Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinbergの必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte閉路・道，命題と証明

- ✓ Thomassenによるもの
- ✓ 河原林&小関による新しいもの

(IV) Tutte閉路・道の利用

- ✓ 3-連結3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

3-正則平面グラフ

系

G : 閉路的-4-辺連結 3-正則平面グラフ

$\Rightarrow$ G は長さ $\frac{3}{4}|G|$ 以上の閉路を持つ

G :閉路的-4-辺連結

$\Leftrightarrow$ ≤ 3 辺カットは1点を切り離すもののみ

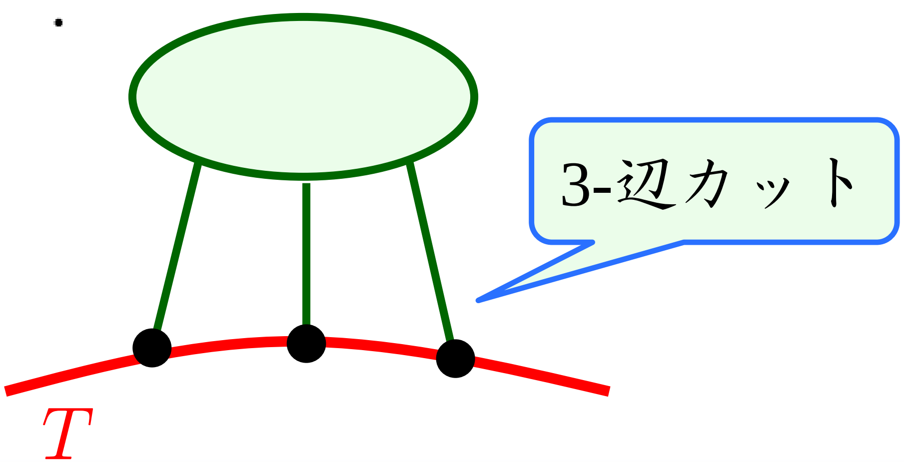
3-正則平面グラフ

G : 閉路的-4-辺連結 3-正則平面グラフ

T : G の Tutte 閉路

$\Rightarrow$ T: 支配閉路 ($G - V(T)$ は孤立点の集合)

$\because$



さらに $\forall u, v \in V(G) - V(T)$ で,

$N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$ なので

$|T| \geq 3(|G| - |T|)$ が得られる

3-正則平面グラフ

予想 (Barnette, `69)

G : 3-連結 3-正則平面二部グラフ

$\Rightarrow$ G はハミルトン閉路を持つ.

- ✓ 「二部グラフ」は必要 (演習 1. 参照)
- ✓ Barnette 予想は，下の二つの予想とそれぞれ同値.

(A) G : 閉路的-4-辺連結 3-正則平面二部グラフ (Kelmans, `94, `03)

$\Rightarrow$ G はハミルトン閉路を持つ.

(B) $\exists\alpha$: 正の定数 s.t. G : 3-連結 3-正則平面二部グラフ

$\Rightarrow$ G は長さ $\alpha|G|$ 以上の閉路を持つ. (Harant, `13)

3-正則平面グラフ

系

G : 閉路的-4-辺連結 3-正則平面グラフ

$\Rightarrow$ G は長さ $\frac{3}{4}|G|$ 以上の閉路を持つ

二つ合わせて上を使えば Barnette 予想が解決か?? $\rightarrow$ NO

各種条件は最善か??

演習番外 5. :

上の係数 3/4 を (二部グラフで) 改良せよ

3-正則平面グラフ

予想 (Bondy `89)

$\exists \alpha$: 正の定数 s.t. G : 閉路的-4-辺連結 3-正則グラフ

$\Rightarrow$ G は長さ $\alpha|G|$ 以上の閉路を持つ.

各種条件は最善か??

Bondy 予想 (`89) : 上の系は ``平面” を仮定しなくとも,

3/4 を何らかの定数にすれば正しい

3-正則平面グラフ

<u>予想 (Bondy `89)</u>

∃α : 正の定数 s.t. G : 閉路的-4-辺連結 3-正則グラフ

$\Rightarrow$ G は長さ $\alpha|G|$ 以上の閉路を持つ.

<u>Known:</u> Bondy 予想は下の上の予想より弱く，下の予想より強い.

Thomassen 予想 (`86) : G : 4-連結 line グラフ

$\Rightarrow$ G : ハミルトン閉路を持つ

弱 Thomassen 予想 : G : 4-連結 line グラフ，最小次数 ≥ 5

$\Rightarrow$ G : ハミルトン閉路を持つ

Index

(I) イントロ

(II) ハミルトン閉路，その他のための必要条件

- ✓ Grinberg の必要条件
- ✓ タフネス型の必要条件

(III) Tutte 閉路・道，命題と証明

- ✓ Thomassen によるもの
- ✓ 河原林 & 小関による新しいもの

(IV) Tutte 閉路・道の利用

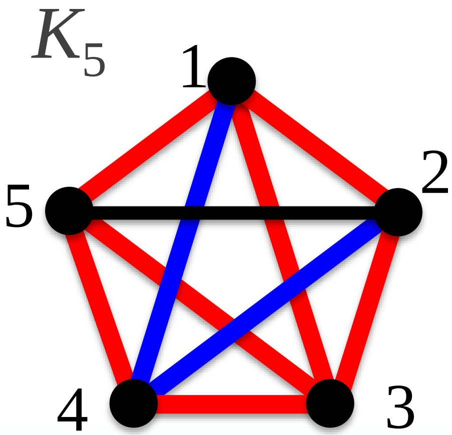
- ✓ 3-連結 3-正則平面グラフ
- ✓ 本型埋め込み

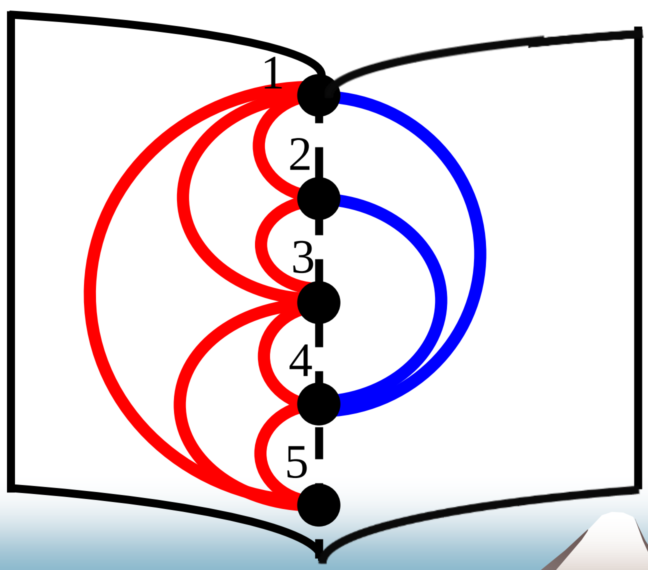
グラフの本型埋め込み

グラフ G の本型埋め込み

G の本型空間への埋め込みで以下を満たすもの

- 全頂点が背表紙 (spine) に埋め込まれている
- 各辺はいずれかのページに交差なく描かれている





グラフの本型埋め込み

グラフ G の本型埋め込み

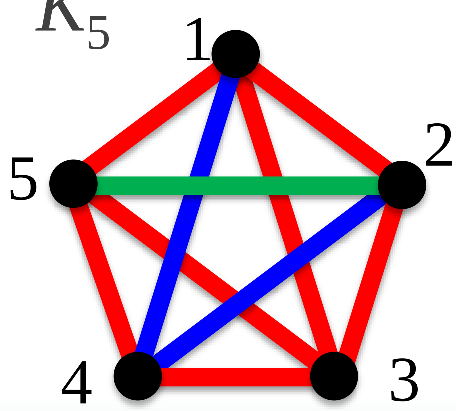
G の本型空間への埋め込みで以下を満たすもの

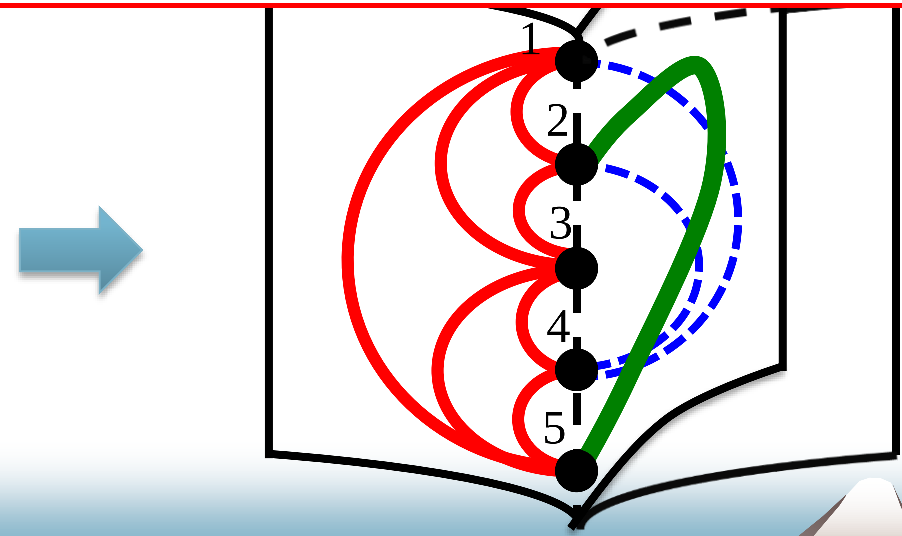
・全頂点が背表紙 (spine) に埋め込まれている

・各辺はいずれかのページに交差なく描かれている

$$p(G) = \min\{k : G \text{ は } k \text{ ページ本型埋め込みを持つ}\}$$

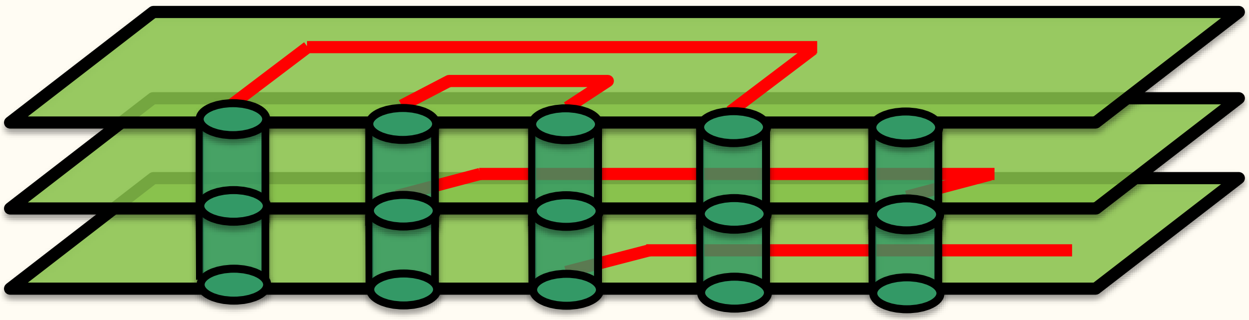
K_5





本型埋め込みの応用

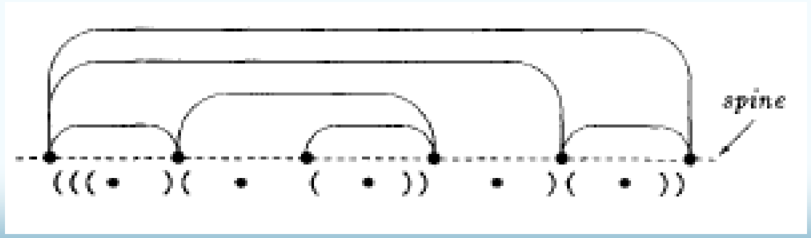
✓ VLSI (Very Large Scale Integration)



devices = 頂点　　wiring = 辺　　boards = ページ

✓ Stack Data Structure

data = 頂点　　pointers = 辺　　stack layout = 背表紙



正しい (と) の列をコード化する

G. Jacobson, `89

本型埋め込みの応用

✓ RNA structure

bases = 頂点

hydrogen bonds = 辺

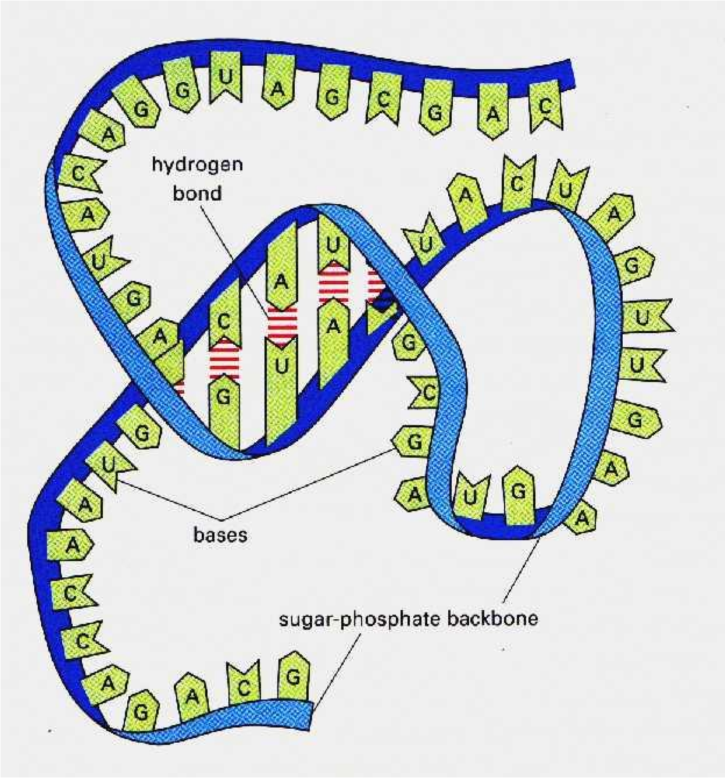
Sugar-phosphate backbone = 背表紙

Pseudo-knot 性

(= 2 page 埋め込み可能性) が

重要な要素となる(らしい)

C. Haslinger, P.F. Stadler, `99



http://www.uic.edu/classes/phys/phys461/phys450/ANJUM04/

各種グラフのページ数

$p(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ for $n \neq 3$ (Bernhart, Kainen, `79)

$p(K_{n,m}) \leq \lfloor \frac{n+m}{3} \rfloor + 1$ (Enomoto, Nakamigawa, Ota `97)

$p(G) = O(\sqrt{|E(G)|})$ (Malitz `94)

$p(G)$ の計算問題は 平面グラフに対してでさえ NP-困難.

G : 平面グラフ $\Rightarrow$ $p(G) \leq 4$ (Yanakakis `86)

$\boxed{\underline{\text{問題：}}\ p(G) \leq 3\ ??}$

G : 種数 g のグラフ $\Rightarrow$ $p(G) = O(g)$ (Heath, Istrail `92)

$p(G) = O(\sqrt{g})$ (Malitz `94)

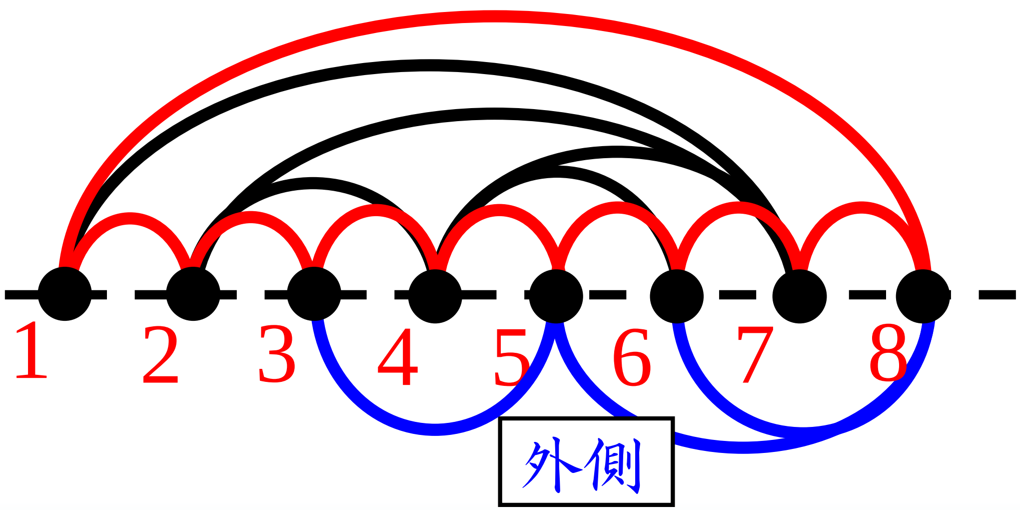
1 or 2 ページ埋め込み

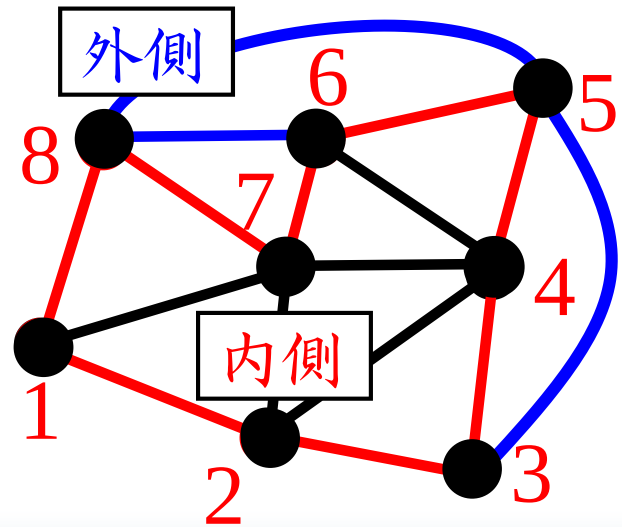
命題. (Bernhart, Kainen `79)

∃ 1ページ埋め込み in G ⇔ G : 外平面的

∃ 2ページ埋め込み in G

⇔ G : ハミルトン閉路を持つ平面的グラフの部分グラフ

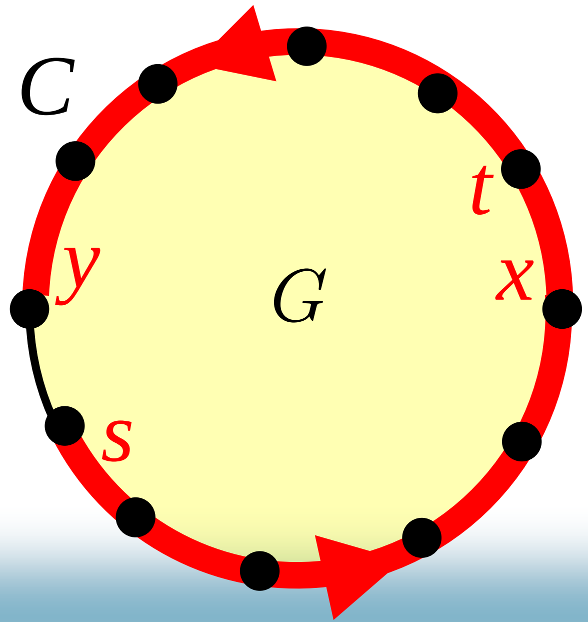


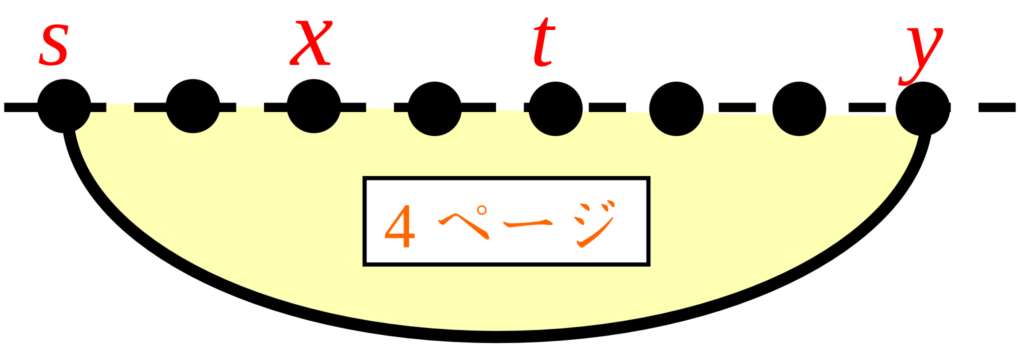


平面グラフの本型埋め込み

定理. (Yanakakis `86)

G : 2-連結平面グラフ，　C : 外領域の境界閉路
$\Rightarrow$ ∃ 4ページ埋め込み in G
　s.t. C は 背表紙 にその順に表れる





閉曲面上のグラフのページ数

定理. (Yanakakis `86)

G : 2-連結平面グラフ,　C : 外領域の境界閉路
$\Rightarrow$ ∃ 4ページ埋め込み in G
　s.t. C は 背表紙 にその順に表れる

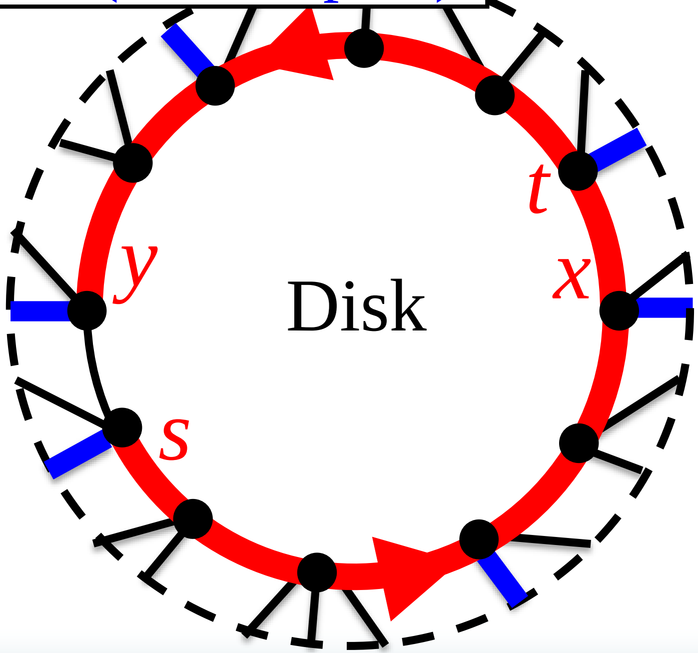
	平面	射影平面	トーラス	種数 g	(向付け可能) 局所平面的
上界	$\boxed{\leq 4}$ (Yanakakis `86)	≤ 6 (中本, 野澤 小関 `15+)	≤ 7 (Endo `97)	$O(\sqrt{g})$ (Malitz `94)	≤ 7 (中本, 野澤, `14+)
下界 (最善性)	≥ 3 三角形分割 with ∄ H-閉路	≥ 3	≥ 4 K_7	$\Omega(\sqrt{g})$ 完全グラフ	≥ 3

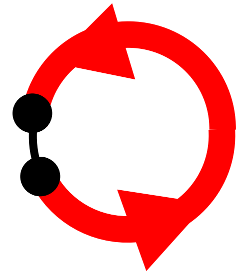
素朴な方法

定理 (中本，野澤，小関 `15+)

G : 射影平面上のグラフ ⇒ ∃6ページ埋め込み

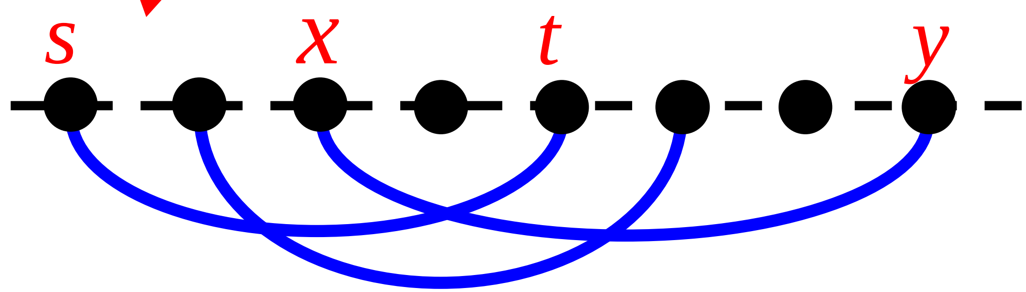
外側 (cross cap 側)





内側は 4ページ

(Yanakakis の定理)



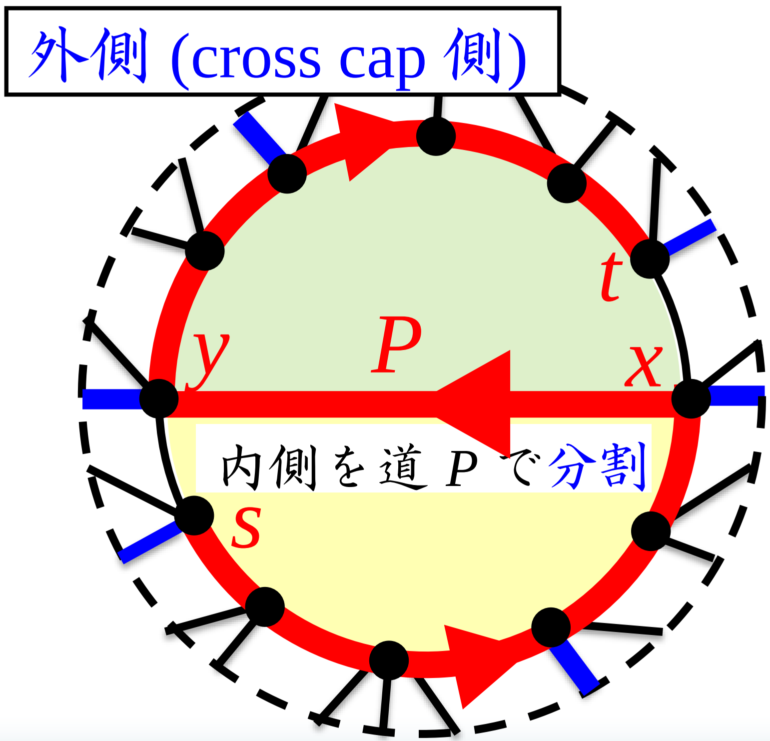
外側 (cross cap 側)

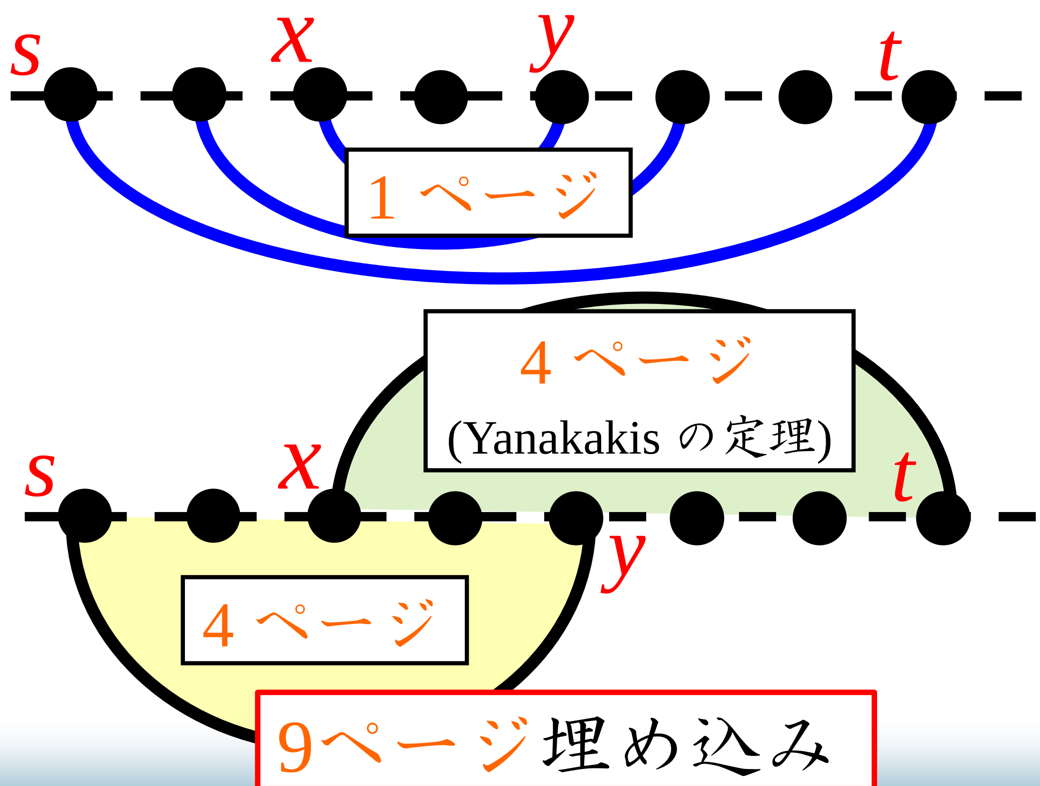
頂点がこの順ではうまくない

9ページの証明

定理 (中本，野澤，小関 `15+)

G : 射影平面上のグラフ ⇒ ∃6ページ埋め込み

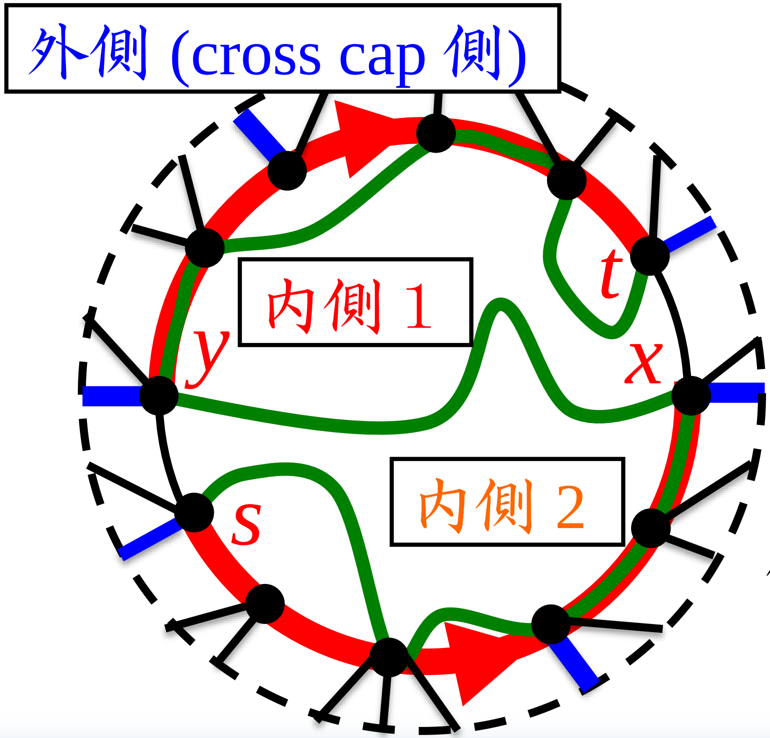


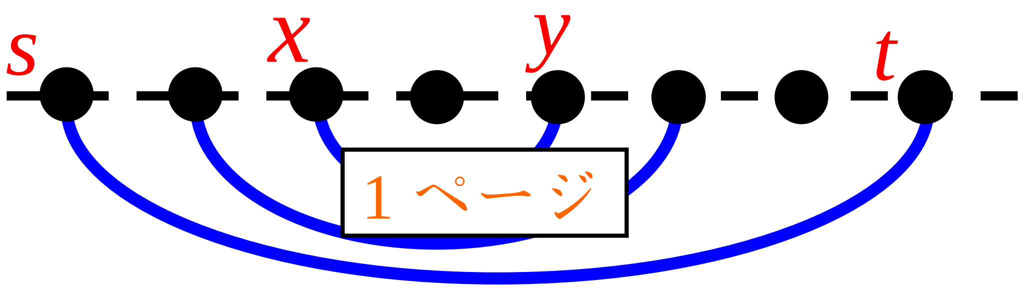


改良のアイデア

定理(中本，野澤，小関 `15+)

G : 射影平面上のグラフ ⇒ ∃6ページ埋め込み





・disk 部分を改良する

注： の順は固定

例：s から x, y を通り t までの

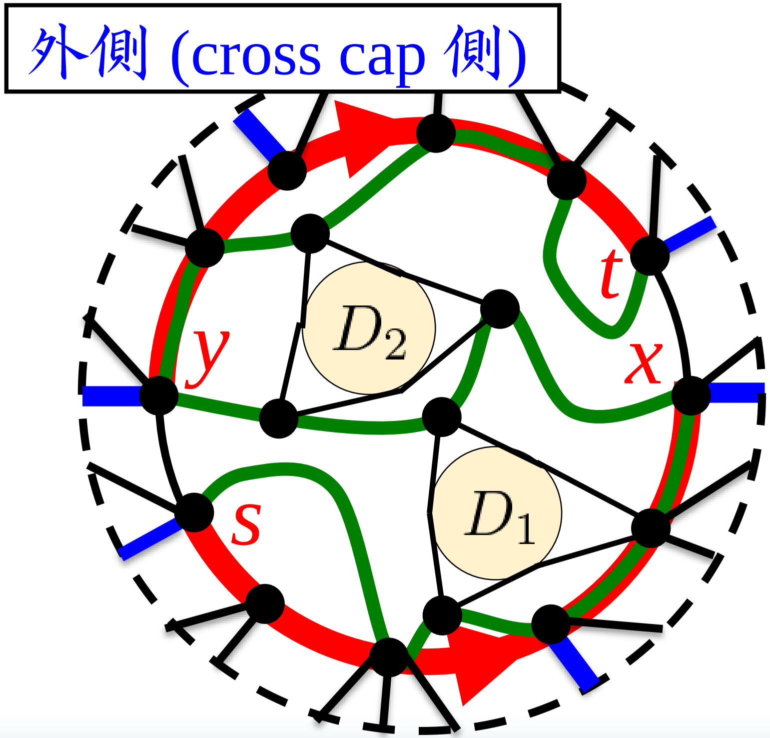
ハミルトン道が存在する場合には，

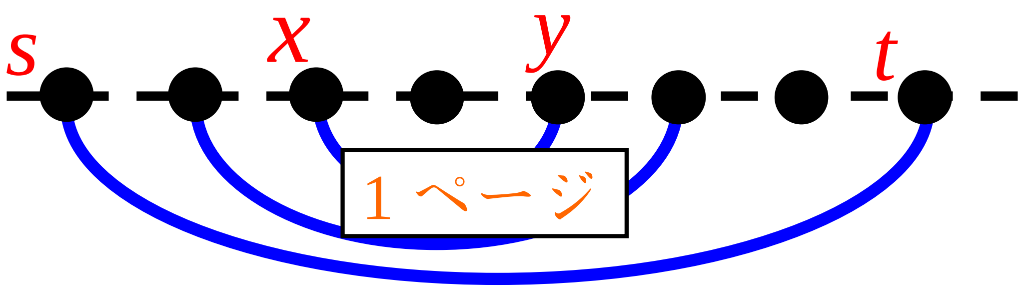
3ページ埋め込みがある

改良のアイデア

定理 (中本，野澤，小関 `15+)

G : 射影平面上のグラフ $\Rightarrow$ $\exists$6ページ埋め込み





・disk 部分を改良する

注： の順は固定

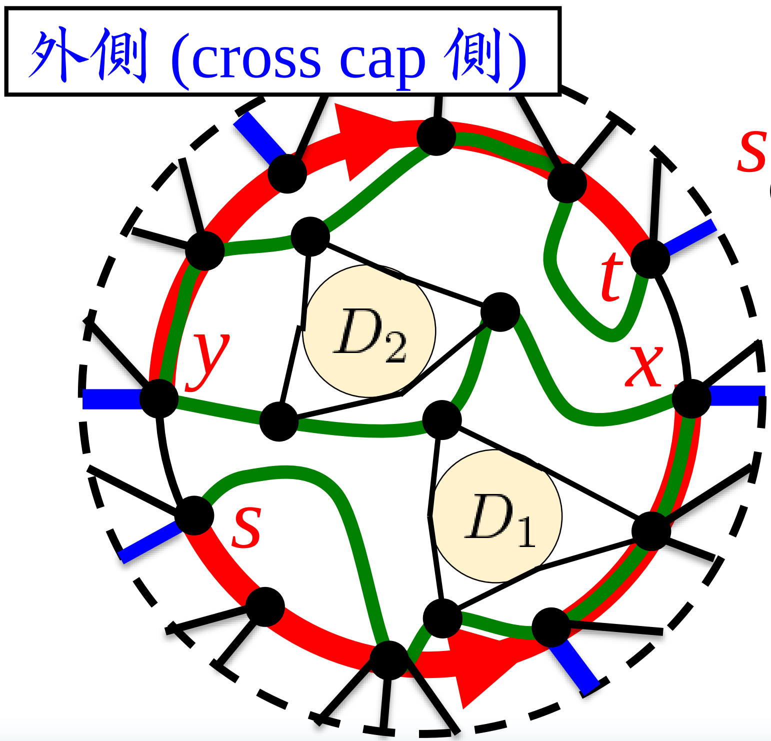
ハミルトン道はなくとも・・・

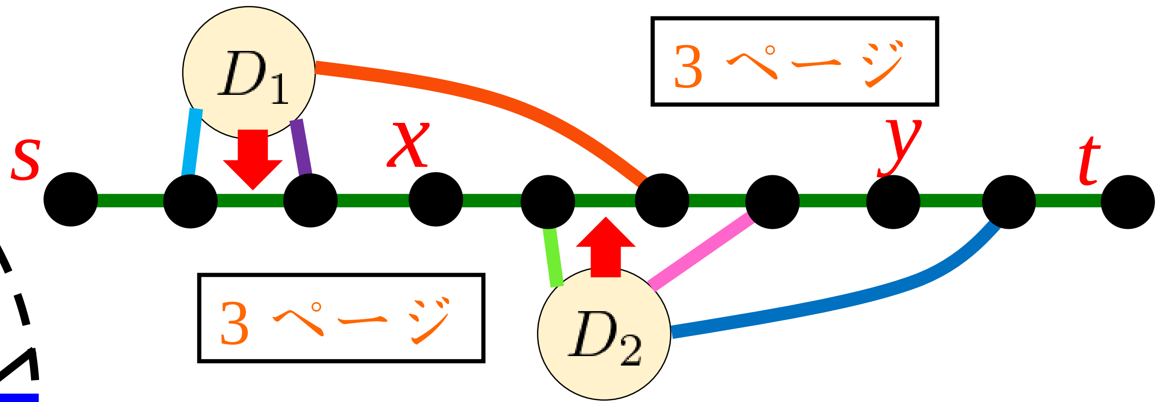
$\exists$ Tutte 道 s.t. $s \xrightarrow{x,y} t$

演習番外 6.：これを示せ.

改良のアイデア

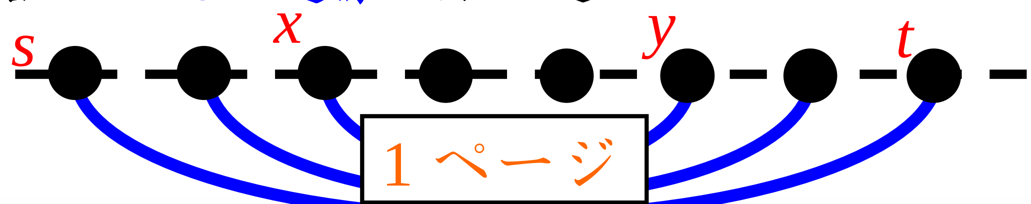
さらに，外側の辺を適切なページに割り当てることで6ページ





各 D を T に挿入し背表紙の列を得る

各 D とその近傍を結ぶ辺で3ページ



7ページ埋め込み

閉曲面上のグラフのページ数

定理 (中本, 野澤, 小関 `15+)

G : 射影平面上のグラフ $\Rightarrow$ $\exists$6ページ埋め込み

	平面	射影平面	トーラス	種数 g	(向付け可能) 局所平面的
上界	≤ 4 (Yanakakis `86)	$\boxed{\leq 6}$ (中本, 野澤, 小関 `15+)	≤ 7 (Endo `97)	$O(\sqrt{g})$ (Malitz `94)	≤ 7 (中本, 野澤, `14+)
下界 (最善性)	≥ 3 三角形分割 with ∄ H-閉路	≥ 3	≥ 4 K_7	$\Omega(\sqrt{g})$ 完全グラフ	≥ 3

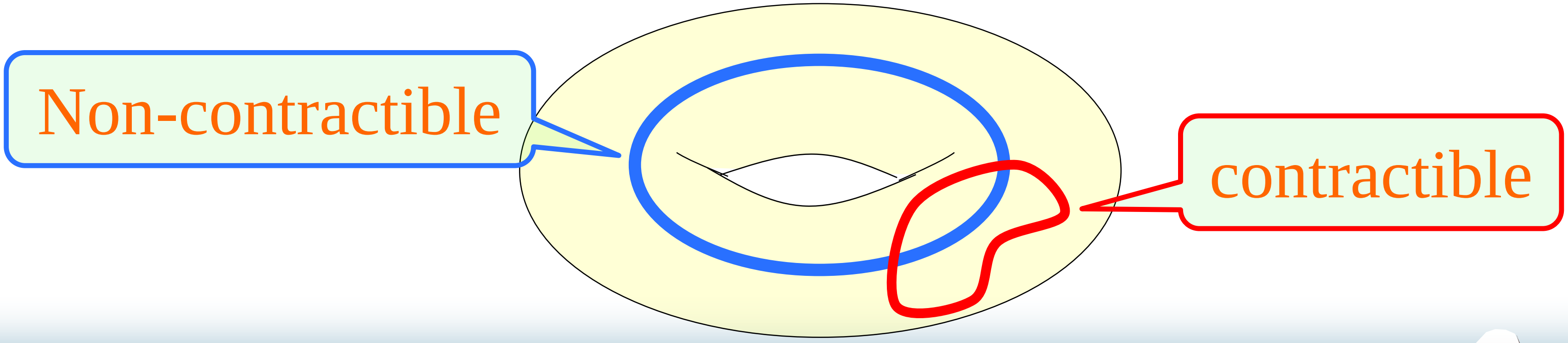
トーラス上のグラフのページ数

演習 5.： (I) トーラス上のグラフは，

contractible なハミルトン閉路を持てば

5ページ埋め込みを持つことを示せ

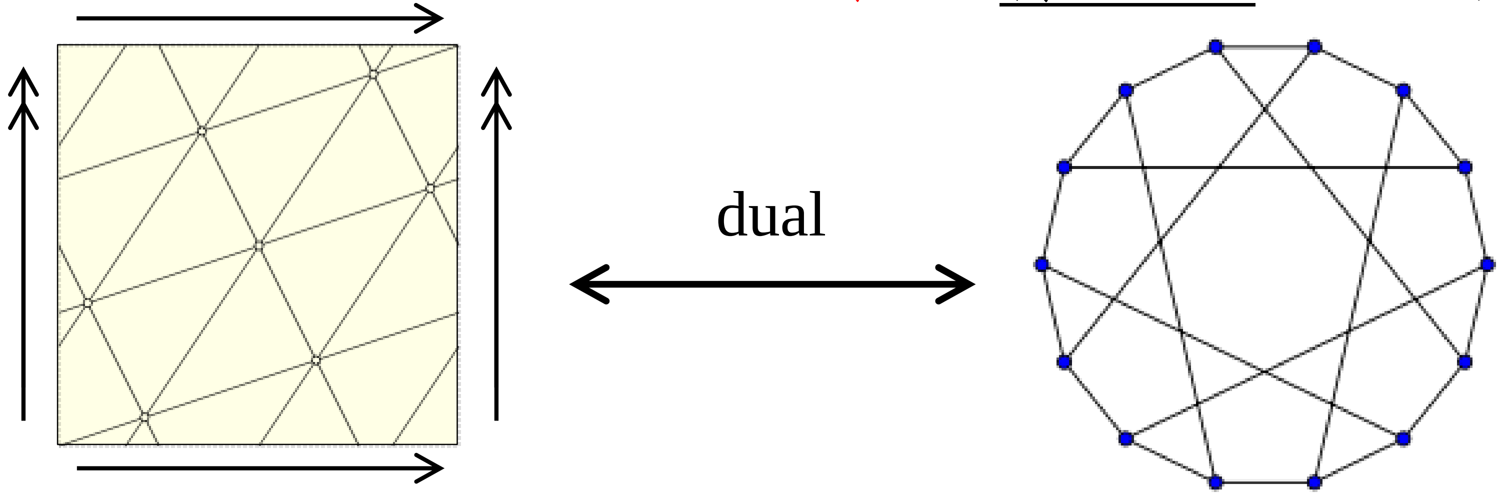
(II) これは 4ページ埋め込みへ拡張できるか?



Contractible なハミルトン閉路

演習 6.：

K_7 の dual としてトーラスに埋め込まれた Heawood グラフは contractible なハミルトン閉路を<u>持たない</u>ことを示せ．



トーラス上の K_7　　　Heawood グラフ

http://www.amotlpaa.org/math/k7torus.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Heawood_graph

追加の応用と演習

演習 7.：下の予想に関して，以下を示せ．

予想 (Malkevitch `88)

G : 長さ 4 の閉路を含む 4-連結平面グラフ

$\Rightarrow$ G : pancyclic (長さ $3 \sim |G|$ の閉路をすべて含む)

(I) 「長さ 4 の閉路を含む」という仮定は必要である．

(II) 「長さ 3 の閉路を含む」という仮定は必要ない．

(III) $|G| \geq 5$ ならば，長さ $|G|, |G|-1, |G|-2$ の閉路を持つ．

(IV) 予想は三角形分割に限定すると正しい．

では，演習を
がんばってください