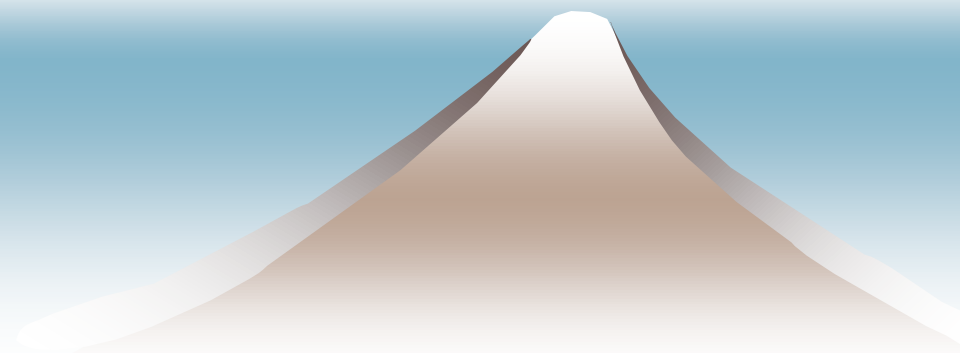


演習問題

注1： 番外問題は，番外である理由がある

注2： 余裕のある人はそちらもどうぞ

注3： ただし，解答・解説は演習優先



演習 0.

下の Tait の定理を示せ.

Tait (1884) :

任意の 3-連結 3-正則平面グラフが
ハミルトン閉路を持つ

False

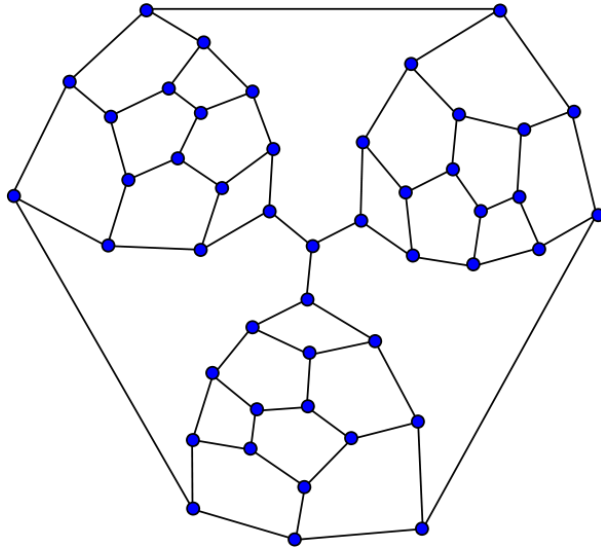


任意の平面グラフは 4-彩色を持つ

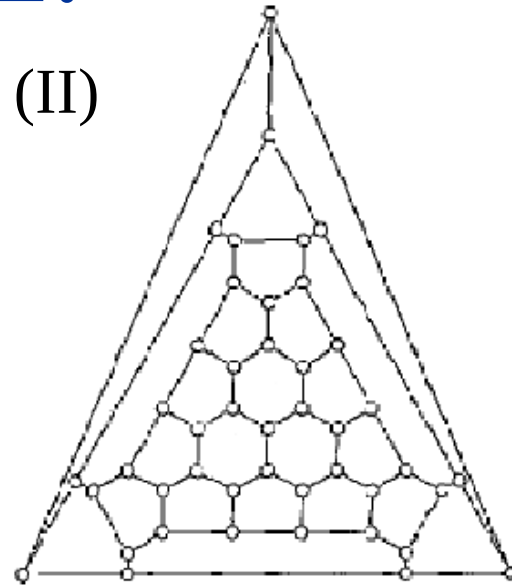
True (4色定理)

演習 1.

(I)



(II)



上はどちらも **3-連結 3-正則平面グラフ** である
これらが **ハミルトン閉路** を 持たない ことを示せ. (Tutte, '46, '72)

左 : https://en.wikipedia.org/wiki/Tutte_graph

右 : M.N. Ellingham, Spanning paths, cycles and walks for graphs on surfaces, Congr. Numer. 115 (1996) 55–90.

演習 2.

下の Grinberg の定理 ('68) を示せ.

G : 平面グラフでハミルトン閉路 C を持つ

$F_{\text{int}}, F_{\text{out}}$: それぞれ C の内側, 外側の面の集合

$|f|$: 面 f の境界の長さ

このとき,
$$\sum_{f \in F_{\text{out}}} (|f| - 2) = \sum_{f \in F_{\text{out}}} (|f| - 2)$$
 が成り立つ.

演習 3.

下の (I) 左, (II) 右をそれぞれを示せ.

$\forall F^2$: 閉曲面

$\forall G$: 4-連結グラフ on F^2

$\forall S$: G の頂点集合,

$$G - S \text{ の成分数} \leq |S| - \chi(F^2)$$

$\forall F^2$: 閉曲面

$\exists G$: 4-連結三角形分割

$\exists S$: G の頂点集合,
s.t.

$$G - S \text{ の成分数} = |S| - \chi(F^2)$$

演習 4.

下を示せ.

(I) 任意の 4-連結平面グラフは 1-ハミルトン連結である.

Hint : Sanders の Tutte 道の定理を使う.

(II) 平面グラフの 1-ハミルトン連結性の判定問題は P である.

(III) 平面グラフのハミルトン連結性の判定問題は NP-完全である.

G が 1-ハミルトン連結 (1-HC)

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の頂点 v に対し, $G - v$ がハミルトン連結.

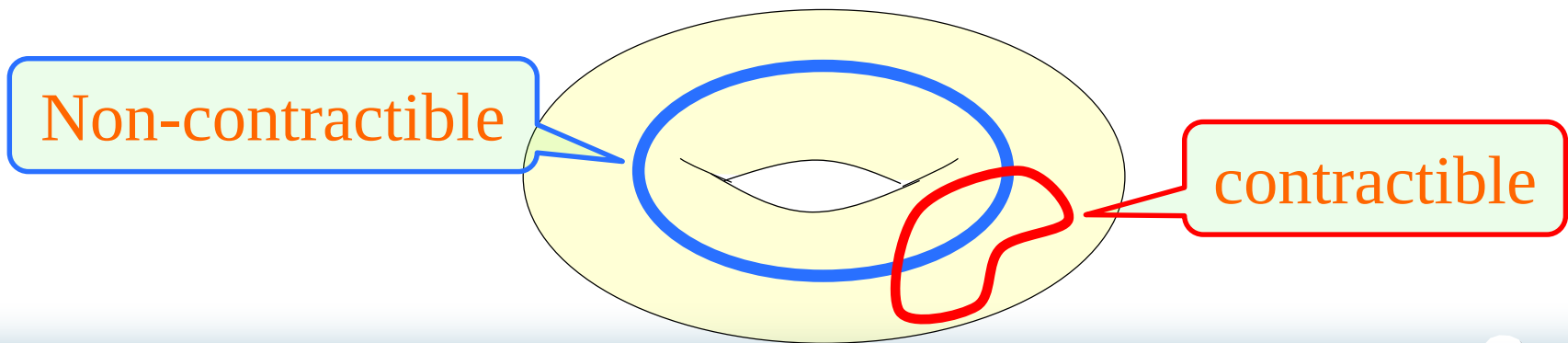
演習 5.

(I) トーラス上のグラフは,

contractible なハミルトン閉路を持たば

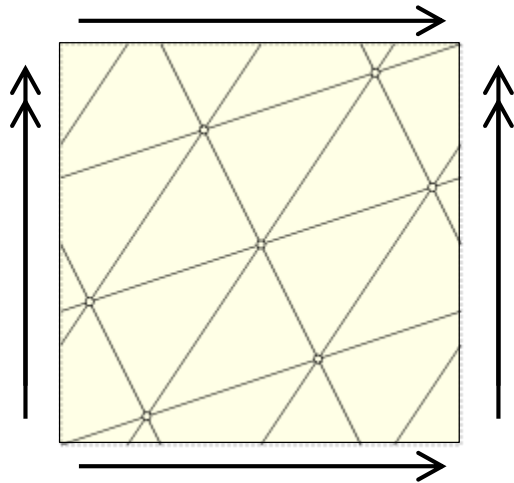
5ページ埋め込みを持つことを示せ

(II) これは 4ページ埋め込みへ拡張できるか?

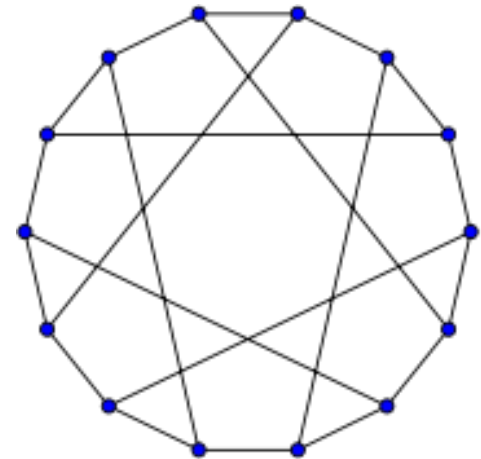
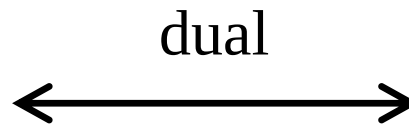


演習 6.

K_7 の dual としてトーラスに埋め込まれた Heawood グラフは
contractible なハミルトン閉路を持たないことを示せ.



トーラス上の K_7



Heawood グラフ

<http://www.amotlpaa.org/math/k7torus.html>

https://en.wikipedia.org/wiki/Heawood_graph

演習 7.

下の予想に関して，以下を示せ．

予想 (Malkevitch `88)

G : 長さ 4 の閉路を含む 4-連結平面グラフ

$\Rightarrow G$: **pancyclic** (長さ $3 \sim |G|$ の閉路をすべて含む)

- (I) 「長さ 4 の閉路を含む」という仮定は必要である．
- (II) 「長さ 3 の閉路を含む」という仮定は必要ない．
- (III) $|G| \geq 5$ ならば，長さ $|G|, |G| - 1, |G| - 2$ の閉路を持つ．
- (IV) 予想は三角形分割に限定すると正しい．

演習 8.

G : ハミルトン連結なグラフ

このとき,

$\forall S$: 切断集合, $G - S$ の成分数 $\leq |S| - \varepsilon$

が $\varepsilon = 1$ で成り立つことを示せ.

また, G : 2-ハミルトンなグラフ,

または, G : 1-ハミルトン連結なグラフ, のとき,

上が $\varepsilon = 2$ で成り立つことを示せ.

演習番外 1. (確認が面倒)

ハミルトン閉路を持たないグラフ G で、

下の条件を t になるべく大きい値で満たさないものを見つけよ

$$(*) \quad \forall S: \text{切断集合}, (G - S \text{ の成分数}) \leq \frac{1}{t} |S|$$

$t = 1 - \varepsilon$: ほぼ自明

$t = 4/3$: ある有名なグラフがこれ

$t = 3/2$: Chvatal '73 (最初の予想は「 $t > 3/2$ では不可能」)

$t = 2 - \varepsilon$: Thomassen '78 (これ以降 2-tough 予想と呼ばれる)

$t = 9/4 - \varepsilon$: Bauer, Broersma, Veldman '00 (現在の記録)

演習番外 2. (基本だが・・・)

G : 平面グラフ, C : 外領域の境界歩道

x : C 上の頂点, e : C 上の辺, $y \in V(G) - \{x\}$

$\exists x$ から y への道で e を通るもの

$$e = uv$$

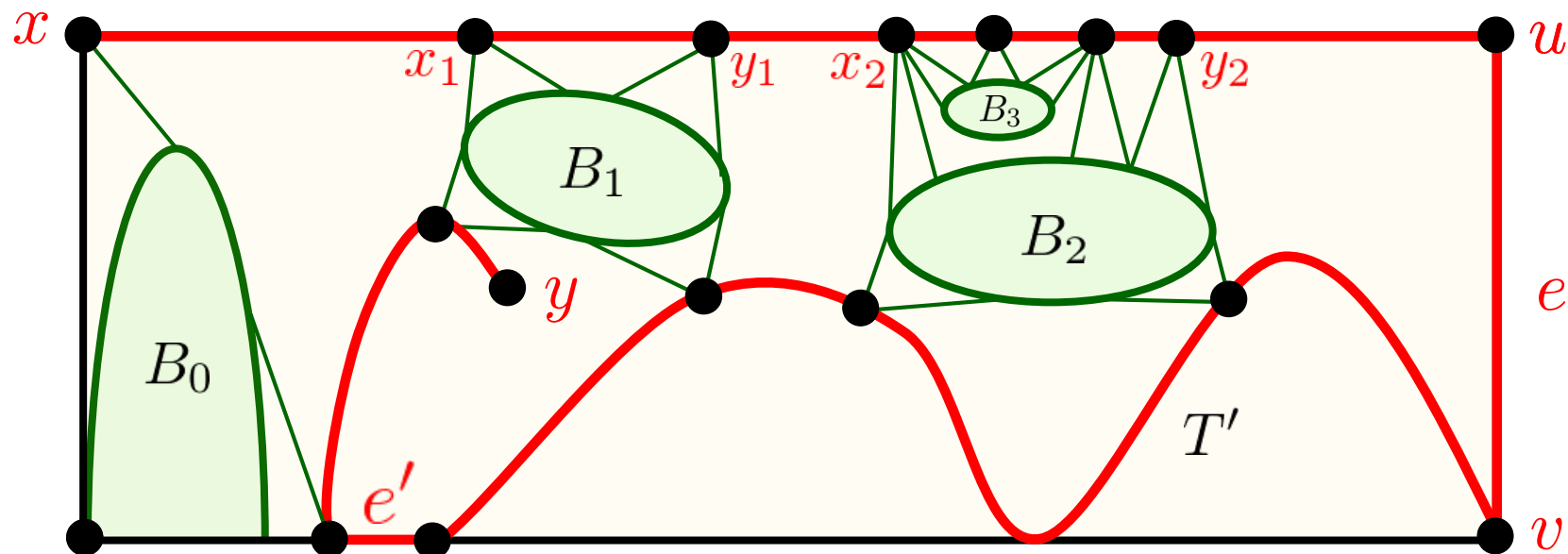
$C[x, u]$: C の時計まわりの部分歩道で x から u まで

このとき,

$G - V(C[x, u])$ に v から y への道が存在するか,

または, $G - V(C[v, x])$ に u から y への道が存在する, を示せ

演習番外 3. (意外と大変)



$$C[x_i, y_i] \cap C[x_j, y_j] \neq \emptyset \Rightarrow C[x_j, y_j] \subseteq C[x_i, y_i] \text{ または } C[x_i, y_i] \subseteq C[x_j, y_j]$$

これを示せ.

(できれば, **Jordan 閉曲線定理**を使わない証明が良い)

演習番外 4. (気になる人向け)

Thomassen と, 河原林 & 小関の **Tutte 道** の証明は,
ともに構成的でアルゴリズムとなるが,
その時間計算量を求めよ.

演習番外 5. (未解決問題)

系

G : 閉路的-4-辺連結 3-正則平面グラフ

$\Rightarrow G$ は長さ $\frac{3}{4}|G|$ 以上の閉路を持つ

上の係数 $3/4$ を (二部グラフで) 改良せよ

演習番外 6. (本気の人向け)

補題 (中本, 野澤, 小関, '15+)

G : 2-連結平面グラフ

C : 外領域の境界歩道

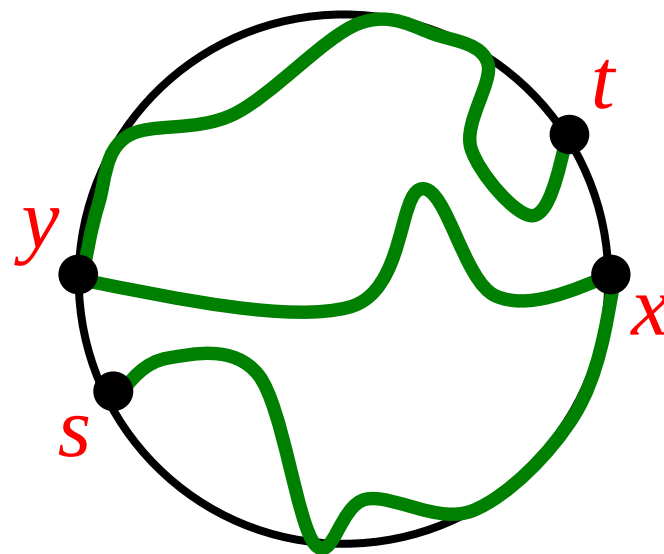
s, y, t, x : C 上の頂点 $sy \in E(G)$
(C にこの順で現れる)

$\exists$ s から t への道で x, y を順に通るもの



$\exists$ s から t への C -Tutte 道で
 x, y を順に通るもの

左を示せ



Hint:

$V(C(x, s])$ を除去し,
Thomassen の証明を使う