# 演習問題

入力: ブール変数$U$, クローズ集合$\Gamma$ (各クローズはリテラルを**丁度**3個含む),

非負整数のクローズ重み $w:\Gamma \to \mathrm{Z}_+$

下記の問題を01整数計画に定式化し, 丸め法を用いた近似解法を構築し, その近似比率を算定しなさい.

P1: min. $\sum_{\{b,b',b''\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(b)+x(b')+x(b'')\big)^2$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\qquad (\forall a\in U).$

P2: min. $\sum_{\{b,b',b''\}=C\in\Gamma} w(C)\min\{2, x(b)+x(b')+x(b'')\}$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\qquad (\forall a\in U).$

P3: max. $\sum_{\{b,b',b''\}=C\in\Gamma} w(C)\min\{2, x(b)+x(b')+x(b'')\}$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\qquad (\forall a\in U).$

# P1 目的関数値

P1: min. $\sum_{\{e,\,f,\,g\}=C\in\Gamma} w(C)\bigl(x(e)+x(f)+x(g)\bigr)^2$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\qquad(\forall a\in U).$

$C=\{e,f,g\}$とすると $x_i\in\{0,1\}$ $(\forall i)$ ならば

$(x(e)+x(f)+x(g))^2$

$=(x(e))^2+(x(f))^2+(x(g))^2+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)$

$=x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)$

# P1　独立丸め法(IR)の適用

IR を使うことにしよう！

$0 \leq x \leq 1$ を満たすベクトル.

$X$ : $x$を用いてIRで得られる確率変数ベクトル.

$Z$ : 解$X$に対応する目的関数値を表す確率変数.

$$Z = \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C) \begin{pmatrix} X(e)+X(f)+X(g) \\ +2X(e)X(f)+2X(f)X(g)+2X(g)X(e) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}[Z] = \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C) \begin{pmatrix} x(e)+x(f)+x(g) \\ +2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

# P1　凸2次緩和

P1−1: min. $\sum_{C\in\Gamma} w(C)z(C)$

s. t. $\quad z(C) \geq \left(x(e)+x(f)+x(g)\right)^2, \qquad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$\qquad z(C) \geq x(e)+x(f)+x(g), \qquad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$\qquad x(a)+x(\neg a)=1, \quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\} \quad (\forall a\in U).$

上記の連続緩和問題の最適値を$z^*$とし, 最適解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$を用いてIRを行う.

$$
\begin{aligned}
&x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)\\
&\leq x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)\\
&\qquad +(x(e))^2+(x(f))^2+(x(g))^2\\
&\leq x(e)+x(f)+x(g)+(x(e)+x(f)+x(g))^2 \leq 2z(C)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{E}[Z]=\sum_{C\in\Gamma} w(C)2z(C) \leq 2z^* \rightarrow$ 2−近似

# P1　最悪ケースは？

$x(e)+x(f)+x(g)=\alpha$ と書くと,

$2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)$ が最大となるのは

$x(e)=x(f)=x(g)=\alpha/3$ のときで $3\times 2(\alpha/3)^2=\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^2$

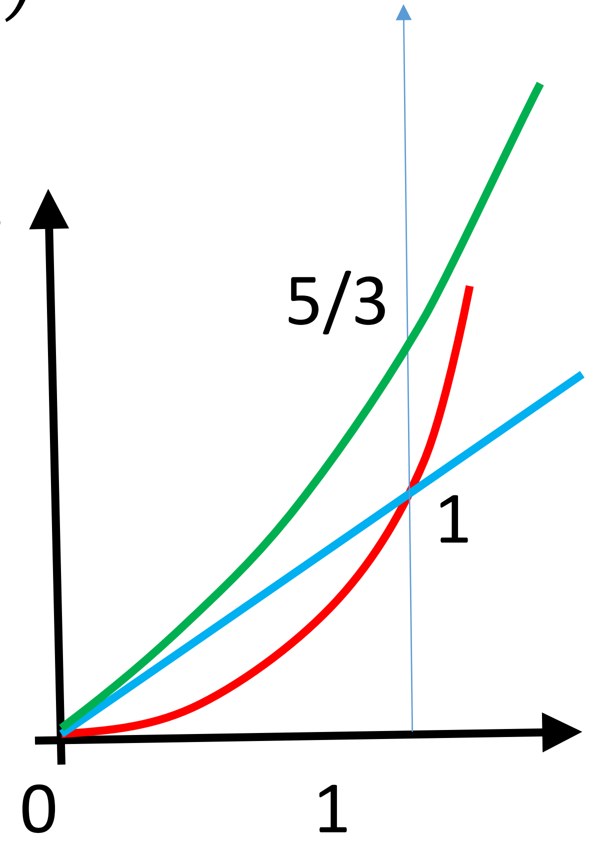
目的関数: $x(e)+x(f)+x(g)+\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^2=\alpha+\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^2$

最悪ケース解析なので, このときがネックになるのでは？

$z(C)\geq\left(x(e)+x(f)+x(g)\right)^2=\alpha^2$

$z(C)\geq x(e)+x(f)+x(g)=\alpha$

$\alpha+\left(\frac{2}{3}\right)\alpha^2\leq\left(\frac{5}{3}\right)\max\{\alpha^2,\alpha\}$　2-近似は算定が甘い？



# P1　マクローリンの不等式

$x(e) = x(f) = x(g) = \frac{1}{3},\quad z(C) = 1$　のときは？

$x(e) + x(f) + x(g) + 2x(e)x(f) + 2x(f)x(g) + 2x(g)x(e)$ → 1＋(2/3)=5/3

$\leq x(e) + x(f) + x(g) + 2x(e)x(f) + 2x(f)x(g) + 2x(g)x(e)$

$+(x(e))^2+(x(f))^2+(x(g))^2$ → 1/3+5/3=6/3=2

$\leq x(e) + x(f) + x(g) + (x(e) + x(f) + x(g))^2 \leq 2z(C)$ → 2×1

対称関数を扱うとき便利なマクローリンの不等式（相加相乗平均を含む）

$\sqrt[3]{pqr} \leq \sqrt[2]{\frac{pq+qr+pr}{3}} \leq \frac{p+q+r}{3}$ （$p = q = r$ のとき，すべて等号）

$\sqrt[4]{pqrs} \leq \sqrt[3]{\frac{pqr+pqs+prs+qrs}{4}} \leq \sqrt[2]{\frac{pq+pr+ps+qr+qs+rs}{6}} \leq \frac{p+q+r+s}{4}$

# P1　近似比率

$$\sqrt[3]{pqr} \le \sqrt[2]{\frac{pq+qr+pr}{3}} \le \frac{p+q+r}{3}$$

$$x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)$$
$$\le x(e)+x(f)+x(g)+2\times 3\left(\frac{x(e)+x(f)+x(g)}{3}\right)^2$$
$$\le x(e)+x(f)+x(g)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(x(e)+x(f)+x(g)\right)^2$$
$$\le z(C)+\left(\frac{2}{3}\right)z(C)=\left(\frac{5}{3}\right)z(C)$$

$$\mathrm{E}[Z]=\sum_{C\in\Gamma} w(C)\left(\frac{5}{3}\right)z(C) \le \left(\frac{5}{3}\right)z^* \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)\text{-近似}$$

ちなみに$n$個の和の2乗ならば

$$\sqrt[2]{\frac{\sum_{i<j} x_i x_j}{\binom{n}{2}}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + 2\sum_{i<j} x_i x_j \le \sum_{i=1}^{n} x_i + 2\binom{n}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le z(C)+\left(1-\frac{1}{n}\right)z(C)=\left(2-\frac{1}{n}\right)z(C)$$

# P1 問題から2乗項を無くす！

P1: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(e)+x(f)+x(g)\big)^2$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\quad(\forall a\in U).$

$C=\{e,f,g\}$ とすると $x_i\in\{0,1\}$ $(\forall i)$ ならば

$$
\begin{aligned}
&(x(e)+x(f)+x(g))^2\\
&=(x(e))^2+(x(f))^2+(x(g))^2+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)\\
&=x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)
\end{aligned}
$$

以下のようにも書ける筈！

P1−2: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\begin{pmatrix} x(e)+x(f)+x(g) \\ +2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)\end{pmatrix}$

s. t. $x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\quad(\forall a\in U).$

# P1　目的関数

P1−2: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\begin{pmatrix} x(e)+x(f)+x(g) \\ +2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e) \end{pmatrix}$

$$= \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)x(e)+2x(e)x(f)+\left(\frac{1}{2}\right)x(f) \\ +\left(\frac{1}{2}\right)x(f)+2x(f)x(g)+\left(\frac{1}{2}\right)x(g) \\ +\left(\frac{1}{2}\right)x(e)+2x(e)x(g)+\left(\frac{1}{2}\right)x(g) \end{pmatrix}$$

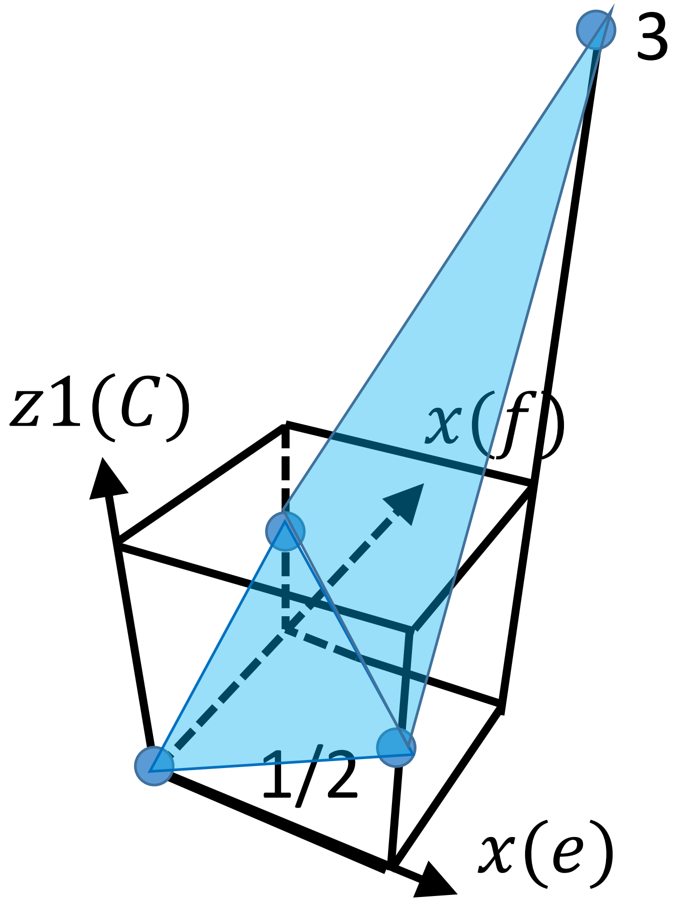
s. t.　$x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\quad (\forall a\in U).$

# P1　下側凸包の記述

$$\left(\frac{1}{2}\right)x(e) + 2x(e)x(f) + \left(\frac{1}{2}\right)x(f)$$

$$z1(C) \geq (1/2)(x(e) + x(f))$$

$$z1(C) \geq (5/2)(x(e) + x(f)) - 2$$




P1−3: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)(z1(C) + z2(C) + z3(C))$

s. t.
$$\left.\begin{array}{l} z1(C) \geq (1/2)(x(e) + x(f)) \\ z1(C) \geq (5/2)(x(e) + x(f)) - 2 \\ z2(C) \geq (1/2)(x(f) + x(g)) \\ z2(C) \geq (5/2)(x(f) + x(g)) - 2 \\ z3(C) \geq (1/2)(x(e) + x(g)) \\ z3(C) \geq (5/2)(x(e) + x(g)) - 2 \end{array}\right\} (\forall C = \{e, f, g\} \in \Gamma),$$

$$x(a) + x(\neg a) = 1,\ \ x(a),\ x(\neg a) \in \{0,1\} \qquad (\forall a \in U).$$

# P1　独立丸め法

$$z1(C) \geq (1/2)(x(e)+x(f))$$
$$z1(C) \geq (5/2)(x(e)+x(f))-2$$

P1−3の連続緩和の最適値を$z^*$とし，最適解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$を用いてIRを行う.

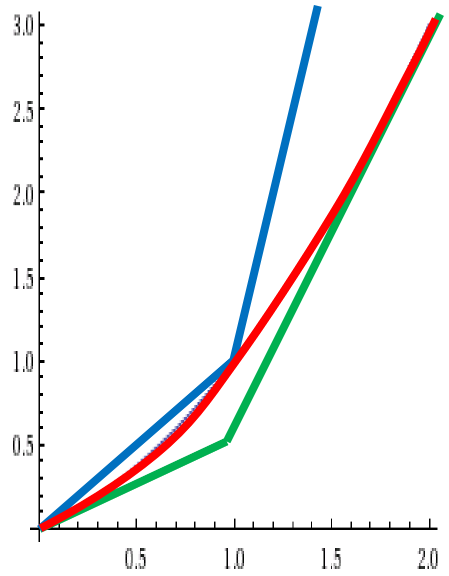
$$\left(\frac{1}{2}\right)x(e)+2x(e)x(f)+\left(\frac{1}{2}\right)x(f)$$ 相加相乗平均

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right)+2\left(\frac{x(e)+x(f)}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right)^2$$

$$\leq 2\max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right),\\ (5/2)(x(e)+x(f))-2\end{array}\right\}\leq 2z1(C)$$

$$z1(\mathrm{C}) \geq \max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right),\\ (5/2)(x(e)+x(f))-2\end{array}\right\}$$




$(x(e)+x(f))$

$$\mathrm{E}[Z]=\sum_{C\in\Gamma}w(C)(2z1(C)+2z2(C)+2z3(C))$$

$$\leq 2z^* \rightarrow$$ 2−近似

# P1　制約式を集める

P1−4: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)(z1(C)+z2(C)+z3(C))$

s. t.

$$z1(C) \geqq (1/2)(x(e)+x(f))$$
$$z1(C) \geqq (5/2)(x(e)+x(f))-2$$
$$z2(C) \geqq (1/2)(x(f)+x(g))$$
$$z2(C) \geqq (5/2)(x(f)+x(g))-2 \qquad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$$
$$z3(C) \geqq (1/2)(x(e)+x(g))$$
$$z3(C) \geq (5/2)\big(x(e)+x(g)\big)-2$$
$$z1(C)+z2(C)+z3(C) \geq \big(x(e)+x(f)+x(g)\big)^2,$$
$$z1(C)+z2(C)+z3(C) \geq x(e)+x(f)+x(g)$$
$$x(a)+x(\neg a)=1,\ \ x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\} \qquad (\forall a\in U).$$

こうしたら，もっとなんとかなる？

# P1　最悪ケース

$C=\{e,f,g\}$ とし，$x(e)=x(f)=x(g)=1/3$ のとき

目的関数

$$x(e)+x(f)+x(g)+2x(e)x(f)+2x(f)x(g)+2x(g)x(e)=5/3$$

制約

$$z1(C)+z2(C)+z3(C)\geq\left(x(e)+x(f)+x(g)\right)^2=1$$

$$z1(C)+z2(C)+z3(C)\geq x(e)+x(f)+x(g)=1$$

$$z1(C)\geq\left(\frac{1}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right)=1/3 \qquad \cdots\ z2(C), z3(C) \text{ も同様}$$

$$z1(C)\geq\left(\frac{5}{2}\right)\left(x(e)+x(f)\right)-2=-1/3 \qquad \cdots\ z2(C), z3(C) \text{ も同様}$$

ゆえに $z1(C)=z2(C)=z3(C)=1/3$ であり，

$$z1(C)+z2(C)+z3(C)=1$$

(5/3)−近似より低くすることは難しそう！

# P2 まずはやってみよう

P2: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\min\{2, x(e)+x(f)+x(g)\}$

s. t. $\quad x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\qquad(\forall a\in U).$

P2−1: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)z(C)$

s. t. $\quad z(C)\geq\left(\frac{2}{3}\right)\left(x(e)+x(f)+x(g)\right)\quad(\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$z(C)\in\{0,1,2\}\qquad(\forall C\in\Gamma),$

$x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\}\quad(\forall a\in U).$

# P2 まずはやってみよう

P2-1-R: min. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)z(C)$

s. t. $z(C) \geq \left(\frac{2}{3}\right)\big(x(e)+x(f)+x(g)\big) \quad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$z(C) \geq 0 \quad (\forall C\in\Gamma),$

$x(a)+x(\neg a)=1,\ \ 0\leq\ x(a),\ x(\neg a) \quad (\forall a\in U).$

上記の連続緩和の最適値を$z^*$とし, 最適解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$を用いてIRを行う.

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z}] = \mathrm{E}\Big[\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(X(e)+X(f)+X(g)-X(e)X(f)X(g)\big)\Big]$$

$$= \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(e)+x(f)+x(g)-x(e)x(f)x(g)\big)$$

$$\leq \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(e)+x(f)+x(g)\big) \leq \left(\frac{3}{2}\right)\sum_{C\in\Gamma} w(C)z(C) = \left(\frac{3}{2}\right)z^*$$

(3/2)−近似

# P2 もっと良くできるの？

（1） IRで得られる解の算定を良くする

（2） 丸め法をもっと良くする

（3） 制約式をもっと良くする

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z}] = \mathrm{E}\left[\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(X(e)+X(f)+X(g)-X(e)X(f)X(g)\big)\right]$$

$$= \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(e)+x(f)+x(g) - x(e)x(f)x(g)\big)$$

$$\leq \sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\big(x(e)+x(f)+x(g)\big) \leq \left(\frac{3}{2}\right)\sum_{C\in\Gamma} w(C)z(C) = \left(\frac{3}{2}\right)z^*$$

# P2 解の算定が悪いんじゃないのか？

## (1) IRで得られる解の算定

例えば$C=\{e,f,g\}$ で $x(e)=x(f)=x(g)=\varepsilon$ ならば,

$$z(C)=\binom{2}{3}(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)=2\varepsilon$$

$$\mathrm{E}[X(e)+X(f)+X(g)-X(e)X(f)X(g)]$$
$$=x(e)+x(f)+x(g)-x(e)x(f)x(g)=3\varepsilon-\varepsilon^3$$

$$\frac{3\varepsilon-\varepsilon^3}{z(C)}=\frac{3\varepsilon-\varepsilon^3}{2\varepsilon}=\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\cong\frac{3}{2}$$

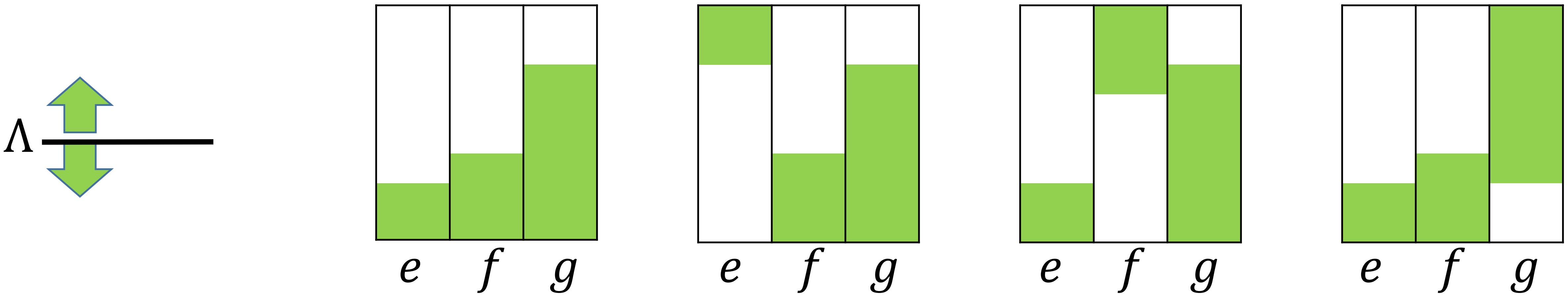
多分 (3/2)-近似 という推定は, そんなに悪くない！

# P2 丸め法が悪いんじゃないのか？

(2) 丸め法をもっと良くする → 従属丸め法を使ってみよう！

例えば，$C = \{e, f, g\}$ で $x(e) \le x(f) \le x(g)$ としよう．

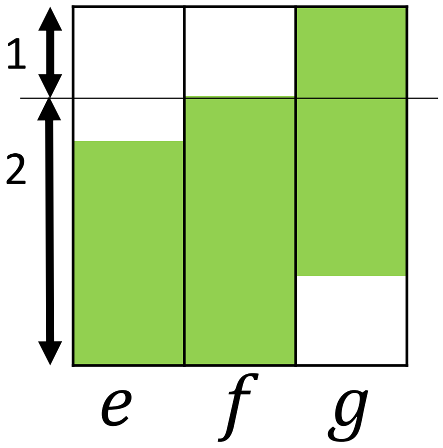
(上下を無視すると，下記の4つが等確率(1/4)で出現)




DRで得られる値 $\le \left(\frac{1}{4}\right)\Big(\big(x(f) + x(g)\big) + 3\big(x(e) + x(f) + x(g)\big)\Big)$

$= \left(\frac{1}{4}\right)(3x(e) + 4x(f) + 4x(g))$

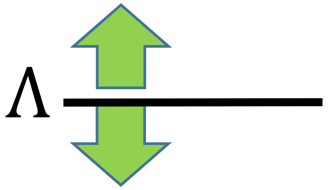
## P2 丸め法が悪いんじゃないのか？

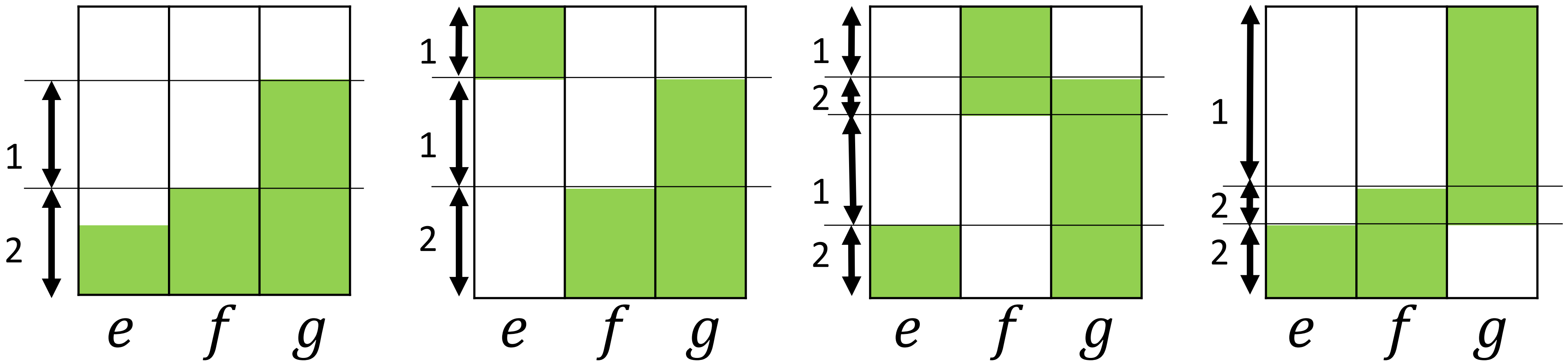



(2) 丸め法をもっと良くする → 従属丸め法を使ってみよう！

例えば, $C = \{e, f, g\}$ で $x(e) \leq x(f) \leq x(g)$ としよう.

(上下を無視すると, 下記の4つが等確率(1/4)で出現)




DRで得られる値 $\leq \left(\frac{1}{4}\right)\Big(\big(x(f) + x(g)\big) + 3\big(x(e) + x(f) + x(g)\big)\Big)$

$= \left(\frac{1}{4}\right)(3x(e) + 4x(f) + 4x(g))$

# P2 従属丸め法を使ってみよう

$C = \{e, f, g\}$ で $x(e) \leq x(f) \leq x(g)$ としよう.

DRで得られる値 $\leq \left(\frac{1}{4}\right)(3x(e) + 4x(f) + 4x(g))$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)(3x(e) + 4x(f) + 4x(g)}{z(C)} \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)(3x(e) + 4x(f) + 4x(g)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(x(e) + x(f) + x(g)\right)}$$

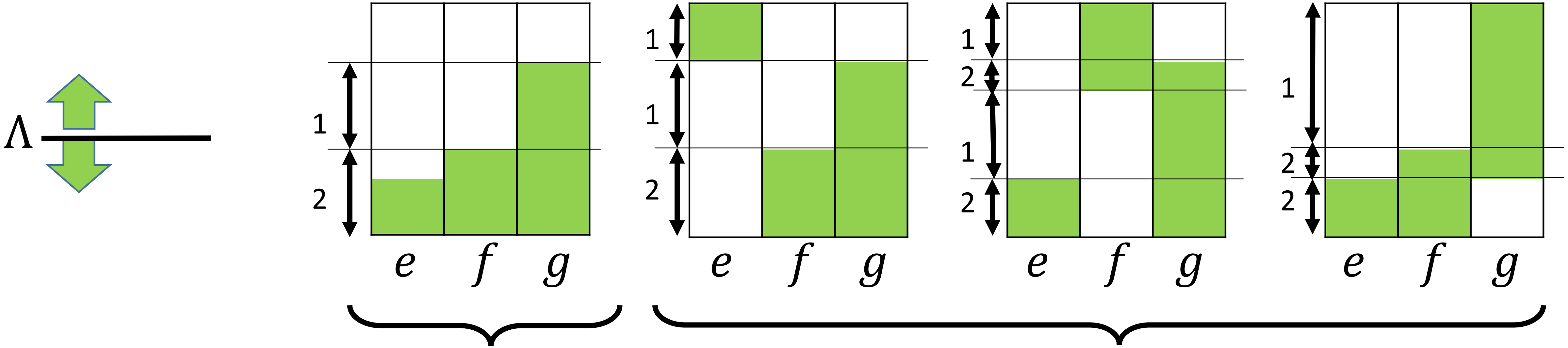
$$= \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{x(e)}{x(e)+x(f)+x(g)} \leq \frac{3}{2}$$ （$x(e) = 0$ のとき）

やっぱり (3/2)−近似

# P2 従属丸め法を使ったとき

例えば, $C = \{e, f, g\}$ で $x(e) \leq x(f) \leq x(g)$ としよう.

(上下を無視すると, 下記の4つが等確率(1/4)で出現)




$x(f) + x(g)$ $\qquad$ $x(e) + x(f) + x(g)$

2番目に大きいの＋1番目に大きいの

# P2「1番目に大きいの」と「2番目に大きいの」

## (3) 制約式をもっと良くする

P2−2: min. $\sum_{\{C\in\Gamma} w(C)(z(C))$

$$
\text{s. t.}\quad \left.\begin{array}{l} z(C) \geq x(e)+x(f), \\ z(C) \geq x(f)+x(g), \\ z(C) \geq x(g)+x(e), \end{array}\right\} \quad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),
$$

$$
z(C)\in\{0,1\} \qquad (\forall C\in\Gamma),
$$

$$
x(a)+x(\neg a)=1,\quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\} \qquad (\forall a\in U).
$$

$z(C) \geq \left(\frac{2}{3}\right)\left(x(e)+x(f)+x(g)\right)$ は自動的に満たされる

# P2「1番目に大きいの」と「2番目に大きいの」

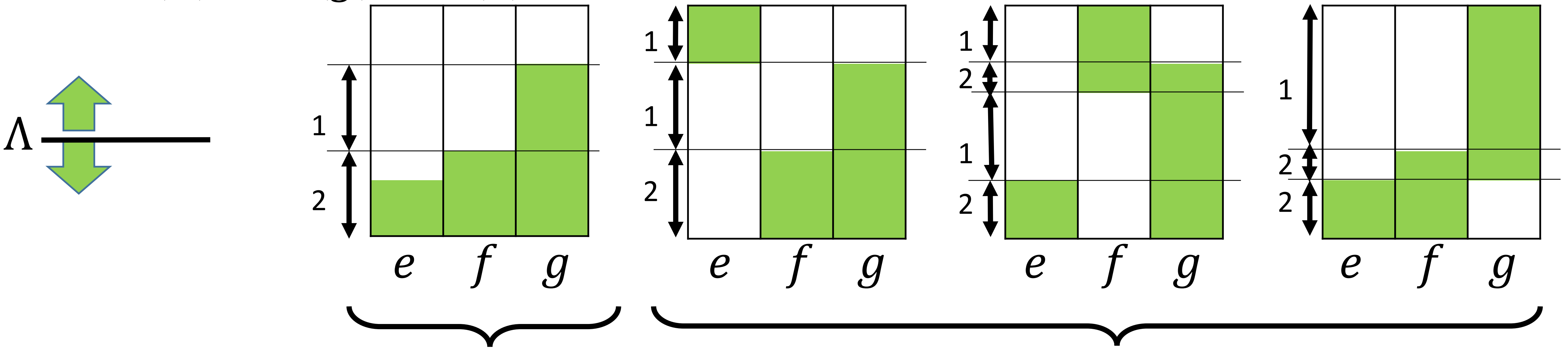
(3) 制約式をもっと良くする

$$z(C) \geq \left(\frac{2}{3}\right)\left(x(e) + x(f) + x(g)\right)$$

$z(C) \geq x(e) + x(f)$,

$z(C) \geq x(f) + x(g)$, → $z(C) \geq$ 1番目に大きいの＋2番目に大きいの

$z(C) \geq x(g) + x(e)$,

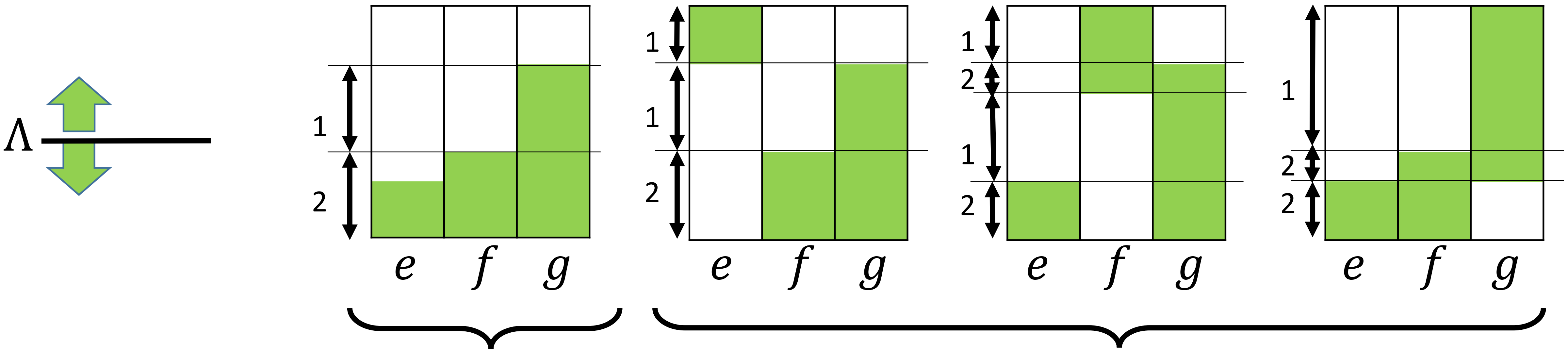



1番目に大きいの＋2番目に大きいの
$\leq z(C)$

総和 $\leq \left(\frac{3}{2}\right) z(C)$

# P2「1番目に大きいの」と「2番目に大きいの」

## (3) 制約式をもっと良くする




1番目に大きいの＋2番目に大きいの
$\leq z(C)$

総和 $\leq \left(\frac{3}{2}\right) z(C)$

DRで得られる値$\leq \left(\frac{1}{4}\right) z + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) z(C) = \left(\frac{11}{8}\right) z(C)$ → (11/8)-近似

# P3

P3: max. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)\min\{2, x(e)+x(f)+x(g)\}$

s. t. $\quad x(a)+x(\neg a)=1, \quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\} \quad (\forall a\in U).$

MAX SAT みたい！

P3−1: max. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)z(C)$

s. t. $\quad x(e)+x(f)+x(g)\geq z(C) \quad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$z(C)\in\{0,1,2\} \quad (\forall C\in\Gamma),$

$x(a)+x(\neg a)=1, \quad x(a),\ x(\neg a)\in\{0,1\} \quad (\forall a\in U).$

# P3

P3−1−R: max. $\sum_{\{e,f,g\}=C\in\Gamma} w(C)z(C)$

s. t. $\quad x(e)+x(f)+x(g) \geq z(C) \qquad (\forall C=\{e,f,g\}\in\Gamma),$

$0 \leq z(C) \leq 2 \qquad (\forall C\in\Gamma),$

$x(a)+x(\neg a)=1,\ \ 0\leq\ x(a),\ x(\neg a) \qquad (\forall a\in U).$

上記の連続緩和の最適値を$z^*$とし，最適解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$を用いてIRを行う.

$$\mathrm{E}[X(e)+X(f)+X(g)-X(e)X(f)X(g)]$$
$$=x(e)+x(f)+x(g)-x(e)x(f)x(g)$$
$$\geq (x(e)+x(f)+x(g))-\left(\frac{x(e)+x(f)+x(g)}{3}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{pqr} \leq \sqrt[2]{\frac{pq+qr+pr}{3}} \leq \frac{p+q+r}{3}$$

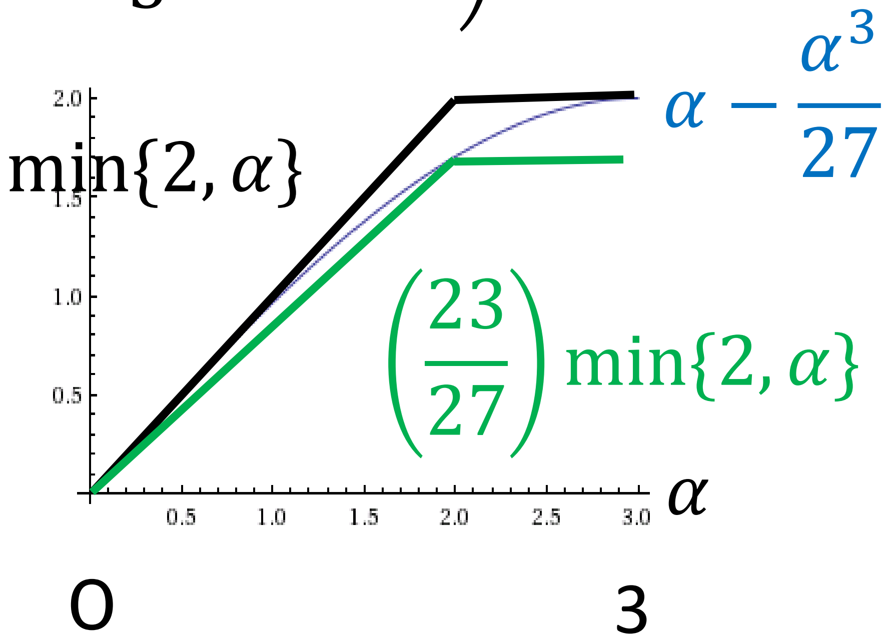
# P3 の目的関数値の期待値

$$\mathrm{E}[X(e)+X(f)+X(g)-X(e)X(f)X(g)]$$
$$\geq \big(x(e)+x(f)+x(g)\big)-\left(\frac{x(e)+x(f)+x(g)}{3}\right)^3$$

$\min\{2,\ x(e)+x(f)+x(g)\} \geq z(C)$

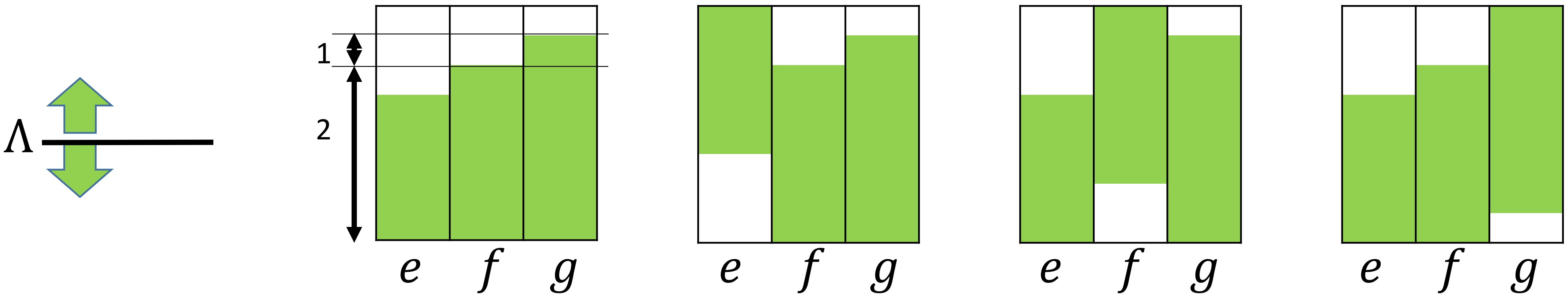
$\alpha = x(e)+x(f)+x(g)$ とすると

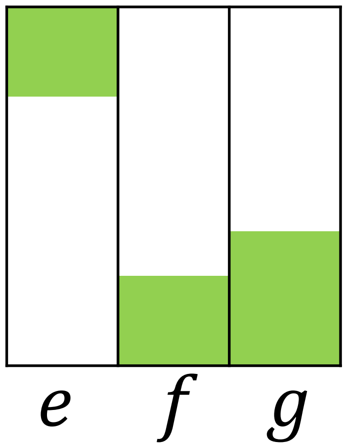
$$\frac{\alpha-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}{\min\{2,\alpha\}}=\frac{\alpha-\frac{\alpha^3}{27}}{\min\{2,\alpha\}}\geq\frac{2-\frac{8}{27}}{2}$$
$$=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}=0.851$$



# P3　従属丸め法は？

下記が等確率(1/4)で出現




隙間があるケースも・・・・

すいません，分かりません