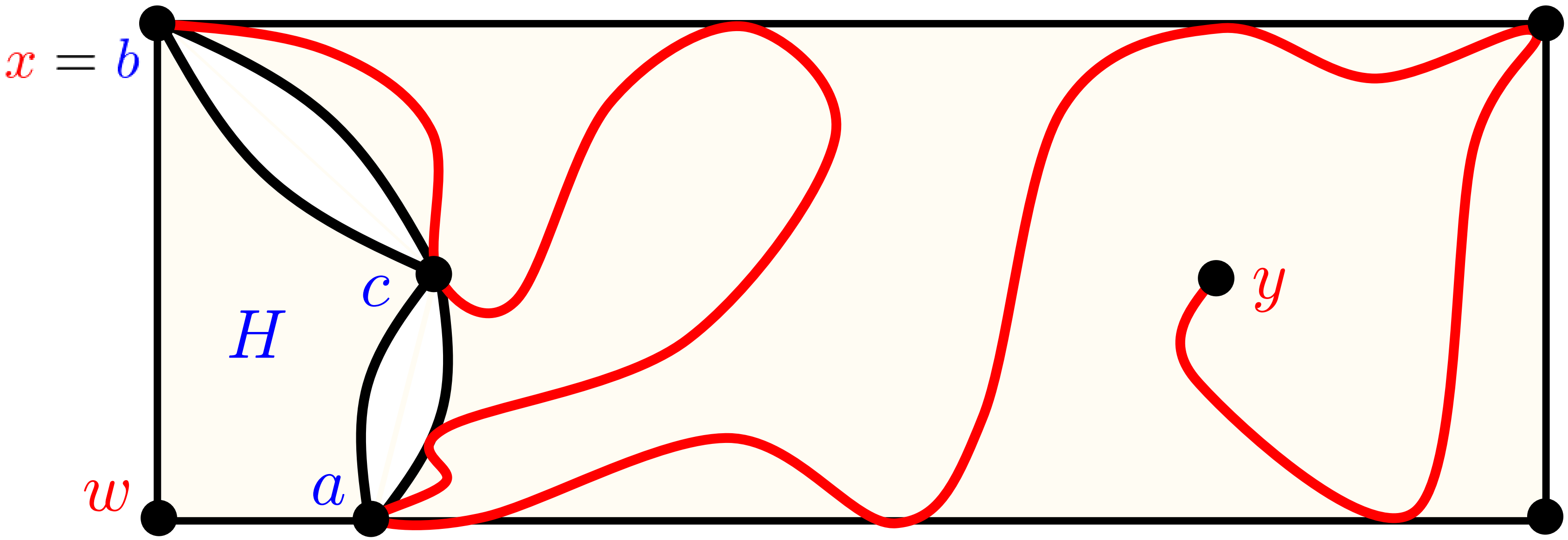
$\{a, b, c\}$: x と y を分離する G の 3-cut で $a, b \in V(C)$

H : yを含まない $G - \{a, b, c\}$ の連結成分

この H を (x, y を分離する) G の C-flap とよぶ

注：$x = b$ の場合も C-flap とよぶ

ハミルトン性の別証明



目標：b から y への道で ``ほぼ'' C-Tutte 道 を見つける

H : 唯一の例外的な成分

証明の概略

定理 (本質的には，河原林 & 小関, `14)

G : 2-連結平面グラフ， C ：外領域の境界歩道

xw ：C 上の辺， $y \in V(G) - \{x\}$

$\Rightarrow$ (i) ∃ x から y への C-Tutte 道

or (ii) ∃ x, y を分離する G の C-flap s.t. a, w, x, b が C 上でこの順

∃ b から y への $G - V(H)$ の C-Tutte 道

実際は，G : 射影平面グラフ，C ：適当な面の境界，で示した

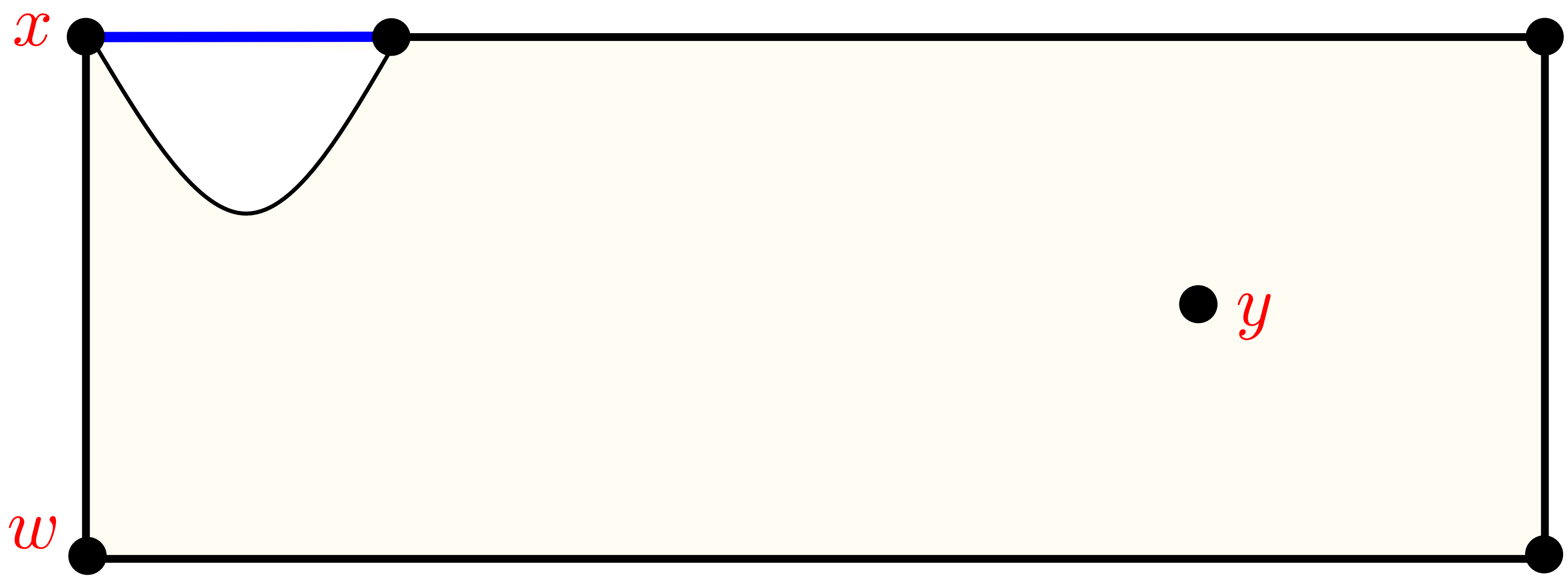
系：任意の 4-連結射影平面グラフはハミルトン連結

ハミルトン性の別証明

・$|V(G)|$に関する帰納法で示す

Case I : $\exists S$: 2-cut s.t. $x \in S$

ハミルトン性の別証明

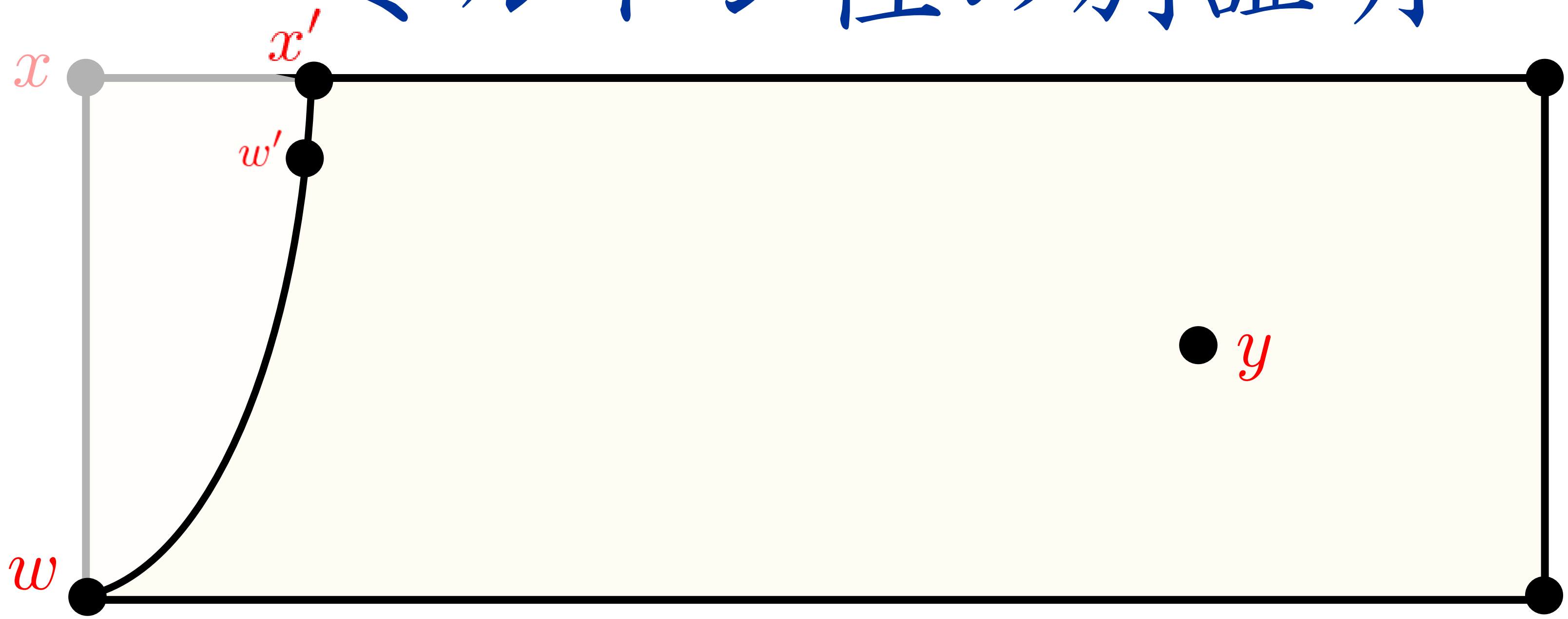


- $|V(G)|$に関する帰納法で示す

Case I : $\exists S$: 2-cut s.t. $x \in S$

$G - S$の片方の連結成分を辺に置き換える.

ハミルトン性の別証明

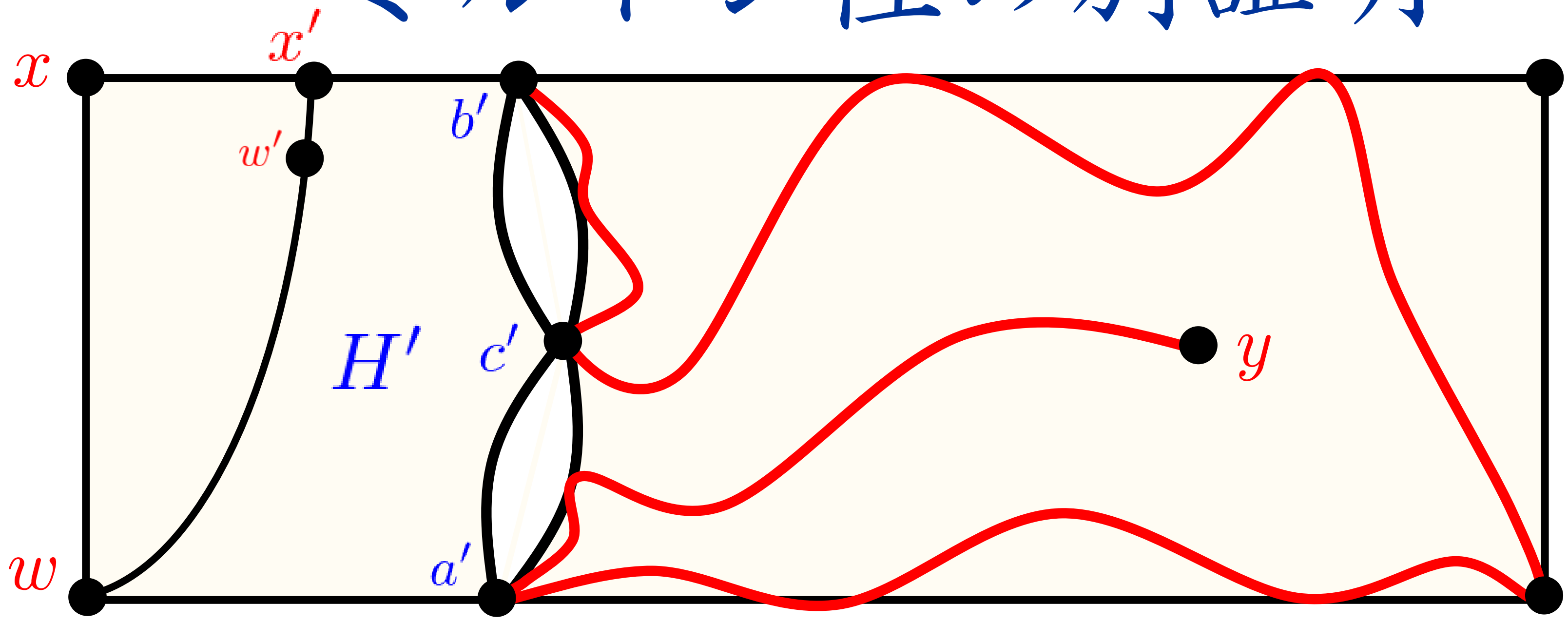


Case II : $\nexists S$: 2-cut s.t. $x \in S$

このとき，$G - x$ も 2-連結

$\rightarrow$ $G - x$ に帰納法の仮定を使う

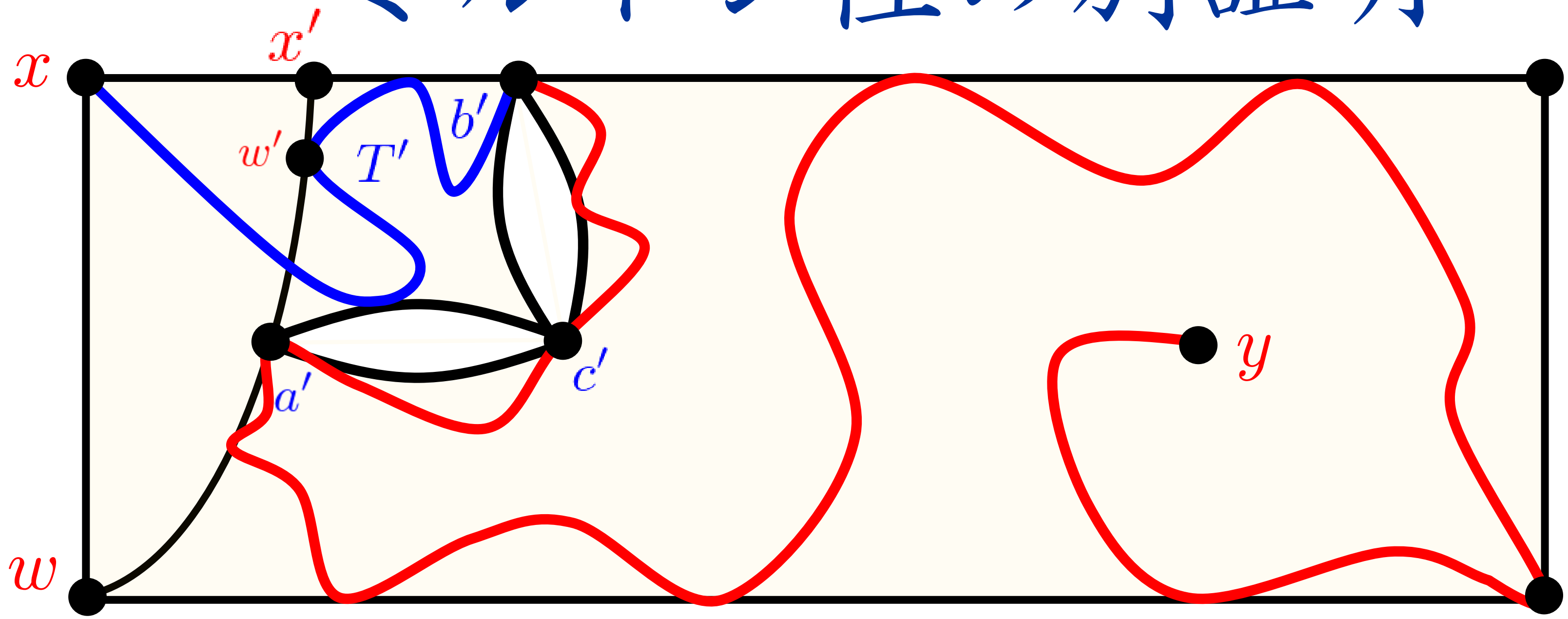
ハミルトン性の別証明



a' の位置で場合分け

Case (i) 上図：$H' \cup \{x\}$ が G の C-flap を誘導する

ハミルトン性の別証明



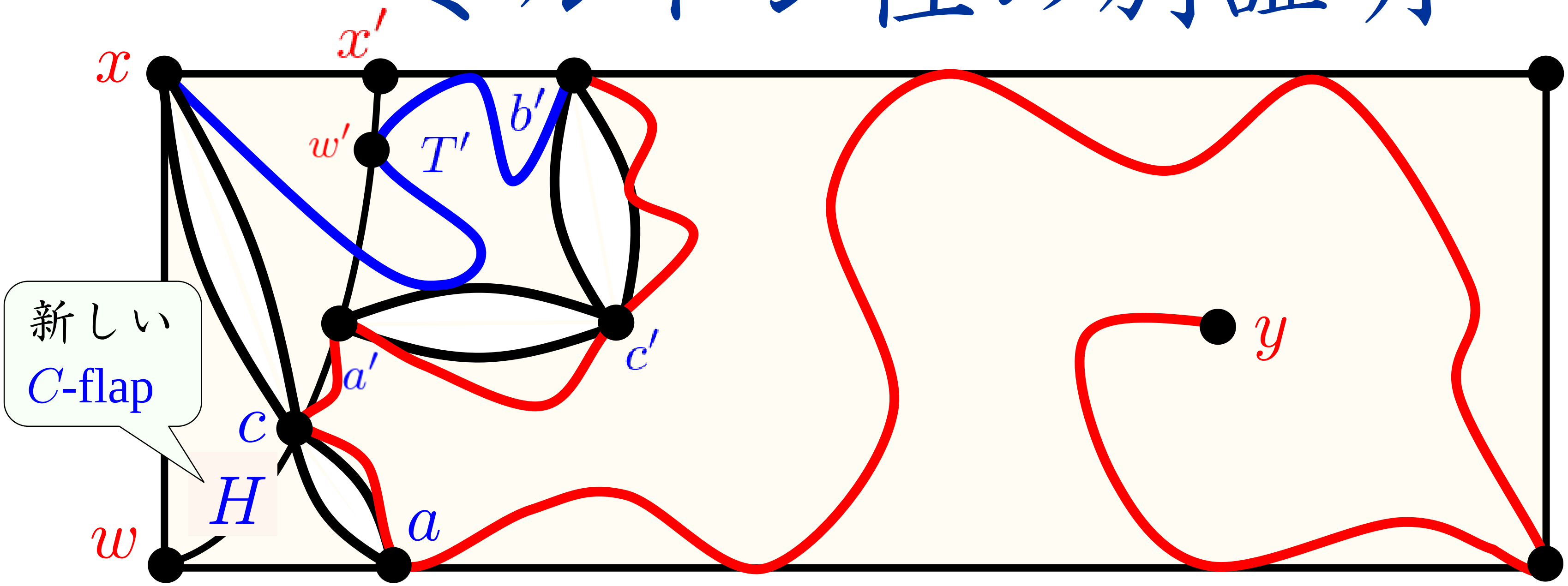
a' の位置で場合分け

Case (ii) 上図：$H' \cup \{x\}$ に Tutte 道の定理を用いる

$^\exists T'$：道 s.t. $x \longrightarrow b'$ かつ $T' \cup \{a', c'\}$ は $C[x, b']$-Tutte 部分グラフ

T' により道を x まで伸ばし，所望の C-Tutte 道を $x = b$ で得る

ハミルトン性の別証明



a' の位置で場合分け

Case (ii) 上図：$H' \cup \{x\}$ に Tutte 道の定理を用いる

$^\exists T'$：道 s.t. $x \longrightarrow b'$ かつ $T' \cup \{a', c'\}$ は $C[x, b']$-Tutte 部分グラフ

T'により道を x まで伸ばし，所望の C-Tutte 道を $x = b$で得る

証明の概略

定理 (本質的には， 河原林 & 小関, `14)

G : 2-連結平面グラフ， C ：外領域の境界歩道

xw : C 上の辺， $y \in V(G) - \{x\}$

$\Rightarrow$ (i) ∃ x から y への C-Tutte 道

or (ii) ∃ x, y を分離する G の C-flap s.t. a, w, x, b が C 上でこの順

∃ b から y への $G - V(H)$ の C-Tutte 道

実際は，G : 射影平面グラフ，C ：適当な面の境界，で示した

系： 任意の 4-連結射影平面グラフはハミルトン連結

新しい証明の利点

一回の操作で 1 頂点しか取り除かない．

→ 平面以外の閉曲面の場合は，帰納法の出発点が容易

$\rho(G) := \min\{|S| : G - S$ は平面グラフ$\}$

に対し，帰納法の出発点は

$$\rho(G) = \begin{cases} 2, 3 & \text{Thomassen の手法} \\ 2 & \text{新しい手法} \end{cases}$$

アルゴリズムの観点

演習番外 4.：

それぞれの証明は構成的でアルゴリズムとなるが，

その計算量を求めよ．

参考：

Chiba & Nishizeki (`89) :

∃ $O(n)$ −時間アルゴリズム s.t.

n 頂点 4-連結平面グラフにハミルトン閉路を見つける