

0-1 整数計画における ラウンディング(丸め)技法

東京工業大学 松井知己

0-1 整数計画と丸め技法

01IP: $\max./\min. f(x)$ subject to $x \in \Omega, x_i \in \{0,1\} (\forall i).$

01IP-R: $\max./\min. f(x)$ subject to $x \in \Omega, 0 \leq x_i \leq 1 (\forall i).$

丸め技法: 与えられたベクトル $0 \leq x \leq 1$ を 0-1ベクトルに変換.
もともと 0 または 1 のものは, そのままの値.

手続き: 01IP-Rの最適解を何らかの規則で丸める

- (1) 元の問題 01IP の許容解になっているか?
- (2) 元の問題 01IP の「良い」許容解になっていそう!

シンプルな確率的丸め法

独立丸め法(IR: Independent Rounding)

入力: ベクトル x , ただしすべての要素は0以上1以下.

手続: 各変数 x_i を, 独立に, 確率 x_i で1に, 確率 $1 - x_i$ で0に丸める.

例: $x_i = 0.8$ ならば, 確率0.8で1に, 確率0.2で0に丸める.

要素 x_i を丸めた結果得られる値を, 0-1確率変数 X_i で表す.

確率変数ベクトルを $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ と書く.

0-1確率変数の性質のおさらい

性質 X_i : 確率 x_i で1に, 確率 $1 - x_i$ で0となる確率変数

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ は以下を満たす.

(a) $E[X_i] = \Pr[X_i = 1] = x_i$

(b) $E[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i] = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

(c) X_i と X_j が独立ならば $E[X_i X_j] = E[X_i] E[X_j] = x_i x_j$

(d) $E[X_i X_i] = E[X_i] = \Pr[X_i = 1] = x_i$

(b)の性質は, 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が従属でも成り立つ.

(c)の性質は, 独立性から得られる!

(d)の性質は, $X_i \in \{0, 1\}$ より, $0^2 = 0, 1^2 = 1$ から得られる.

IRを使って, 定理を証明してみよう!

Q : 対角成分がすべて0の $n \times n$ 正方行列

d : n 次元ベクトル

01QP-R: : max./min. $x^T Q x + d^T x$ subject to $0 \leq x \leq 1$

定理: 行列 Q の対角成分がすべて0ならば, 01QP-R の最適解に, すべての要素が0または1のベクトルが存在する.

証明: 01QP-Rの最適解 x^* にIRを適用し, 得られた解を X とする.

Z : IRで得られる解の目的関数値(確率変数)

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\sum_{(i,j): i \neq j} q_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n d_i X_i\right] \\ &= \sum_{(i,j): i \neq j} q_{ij} E[X_i] E[X_j] + \sum_{i=1}^n d_i E[X_i] \\ &= \sum_{(i,j): i \neq j} q_{ij} x_i^* x_j^* + \sum_{i=1}^n d_i x_i^* = z^* : \text{01QP-Rの最適値} \quad (\text{続く}) \end{aligned}$$

IRを使って, 定理を証明してみよう!

01QP-R: : $\max./\min. \ x^T Q x + d^T x$ subject to $0 \leq x \leq 1$

定理: 行列 Q の対角成分がすべて0ならば, 01QP-R の最適解に, 各要素が0または1のベクトルが存在する.

証明: 01QP-Rの最適解 x^* にIRを適用し, 得られた解を X とする.

Z : IRで得られる解の目的関数値(確率変数)

$E[Z] = z^*$: 01QP-Rの最適値,

最大化ならば, 常に $Z \leq z^*$ であるから, Z の実現値はすべて z^* .

最小化ならば, 常に $Z \geq z^*$ であるから, Z の実現値はすべて z^* .

すなわち, x^* の要素で0と1の間の値を持つものを, どう丸めても元問題01QP-Rの最適解が得られる.

例えば x^* の各要素を四捨五入したベクトルは01QP-Rの最適解.

確率的丸め法の長所

- 最大カット問題を解く $(1/2)$ -近似解法
- randomized algorithm (乱択解法)
- 上界の使用

確率的丸め法を使うメリット

アルゴリズムの記述が簡単になるから.

→ アルゴリズムの実装が容易

精度保証の議論が簡単になるから.

α -近似解法: (α には 正の数値が入る)

最大化問題

$$1 \geq \frac{\text{得られる解の目的関数値}}{\text{最適値}} \geq \alpha$$

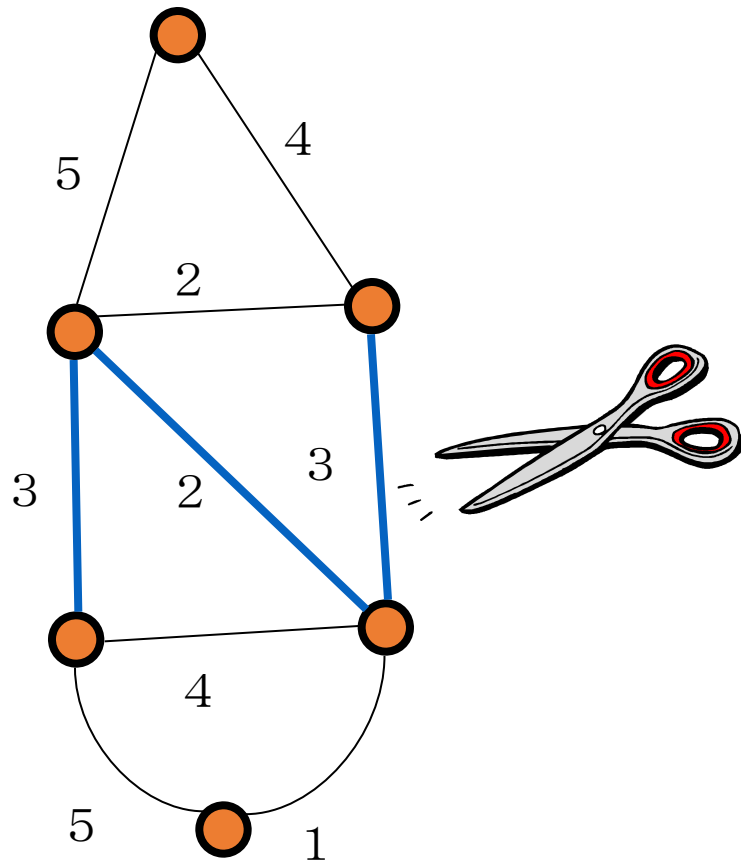
最小化問題

$$1 \leq \frac{\text{得られる解の目的関数値}}{\text{最適値}} \leq \alpha$$

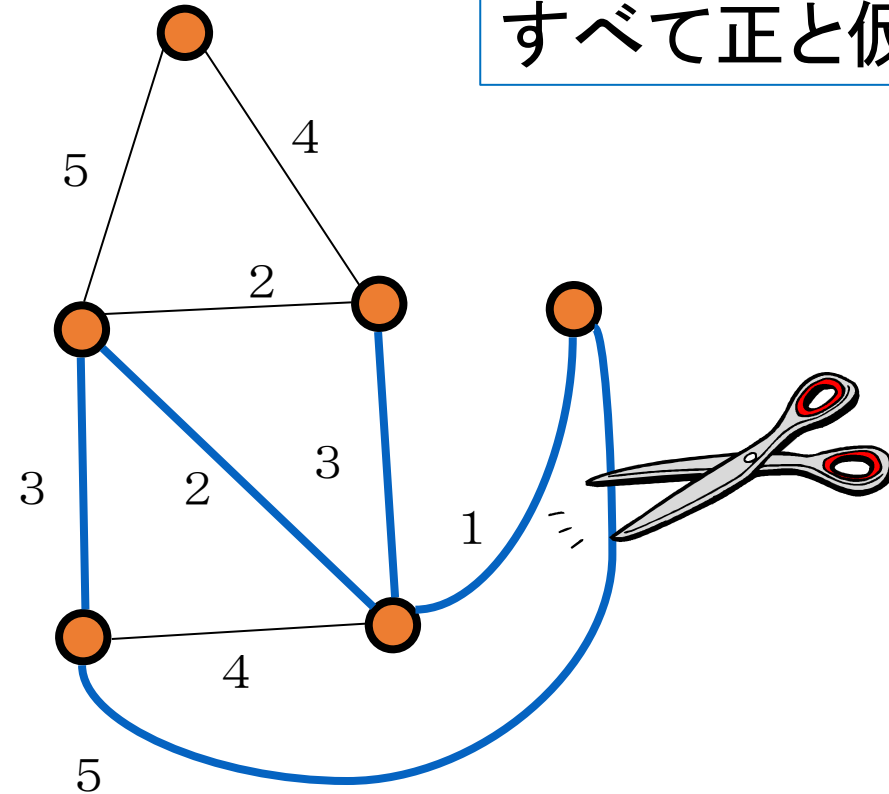
注: 本発表で扱う問題(例)は, 最適値が正の値であると仮定する.

MAX CUT (問題例)

カット重み=8



カット重み=14



枝重み $w(e)$ は
すべて正と仮定

MAX CUT を解く (1/2)-近似解法

(1/2)乱択近似解法: 空集合 U を用意する.

各頂点を (1/2) の確率で U に入れる. U と V/U に分けるカットを出力

各枝において, 両端点のうち丁度一方が U に入る確率は (1/2)

枝 e がカットに入る ($X(e) = 1$), 入らない ($X(e) = 0$) にランダムに丸める

Z : 得られるカットの重み (確率変数)

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\sum_{e \in E} w(e) X(e)\right] = \sum_{e \in E} w(e) \Pr[e \text{ がカットに含まれる}] \\ &= \sum_{e \in E} w(e) (1/2) = (1/2)(\text{枝重みの総和}) \geq (1/2) \text{最大カット重み} \end{aligned}$$

ポイント

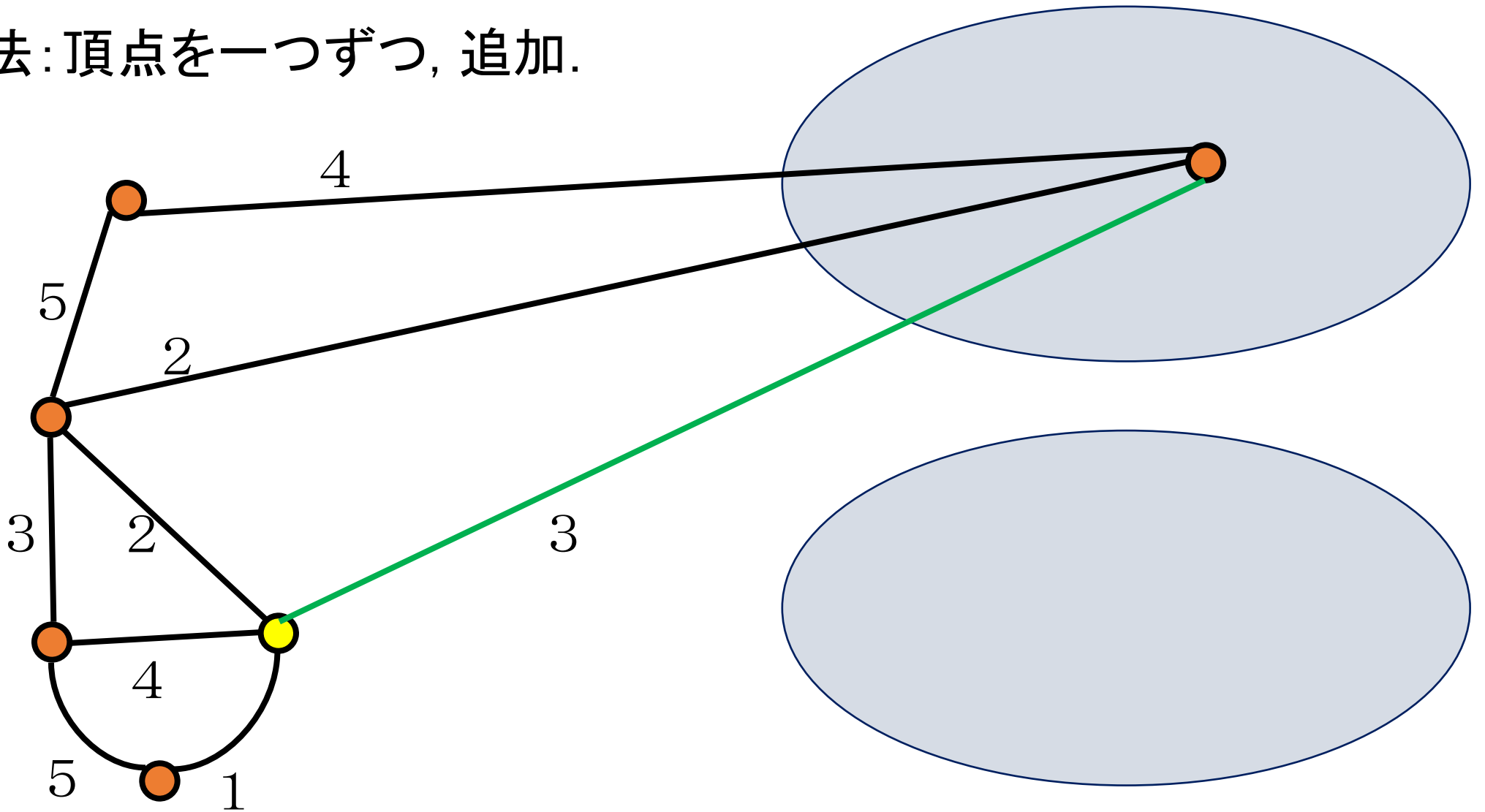
(1) 最適値の代わりに, その上界を用いる.

(2) 解の目的関数の期待値を算定する.

(3) 何度も実行すると, 期待値以上の解が得られる(?).

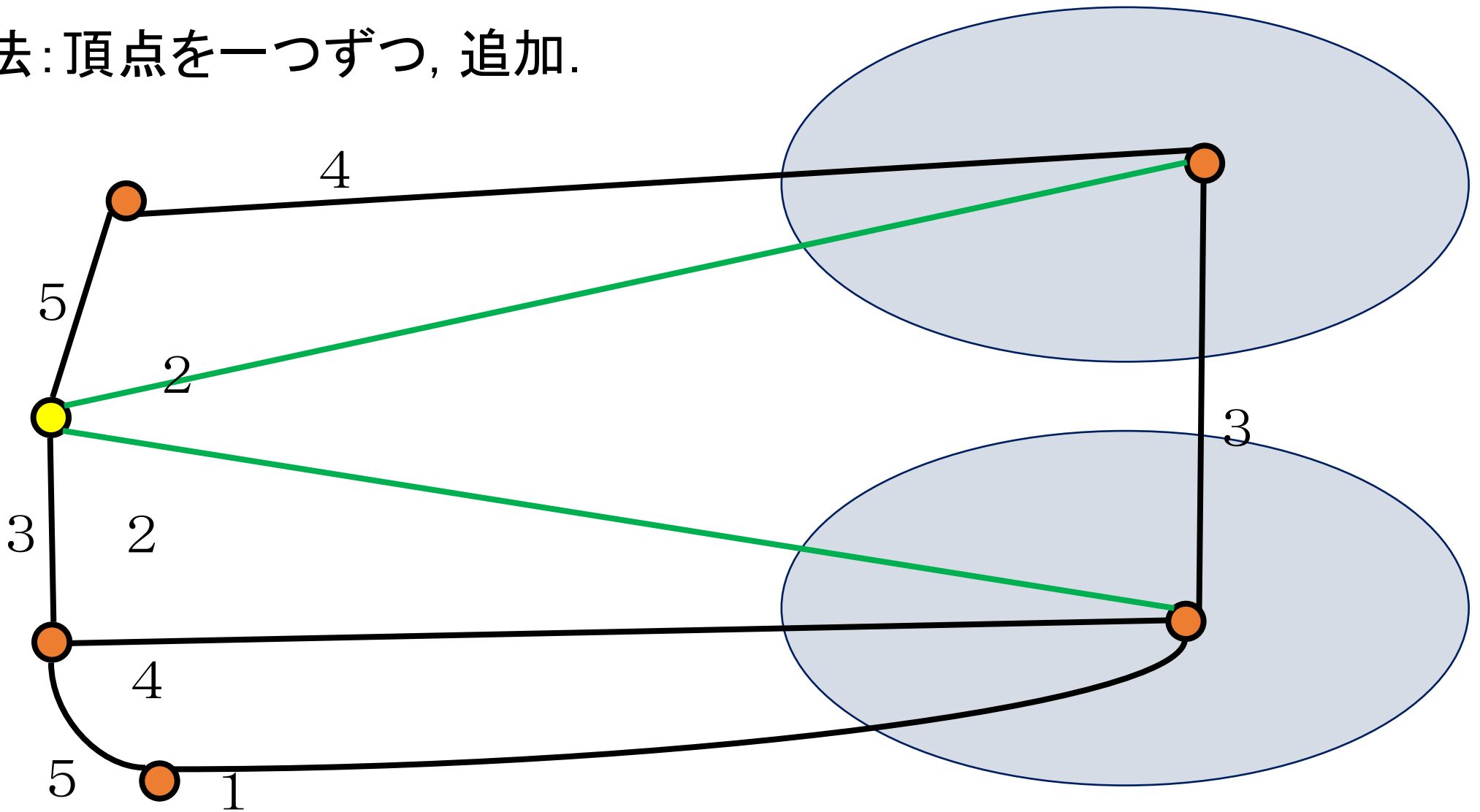
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



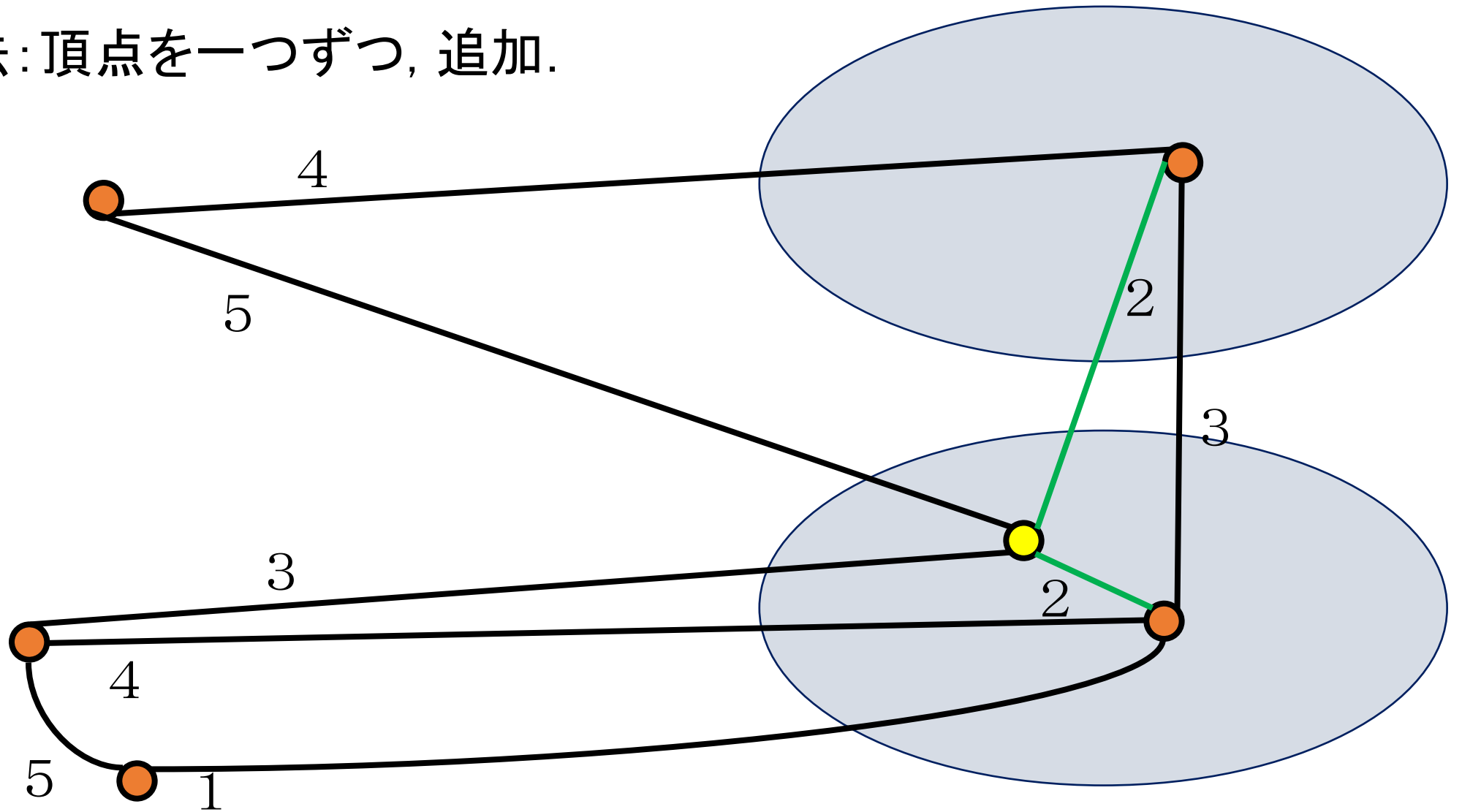
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



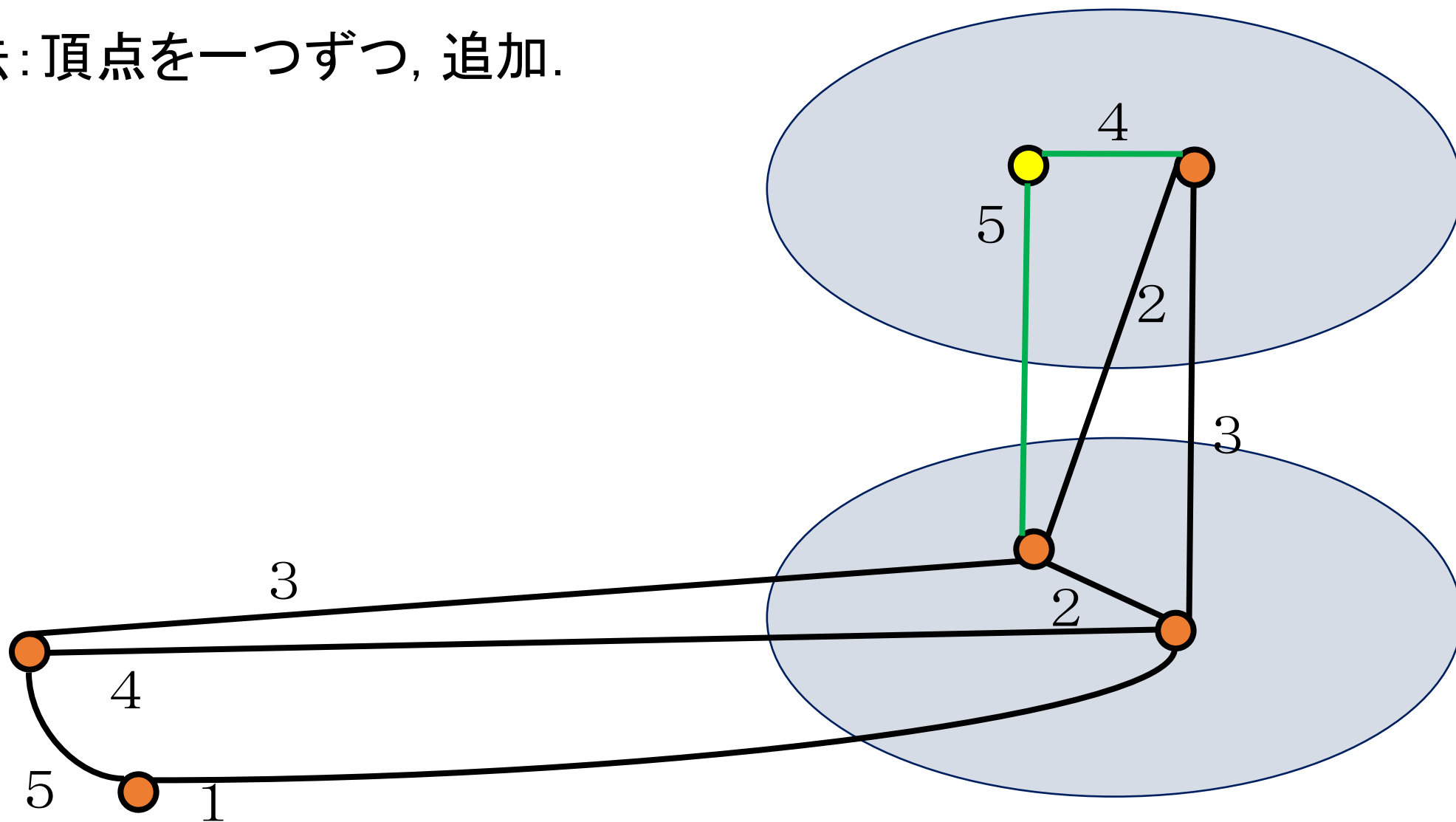
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



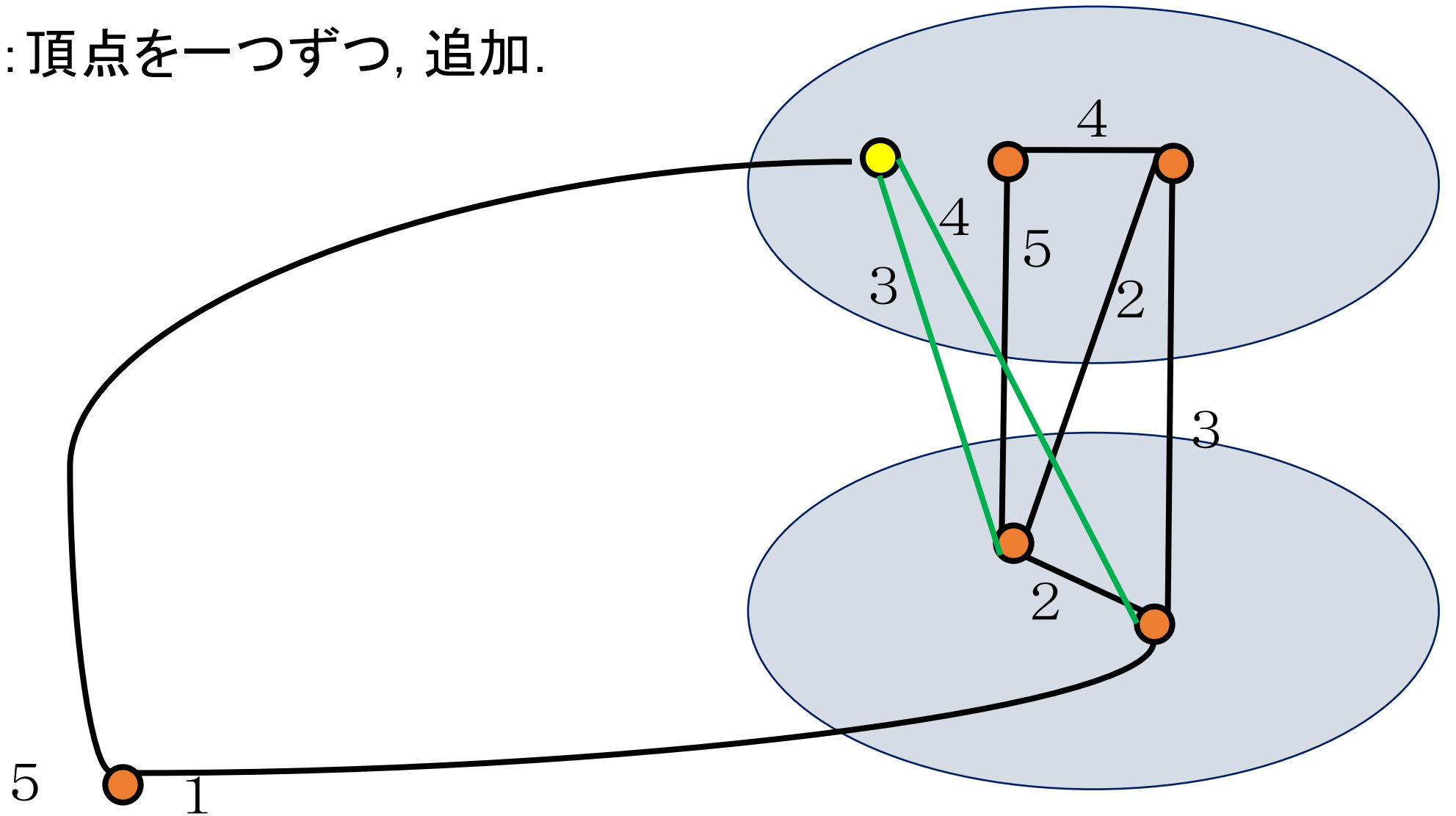
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



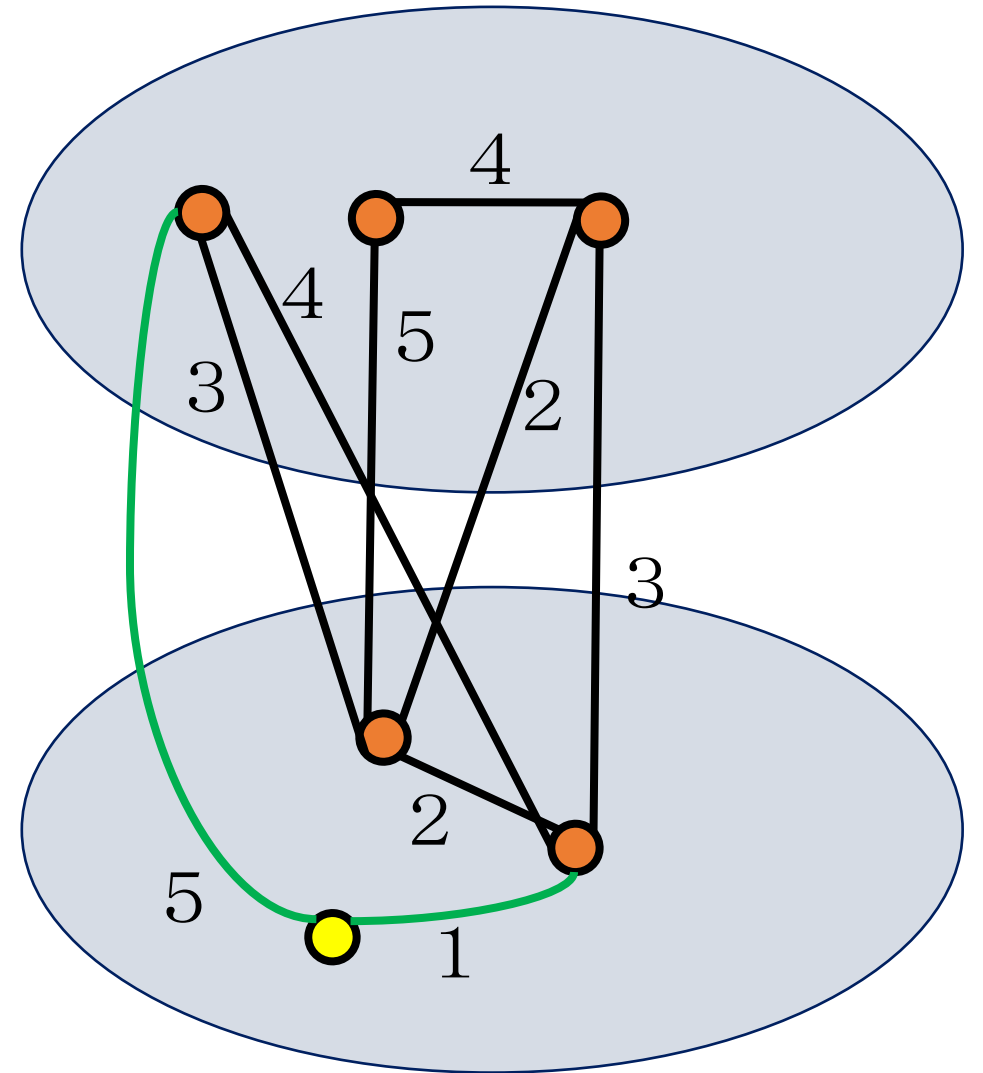
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.



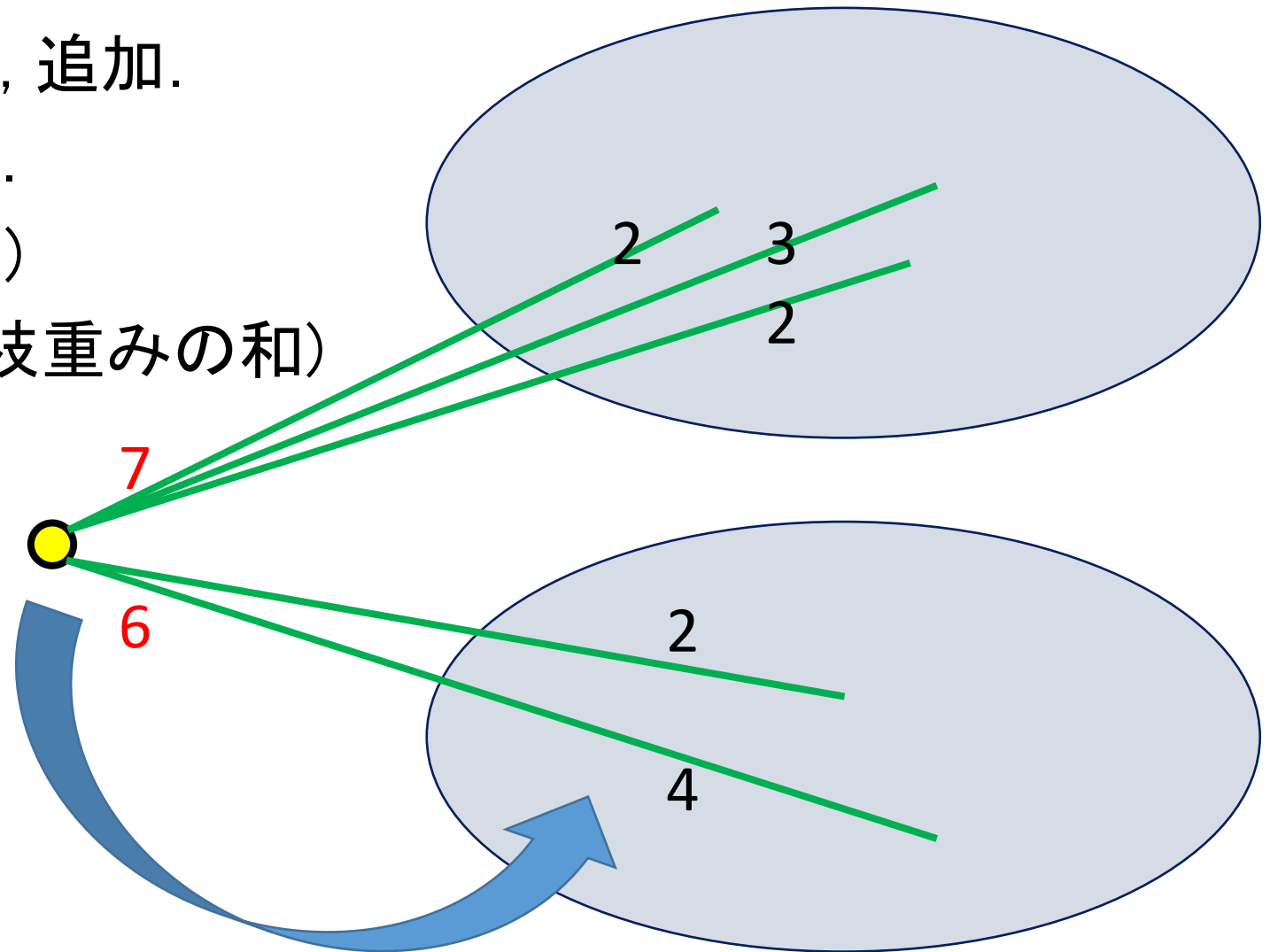
MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.

各反復で, 以下が成り立つ.

(カットに入れる枝重みの和)

$\geq$ (カットに入れない枝重みの和)



MAX CUT の(1/2)-近似解法(貪欲解法版)

貪欲解法: 頂点を一つずつ, 追加.

各反復で, 以下が成り立つ.

(カットに入れる枝重みの和)

$\geq$ (カットに入れない枝重みの和)

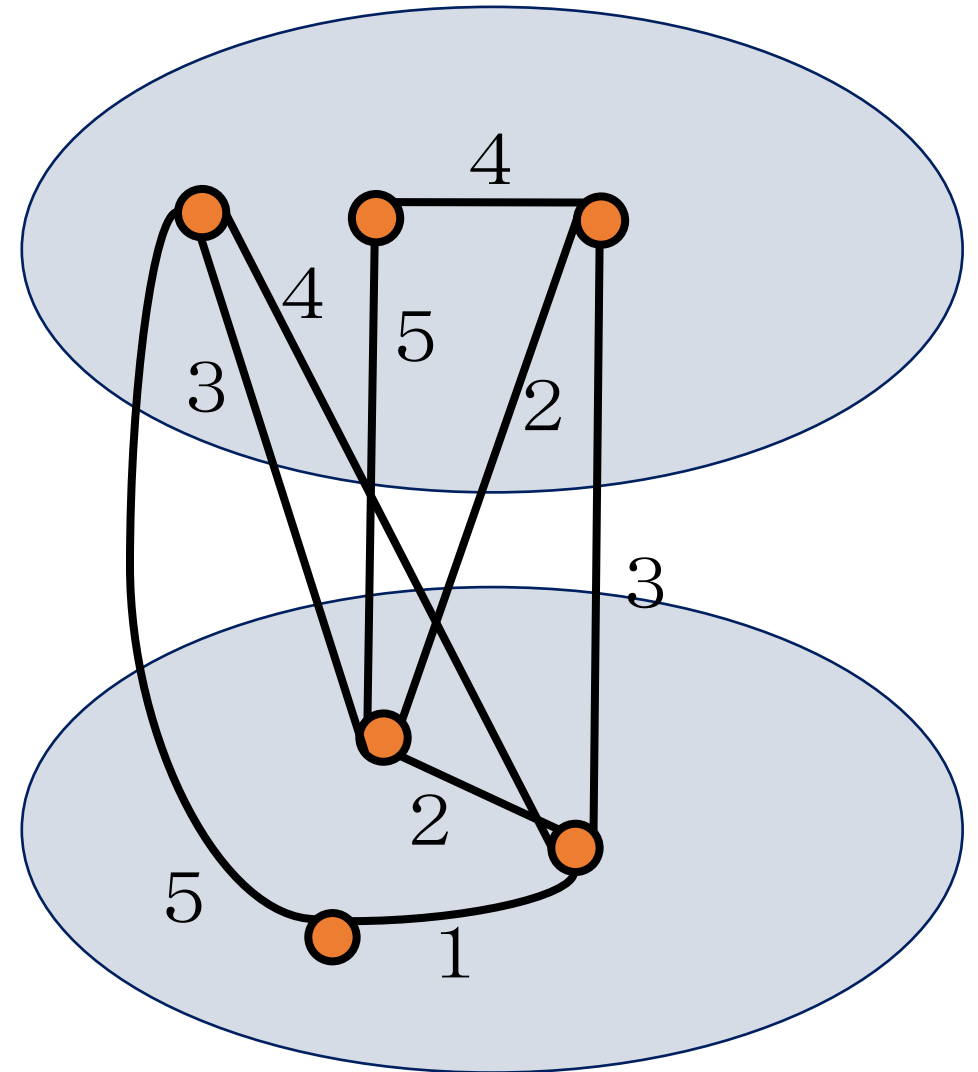
(得られたカットの重み)

$\geq$ (カットに入らなかった枝重み和)

(得られたカットの重み)

$\geq (1/2)(\text{枝重みの総和})$

$\geq (1/2)(\text{最大カット重み})$



確率的丸め法を使うメリット

アルゴリズムの記述が簡単になるから.

(1/2)乱択近似解法: 空集合 U を用意する.

各頂点を(1/2)の確率で U に入れる. U と V/U に分けるカットを出力

→ アルゴリズムの実装が容易

(→ 並列化も容易?)

精度保証の議論が簡単になるから.

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{e \in E} w(e) \Pr[e \text{ がカットに含まれる}] \\ &= \sum_{e \in E} w(e) (1/2) = (1/2)(\text{枝重みの総和}) \geq (1/2) \text{最大カット重み} \end{aligned}$$

ただし, 期待値で議論する.

+ 繰り返し実行して最も良いものを出力

→ もしかすると, とても良い解が偶然得られるかも.

MAX SAT 問題を解く (1/2)-近似解法

- 簡単な解法

SAT (Satisfiability problem: 充足可能性問題)

ブール変数: $U = \{a_1, a_2, a_3\}$

クローズ: $\Gamma = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$

リテラル: 与えられブール変数
あるいはその否定

$C_1 = \{a_2\},$

$C_2 = \{\neg a_1, a_2, \neg a_3\},$

$C_3 = \{\neg a_1, \neg a_2, \neg a_3\},$

$C_4 = \{\neg a_1, \neg a_2, a_3\},$

$C_5 = \{a_1, \neg a_2\},$

$C_6 = \{a_1, a_3\}.$

($\neg a$ は a の否定を意味する.)

クローズが真
 $\Leftrightarrow$ クローズ中のリテラルが
少なくとも 1 つ真

Γ 中のクローズを
全て真とする.
 U への真偽割当は
あるか?

SAT (問題例と真偽割当)

$\{ a1, a2, a3 \}$
T T F

$C1 = \{ a2 \} \rightarrow T$

$C2 = \{ \neg a1, a2, \neg a3 \} \rightarrow T$

$C3 = \{ \neg a1, \neg a2, \neg a3 \} \rightarrow T$

$C4 = \{ \neg a1, \neg a2, a3 \} \rightarrow F$

$C5 = \{ a1, \neg a2 \} \rightarrow T$

$C6 = \{ a1, a3 \} \rightarrow T.$

Γ 中のクローズを全て真とする,
U への真偽割当は存在しない.

SAT(定義)

SAT (Satisfiability problem: 充足可能性問題)

入力: ブール変数集合 U , クローズの集合 Γ .

質問: $\exists?$ U への真偽割当, Γ 中のクローズが全て真となる.

リテラル: 入力されたブール変数, またはその否定

クローズ: リテラルの集合

クローズが真 $\Leftrightarrow$ クローズ中のリテラルの1つ以上が真

k SAT: (各クローズ中のリテラル数) $\leq k$

SAT: NP-完全性が示された最初の問題 [Cook71].

3SAT: NP-完全. 2SAT: 多項式時間算法有り.

MAX SAT (定義)

MAX SAT

入力: ブール変数 U , クローズの集合 Γ .

非負整数のクローズ重み $w: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

問題: Γ 中の真となるクローズ重みの和が
最大となる, U への真偽割当を求めよ.

各クローズ中のリテラルが k 個以下 $\Rightarrow$ MAX k SAT

MAX 2SAT問題もNP-困難

[Garey, Johnson and Stockmeyer 71]

MAX SAT の(1/2)-近似解法 [D.S.Johnson 74]

(1/2)-近似解法：
各ブール変数を1/2の確率で真(1/2の確率で偽)とする。

1/2 1/2 1/2 (重み総和=27)

$$C1 = \{ \quad \quad \quad a2 \quad \quad \quad \} 4 \times (1/2) = 2$$

$$C2 = \{ \neg a1, \quad a2, \neg a3 \} 1 \times (7/8) = 7/8$$

$$C3 = \{ \neg a1, \neg a2, \neg a3 \} 6 \times (7/8) = 21/4$$

$$C4 = \{ \neg a1, \neg a2, \quad a3 \} 4 \times (7/8) = 7/2$$

$$C5 = \{ \quad a1, \neg a2 \quad \quad \quad \} 3 \times (3/4) = 9/4$$

$$C6 = \{ \quad a1, \quad \quad \quad a3 \} 9 \times (3/4) = 27/4$$

真となるクローズ重みの総和の期待値=20.625

MAX SAT の(1/2)-近似解法

(1/2)-近似解法：

各ブール変数を1/2の確率で真(1/2の確率で偽)とする.

解析:リテラルを k 個含むクローズが

真となる確率は $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ となる.

$w(C)$: クローズ C の重み

Z : 真となるクローズの重みの総和を表す確率変数

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{C \in \Gamma} w(C) \Pr[C \text{ 中のリテラルが少なくとも1つ真}] \\ &= \sum_{C \in \Gamma} w(C) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k(C)}\right) \quad k(C): \text{クローズ } C \text{ 中のリテラル数} \\ &\geq \sum_{C \in \Gamma} w(C) \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(\text{クローズの総重み}) \geq \left(\frac{1}{2}\right)(\text{MAX SATの最適値}) \end{aligned}$$

MAX 2SAT 問題を解く (3/4)-近似解法

- 線形緩和問題の最適解を丸める

MAX SAT の整数計画への定式化

ブール変数の集合 $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ リテラルは b を使って表示

クローズの集合 $\Gamma = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$

クローズの非負整数重み $w: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$

0-1変数 $x(a_1), x(a_2), \dots, x(a_n), x(\neg a_1), \dots, x(\neg a_n)$ と $z(C_1), \dots, z(C_m)$

$[x(b) = 1] \Leftrightarrow$ リテラル b が真,

$[z(C) = 1] \Leftrightarrow$ クローズ C が真.

MAX SAT: $\max. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

s. t.
$$\begin{aligned} x(a) + x(\neg a) &= 1 & (\forall a \in U), \\ \sum_{b \in C} x(b) &\geq z(C) & (\forall C \in \Gamma), \\ x(a), x(\neg a) &\in \{0, 1\} & (\forall a \in U), \\ z(C) &\in \{0, 1\} & (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

独立丸め法

MAX SAT-R: $\max. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U), \\ & \sum_{b \in C} x(b) \geq z(C) \quad (\forall C \in \Gamma), \\ & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \quad (\forall a \in U), \\ & 0 \leq z(C) \leq 1 \quad (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

(x^*, z^*) : MAXSAT-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, 目的関数を最大化する z は容易に定まる.

$$z^*(C) = \min\{1, \sum_{b \in C} x^*(b)\} \quad (\forall C \in \Gamma).$$

解法 (IR): 各ブール変数 a を独立に確率 $x^*(a)$ で真とする.

$X(a)$: ブール変数 a が真なら1, 偽ならば0となる確率変数

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & (C \text{ 中のリテラルの1個以上が真}) \\ 0 & (C \text{ 中のリテラルすべてが偽}) \end{cases}$$

独立丸め法(数値例)

$$C1 = \{ \quad \quad \quad a2 \quad \quad \} \textcolor{brown}{4}$$

$$C2 = \{ \neg a1, \quad a2, \neg a3 \} \textcolor{brown}{1}$$

$$C3 = \{ \neg a1, \neg a2, \neg a3 \} \textcolor{brown}{6}$$

$$C4 = \{ \neg a1, \neg a2, \quad a3 \} \textcolor{brown}{4}$$

$$C5 = \{ \quad a1, \neg a2 \quad \quad \} \textcolor{brown}{3}$$

$$C6 = \{ \quad a1, \quad \quad \quad a3 \} \textcolor{brown}{9}$$

線形緩和問題の最適解

$$(x^*(a1), x^*(a2), x^*(a3)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

線形緩和問題の最適値 $z^* = 26$

$$\text{期待値} = 4 \binom{3}{4} + 1 \left(1 - \binom{3}{4} \binom{1}{4} \binom{1}{2}\right) + 6 \left(1 - \binom{3}{4} \binom{3}{4} \binom{1}{2}\right) + \dots = 21.4$$

$$21.4/26=0.823\dots$$

$$\begin{aligned} \max. & 4z(C1) + z(C2) + 6z(C3) + 4z(C3) \\ & + 4z(C4) + 3z(C5) + 9z(C6) \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U),$$

$$x(a2) \geq z(C1),$$

$$x(\neg a1) + x(a2) + x(\neg a3) \geq z(C2),$$

$$x(\neg a1) + x(\neg a2) + x(\neg a3) \geq z(C3),$$

$$x(\neg a1) + x(\neg a2) + x(a3) \geq z(C4),$$

$$x(a1) + x(\neg a2) \geq z(C5),$$

$$x(a1) + x(a3) \geq z(C6),$$

$$0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \quad (\forall a \in U),$$

$$0 \leq z(C) \leq 1 \quad (\forall C \in \Gamma).$$

次頁より, MAX **2**SATに話題を限定

MAX 2SATの場合

$X(a)$: a が真なら1, 偽ならば0となる確率変数

$$E[X(a)] = \Pr[X(a) = 1] = \Pr[aが真] = x^*(a)$$

$$\sum_{b \in C} x(b) \geq z(C)$$

クローズ C にリテラルが1つの場合 $C = \{b\}$

$$E[Z(C)] = \Pr[\text{クローズ } C \text{ は真}] = \Pr[b \text{ は真}] = x^*(b) \geq z^*(C)$$

クローズ C にリテラルが2つの場合 $C = \{b, b'\}$

$$[Z(C) = 1] \Leftrightarrow [b \text{ または } b' \text{ が真}] \Leftrightarrow [X(b) = 1 \text{ または } X(b') = 1]$$

$$[Z(C) = 0] \Leftrightarrow [b \text{ と } b' \text{ が両方偽}] \Leftrightarrow [X(b) = 0 \text{ かつ } X(b') = 0]$$

$$Z(C) = X(b) + X(b') - X(b)X(b')$$

$$E[Z(C)] = E[X(b) + X(b') - X(b)X(b')]$$

$$= E[X(b)] + E[X(b')] - E[X(b)]E[X(b')]$$

$$= x^*(b) + x^*(b') - x^*(b)x^*(b') \geq (3/4)z^*(C)$$

(続く)

MAX 2SAT の場合

クローズ C にリテラルが1つの場合 $C = \{b\}$

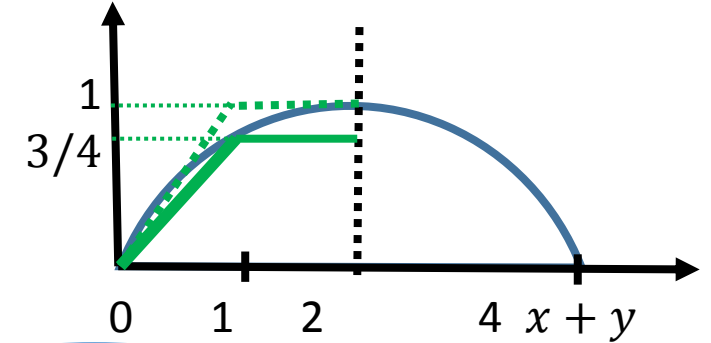
$$E[Z(C)] \geq z^*(C)$$

クローズ C にリテラルが2つの場合 $C = \{b, b'\}$

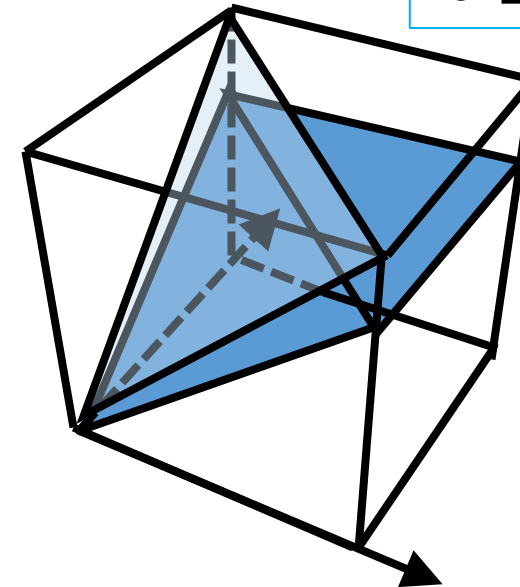
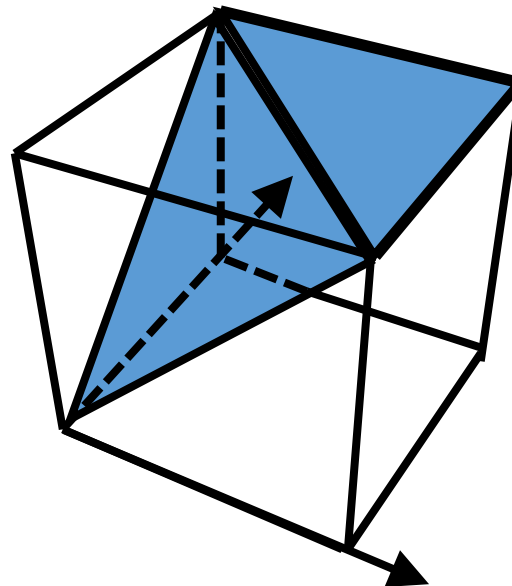
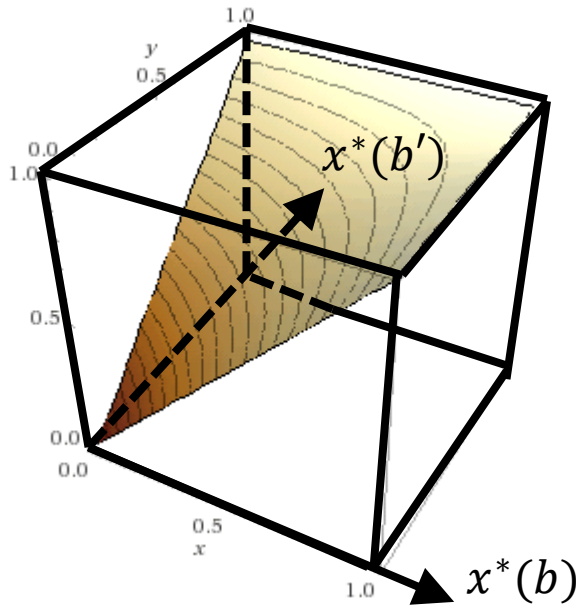
$$E[Z(C)] = x^*(b) + x^*(b') - x^*(b)x^*(b')$$

$$\geq (3/4) \min\{1, x^*(b) + x^*(b')\} \geq (3/4) z^*(C)$$

$$x + y - xy \geq (x + y) - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
$$\geq \left(\frac{3}{4}\right) \min\{1, x + y\} \quad (0 \leq x + y \leq 2)$$



$$\sum_{b \in C} x(b) \geq z(C)$$
$$0 \leq z(C) \leq 1$$



MAX 2SAT の(3/4)-近似解法

クローズ C にリテラルが1つの場合 $C = \{b\}$

$$E[Z(C)] \geq z^*(C) \geq (3/4) z^*(C)$$

クローズ C にリテラルが2つの場合 $C = \{b, b'\}$

$$E[Z(C)] \geq (3/4) z^*(C)$$

得られる解に対応する目的関数値の期待値

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{C \in \Gamma} w(C) Z(C) \right] &= \sum_{C \in \Gamma} w(C) E[Z(C)] \geq \sum_{C \in \Gamma} w(C) (3/4) z^*(C) \\ &\geq (3/4) (\text{MAXSAT-Rの最適値}) \geq (3/4) (\text{MAXSATの最適値}) \end{aligned}$$

MAX 2SAT (まとめ)

簡単のために, 各クローズは丁度2個のリテラルからなると仮定

$$\begin{aligned} \text{MAX 2SAT: } & \max. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b')) \\ \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U), \text{ 連続にしても01最適解} \\ & x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U). \rightarrow 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MAX 2SAT-R: } & \max. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)z(C) \\ \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U) \\ & x(b) + x(b') \geq z(C) \quad (\forall C = \{b, b'\} \in \Gamma), \\ & x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U), \rightarrow 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \\ & z(C) \in \{0,1\} \quad (\forall C \in \Gamma). \rightarrow 0 \leq z(C) \leq 1 \end{aligned}$$

MAX 2SAT

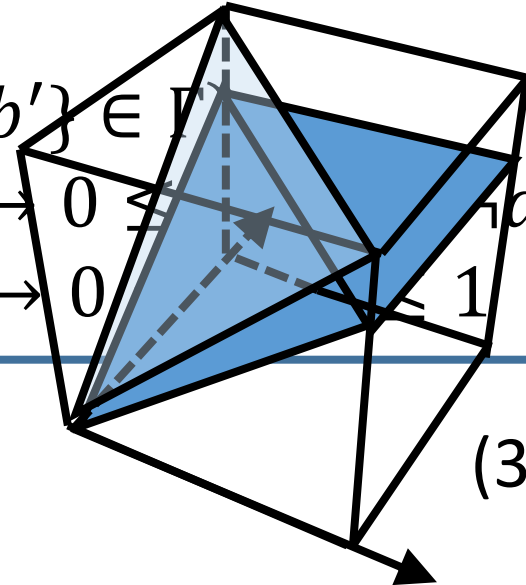
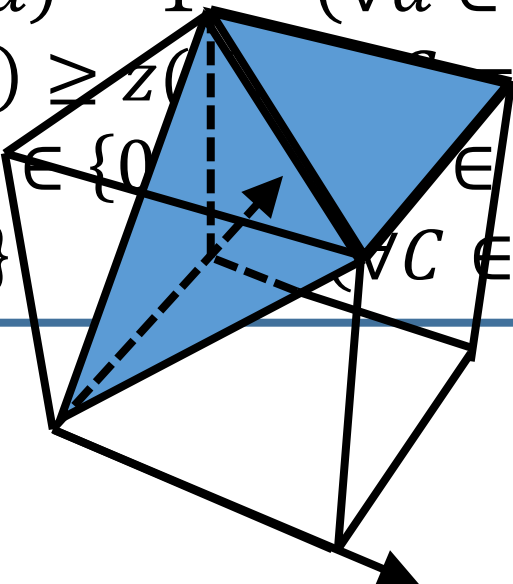
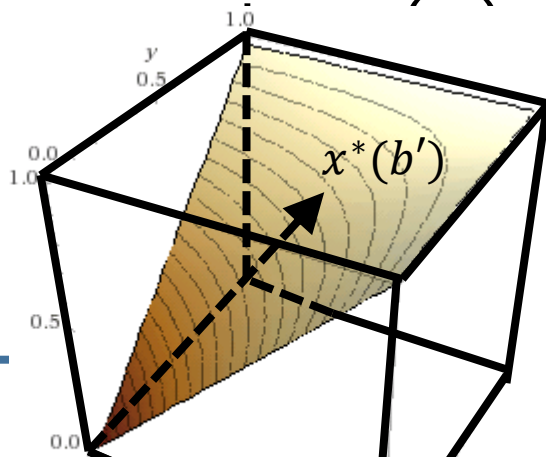
簡単のために、各クローズは丁度2個のリテラルからなると仮定

$$\begin{aligned} \text{MAX 2SAT: } \max. & \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b')) \\ \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U), \\ & x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U). \rightarrow 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{MAX 2SAT-R: } \max. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)z(C)$$

$$x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U)$$

$$\begin{aligned} & x(b') \geq z(C) \quad (\forall \{b,b'\} \in \Gamma) \\ & x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U), \rightarrow 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \\ & z(C) \in \{0,1\} \quad (\forall C \in \Gamma). \rightarrow 0 \leq z(C) \leq 1 \end{aligned}$$



$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)$$

(3/4)は緩和の
作り方から

脱ランダム化(derandomization)

脱ランダム化

Method of Conditional Probabilities

MAX SATを解く(1/2)-近似解法

$$\begin{aligned} C1 &= \{ \quad \quad \quad a2 \quad \quad \quad \} 4 \\ C2 &= \{ \neg a1, \quad a2, \neg a3 \} 1 \\ C3 &= \{ \neg a1, \neg a2, \neg a3 \} 6 \\ C4 &= \{ \neg a1, \neg a2, \quad a3 \} 4 \\ C5 &= \{ \quad a1, \neg a2 \quad \quad \quad \} 3 \\ C6 &= \{ \quad a1, \quad \quad \quad a3 \} 9 \end{aligned}$$

a1, a2, a3が真となる確率

= (1/2, 1/2, 1/2)

期待値=20.625

$$\begin{aligned} &= 4(1-1/2)+1(1-(1/2)^3) \\ &\quad +6(1-(1/2)^3)+4(1-(1/2)^3) \\ &\quad +3(1-(1/2)^2)+9(1-(1/2)^2) \end{aligned}$$

a1 a2 a3が真となる確率(x, 1/2, 1/2)

期待値 = $4(1-1/2)+1(1-(1/2)^2)x$

$+6(1-(1/2)^2)x+4(1-(1/2)^2)x$

$+3(1-(1/2)(1-x))+9(1-(1/2)(1-x))$

$=19+3.25x$

x=1とすれば、22.25 となる.

a1 a2 a3が真となる確率(1, y, 1/2)

期待値 = $4y+1(1-(1/2)y)$

$+6(1-(1/2)(1-y))$

$+4(1-(1/2)(1-y))+3+9$

$=22.5-0.5y$

y=0とすれば、22.5 となる.

a1 a2 a3が真となる確率(1, 0, z)

期待値 = $23-z$

z=0 とすれば、23 となる.

MAX SAT問題を解く $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ -近似解法

[Goemans and Williamson 94]

- 線形緩和問題を用いる.
- 確率的丸め法(randomized rounding)
- 問題例によって確率を変える
ランダム化算法.

MAX SAT の $(1 - \frac{1}{e})$ -近似解法

MAXSAT-R: $\max. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 && (\forall a \in U), \\ & \sum_{b \in C} x(b) \geq z(C) && (\forall C \in \Gamma), \\ & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 && (\forall a \in U), \\ & 0 \leq z(C) \leq 1 && (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

(x^*, z^*) : MAXSAT-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, 目的関数を最大化する z は容易に定まる.

$$z^*(C) = \min\{1, \sum_{b \in C} x^*(b)\} \quad (\forall C \in \Gamma).$$

解法 (IR): 各ブール変数 a を独立に確率 $x^*(a)$ で真とする.

$X(a)$: ブール変数 a が真なら1, 偽ならば0となる確率変数

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & (C \text{ 中のリテラルの1個以上が真}), \\ 0 & (C \text{ 中のリテラルすべてが偽}). \end{cases}$$

近似比率の算定

解法 (IR): 各ブール変数 a を独立に確率 $x^*(a)$ で真とする.

$X(a)$: ブール変数 a が真なら1, 偽ならば0となる確率変数

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & (C \text{ 中のリテラルの1個以上が真}) \\ 0 & (C \text{ 中のリテラルすべてが偽}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[Z(C)] &= \Pr[Z(C) = 1] = \Pr[C \text{ 中のリテラルの1つ以上が真}] \\ &= 1 - \prod_{b \in C} x^*(\neg b) = 1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)) \end{aligned}$$

補題: $|C| = k$ ならば

$$1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(C)$$

補題の証明

補題: $|C| = k$ ならば

$$1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(C)$$

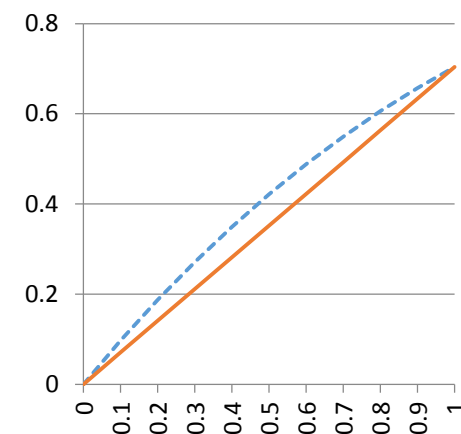
証明: 相加平均 $\geq$ 相乗平均 より,

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)) &\geq 1 - \left(\sum_{b \in C} \frac{1 - x^*(b)}{k}\right)^k \\ &= 1 - \left(1 - \sum_{b \in C} \frac{x^*(b)}{k}\right)^k \geq 1 - \left(1 - \frac{z^*(C)}{k}\right)^k \\ &\geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(C) \end{aligned}$$

$$\sum_{b \in C} x^*(b) \geq z^*(C)$$

$$\begin{aligned} &1 - \left(1 - \frac{y}{3}\right)^3 \\ &\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3\right)y \end{aligned}$$

$k=3$ の例



近似比率

Γ_k : リテラルを k 個含むクローズの集合

$$\text{期待値} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C \in \Gamma_k} w(C) (1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)))$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C \in \Gamma_k} w(C) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(C)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C \in \Gamma_k} w(C) \left(1 - \frac{1}{e}\right) z^*(C)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C \in \Gamma_k} w(C) z^*(C)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{緩和問題の最適値}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{MAX SAT の最適値}$$

k	$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)$
1	1
2	3/4= 0.75
3	19/27=0.703...
∞	$1 - \frac{1}{e} = 0.632 \dots$

MAX SAT問題を解く (3/4)-近似解法

[Goemans and Williamson 94]

- $1/2$ 近似解法 と $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ -近似解法を
組み合わせる.

$(1/2)$ -近似解法と $(1 - \frac{1}{e})$ -近似解法

リテラルを k 個含むクローズならば

$(1/2)$ -近似解法 : 真となる確率 $= 1 - (\frac{1}{2})^k$

$(1 - \frac{1}{e})$ -近似解法: 真となる確率 $\geq (1 - (1 - 1/k)^k)$

k	$1 - (1/2)^k$	$(1 - (1 - 1/k)^k)$	平均
1	$1/2 = 0.5$	1	0.75
2	$3/4 = 0.75$	$3/4 = 0.75$	0.75
3	$7/8 = 0.875$	$19/27 = 0.703\dots$	0.789...
4	$15/16 = 0.9375$	$175/256 = 0.684\dots$	0.828...
∞	1	$1 - \frac{1}{e} = 0.632\dots$	0.816...

MAX SATを解く(3/4)-近似解法

解法: $(1/2)$ -近似解法と $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ -近似解法のどちらかを, 確率 $(1/2)$ で選んで実行する.

任意の正整数 k に対し,

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left[\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \right] \geq \frac{3}{4}$$

が成り立つ.

期待値 $\geq$ (MAX SATの最適値) $(3/4)$

$\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ -近似解法を使ってみたい！

MAX SAT の $(1 - \frac{1}{e})$ -近似解法

MAXSAT-R: $\max. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & x(a) + x(\neg a) = 1 && (\forall a \in U), \\ & \sum_{b \in C} x(b) \geq z(C) && (\forall C \in \Gamma), \\ & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 && (\forall a \in U), \\ & 0 \leq z(C) \leq 1 && (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

こっこの等式は
近似比率に関係ない

近似比率に大事
なのはこっち

補題: $|C| = k$ ならば

$$1 - \prod_{b \in C} (1 - x^*(b)) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(C)$$

$(1 - \frac{1}{e})$ -近似解法

変数を増やしても大丈夫！

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & + x_{12} & + x_{13} & + x_{14} & + x_{15} & = 1 \\ x_{21} & + x_{22} & + x_{23} & + x_{24} & + x_{25} & = 1 \\ x_{31} & + x_{32} & + x_{33} & + x_{34} & + x_{35} & = 1 \\ x_{41} & + x_{42} & + x_{43} & + x_{44} & + x_{45} & = 1 \end{array}$$

重み 12 $z(C_1) = x_{11}, x_{21}, x_{32}, x_{43}$ のうち1つでも1ならば1

重み 8 $z(C_2) = x_{33}, x_{43}, x_{24}, x_{34}, x_{44}, x_{15}, x_{25}$ のうち1つでも1ならば1

....

これだけでは論文にならないー.....

木の上の消防士問題

Fire Fighter problem [Hartnell 1995]

approximation algorithm [Cai, Verbin, Yang 2008]

- 独立丸め法
- $(1 - 1/e)$ -近似解法

木の上の消防士問題

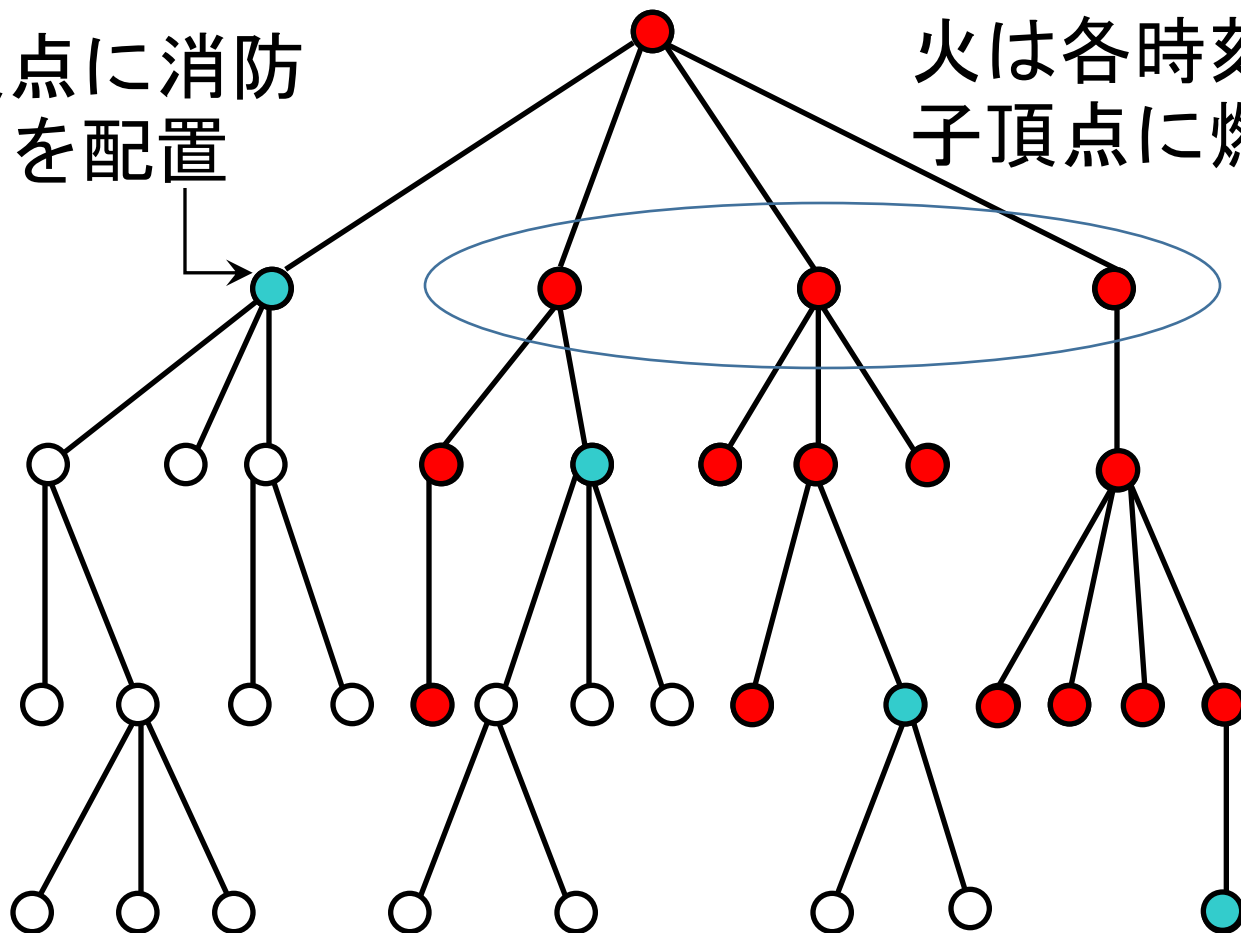
時刻0に, 木の根が発火

頂点に消防士を配置

火は各時刻に消防士のいない子頂点に燃え広がる

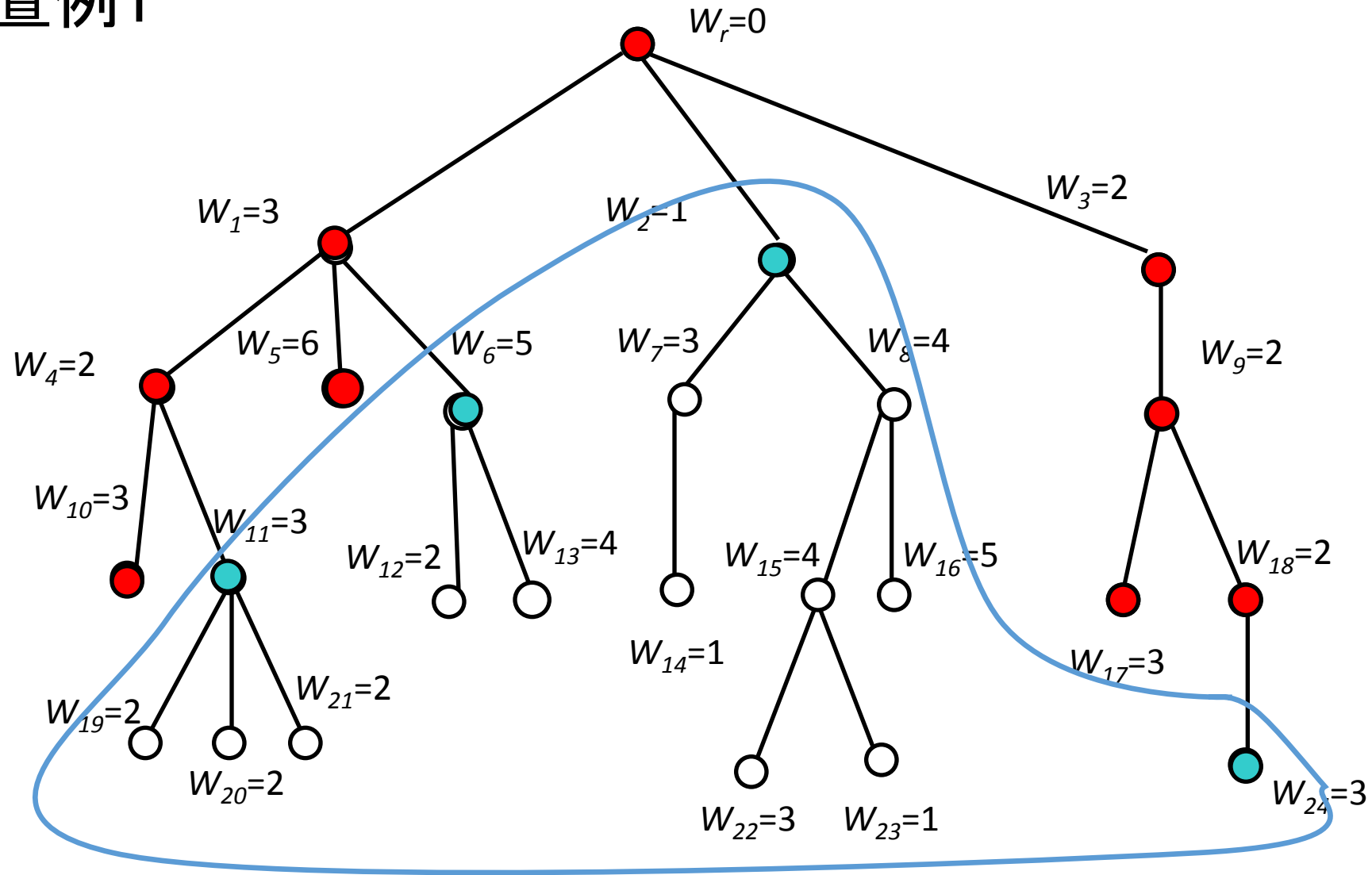
各レベルで配置できる消防士は1名

この手順が繰り返される



これ以上燃え広がらなくなったら終了
目的は, 燃えなかった頂点重み最大化

配置例1



燃えなかった頂点重みの総和= 45

整数計画問題

V : 与えられた木の頂点集合

$r \in V$: 木の根

$w: V \rightarrow \mathbb{Z}_+$: 頂点の非負整数重み

$\nabla(i)$: 深さ i の頂点の集合

$A(v)$: 頂点 v の先祖 (自身を含む)

$$x(v) = \begin{cases} 1 & \text{(頂点 } v \text{ に消防士を配置),} \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$

$$z(v) = \begin{cases} 1 & \text{(頂点 } v \text{ は燃えない),} \\ 0 & \text{(頂点 } v \text{ は燃える).} \end{cases}$$

FF: max. $\sum_{v \in V} w(v)z(v)$

s. t. $x(r) = 1,$

$$\sum_{v \in \nabla(i)} x(v) = 1 \quad (\forall i),$$

$$\sum_{u \in A(v)} x(u) \geq z(v) \quad (\forall v \in V),$$

$$x(v), z(v) \in \{0, 1\} \quad (\forall v \in V).$$

独立丸め法

$$\begin{aligned} \text{FF-R: } \max. & \sum_{v \in V} w(v)z(v) \\ \text{s. t. } & x(r) = 1, \\ & \sum_{v \in \nabla(i)} x(v) = 1 \quad (\forall i), \\ & \sum_{u \in A(v)} x(v) \geq z(v) \quad (\forall v \in V), \\ & 0 \leq x(v), z(v) \leq 1 \quad (\forall v \in V). \end{aligned}$$

(x^*, z^*) : FF-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, 目的関数を最大化する z は容易に定まる.

$$z^*(v) = \min\{1, \sum_{u \in A(v)} x^*(u)\} \quad (\forall v \in V).$$

解法 (IR): 各レベル $\nabla(i)$ で独立に, 確率 $x^*(v)$ で頂点を1つ選び1とする.

$X(v)$: IRで得られる確率変数

$$Z(v) = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ は燃えなかった}), \\ 0 & (\text{頂点 } v \text{ は燃えた}). \end{cases}$$

近似比率の算定

解法 (IR): 各レベル $\nabla(i)$ で独立に, 確率 $x^*(v)$ で頂点を1つ選び1とする.

$X(v)$: IRで得られる確率変数

$$Z(v) = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ は燃えなかった}), \\ 0 & (\text{頂点 } v \text{ は燃えた}). \end{cases}$$

$$E[Z(v)] = \Pr[Z(v) = 1] = \Pr[v \text{ に消防士が配置された先祖がいる}]$$

$$= 1 - \Pr[v \text{ の先祖は, 誰も消防士が配置されなかった}]$$

$$= 1 - \prod_{u \in A(v)} (1 - x^*(u))$$

補題: $|A(v)| = k$ ならば

$$1 - \prod_{u \in A(v)} (1 - x^*(u)) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z^*(v)$$

近似比率

V_k : 先祖を k 個持つ頂点の集合

$$\begin{aligned} \text{期待値} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V_k} w(v) (1 - \prod_{u \in A(v)} (1 - x^*(u))) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V_k} w(v) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} \right)^k \right) z^*(v) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V_k} w(v) \left(1 - \frac{1}{e} \right) z^*(v) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V_k} w(v) z^*(v) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{緩和問題FF-Rの最適値} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{FFの最適値} \end{aligned}$$

凸2次緩和

0-1確率変数の性質のおさらい

性質 X_i : 確率 x_i で1に, 確率 $1 - x_i$ で0となる確率変数

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ は以下を満たす.

(a) $E[X_i] = \Pr[X_i = 1] = x_i$

(b) $E[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i] = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

(c) X_i と X_j が独立ならば $E[X_i X_j] = E[X_i] E[X_j] = x_i x_j$

(d) $E[X_i X_i] = E[X_i] = \Pr[X_i = 1] = x_i$

(b)の性質は, 確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が従属でも成り立つ.

(c)の性質は, 独立性から得られる!

(d)の性質は, $X_i \in \{0, 1\}$ より, $0^2 = 0, 1^2 = 1$ から得られる.

この性質から我々が学ぶべき教訓は(1/2)

二次0-1計画の対角項は, 実は線形関数.

(1) 線形項→対角項

$x \in \{0,1\}^n$ ならば, $0^2 = 0, 1^2 = 1$ より, $d_i x_i = d_i (x_i)^2$

$$x^T Q x + d^T x = x^T (Q + D(d)) x$$

ただし, Q : 任意の正方行列,

$D(d)$: d を対角成分に持つ対角行列.

(2) 対角項→線形項 $q_{ii}(x_i)^2 = q_{ii}x_i$

q : Q の対角成分を要素に持つベクトル

$D(q)$: q を対角成分に持つ対角行列

$x \in \{0,1\}^n$ ならば,

$$x^T Q x + d^T x = x^T (Q - D(q)) x + (q + d)^T x$$

0-1二次計画

Q : 任意の正方行列

01QP: min./max. $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$

$D(\mathbf{d})$: $\mathbf{d}$ を対角成分に持つ対角行列

$\mathbf{q}$: Q の対角成分を要素に持つベクトル

$D(\mathbf{q})$: $\mathbf{q}$ を対角成分に持つ対角行列

下記の問題たちは, 上記の01QPと本質的に等価

? : min./max. $\mathbf{x}^T (Q + D(\mathbf{d})) \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$

? : min./max. $\mathbf{x}^T (Q - D(\mathbf{q})) \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$

対角項を線形化して, 連続緩和しても, 意味はない?

この性質から我々が学ぶべき教訓は(2/2)

二次0-1計画の非対角項と線形項は, IRと相性が良い.

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{(i,j):i\neq j} q_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^n d_iX_i\right] \\ &= \sum_{(i,j):i\neq j} q_{ij}E[X_i]E[X_j] + \sum_{i=1}^n d_iE[X_i] \\ &= \sum_{(i,j):i\neq j} q_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n d_i x_i = z^* \end{aligned}$$

非対角項と線形項については, 得られる解での期待値と, 丸める前での目的関数値が『一致』する.

凸2次緩和

Q : 任意の正方行列

$D(d)$: d を対角成分に持つ対角行列

$D(q)$: q を対角成分に持つ対角行列

q : Q の対角成分を要素に持つベクトル

01QP: $\min. \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$

$$\begin{aligned} \min. \quad & \mathbf{x}^T (Q + D(d)) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (Q - D(q)) \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

もし, Q が非負行列 かつ $b \geq 0$ かつ $Q + D(d)$ が半正定値ならば,

SOCP: $\min. z$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & z \geq \mathbf{x}^T (Q + D(d)) \mathbf{x}, \\ & z \geq (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x}, \\ & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

SOCPの最適値 $\leq$ 01QPの最適値

上記は凸計画(2次錐計画)となり, 多項式時間で解くことができる

0-1二次計画

もし, Q が非負行列 かつ $b \geq 0$ かつ $Q + D(d)$ が半正定値ならば,

01QP: **min.** $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x}$ subject to $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$

SOCP: min. z

s. t. $z \geq \mathbf{x}^T (Q + D(d)) \mathbf{x},$

$z \geq (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x},$

$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}.$

$D(d)$: $\mathbf{d}$ を対角成分に持つ対角行列

$D(\mathbf{q})$: $\mathbf{q}$ を対角成分に持つ対角行列

$\mathbf{q}$: Q の対角成分を要素に持つベクトル

SOCPの最適解 $\mathbf{x}$ にIRを適用すると, 得られる解の目的関数値 Z は

$$E[Z] = E\left[\sum_{(i,j): i \neq j} q_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n (q_{ii} X_i X_i + d_i X_i)\right]$$

$$= \sum_{(i,j): i \neq j} q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + d_i) x_i$$

$$= \mathbf{x}^T (Q - D(\mathbf{q})) \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T (Q + D(d)) \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{d})^T \mathbf{x}$$

$$\leq z^* + z^* \leq 2 \text{ (SOCPの最適値)} \leq 2 \text{ (01QPの最適値)} \text{ 2-近似解法 !}$$

多機械スケジューリング問題 重み付き完了時刻和最小化

(3/2)-近似解法 [Skutella 1998]

- 凸2次緩和
- 独立(?)丸め法

1機械スケジューリング問題

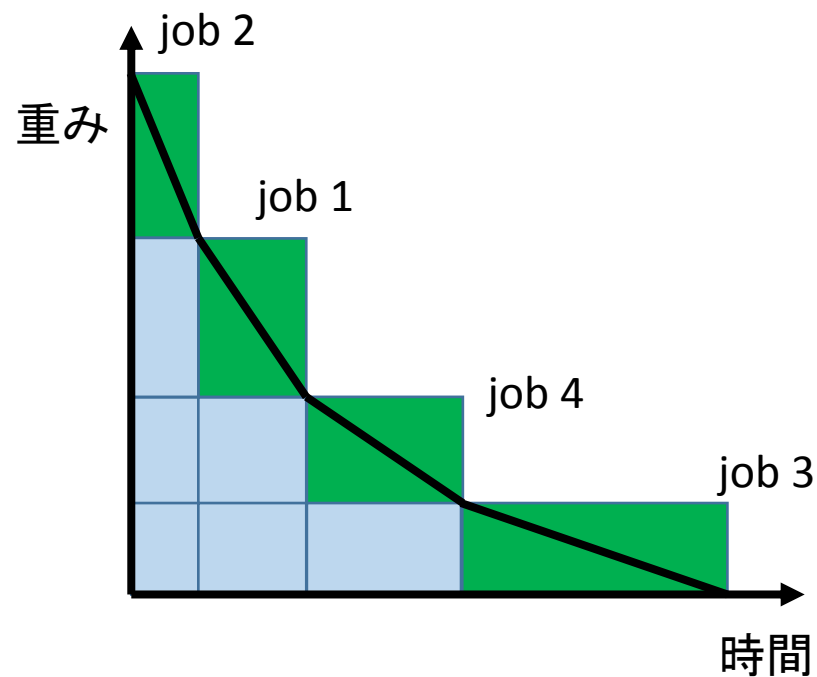
J : 仕事の集合,

$w: J \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事の正整数重み

$d: J \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事の処理時間(正整数)

1台のマシンで

すべての仕事を順に処理する.



仕事の全順序の中で,

(仕事重み $\times$ 仕事処理完了時刻)の総和 $\rightarrow$ 最小化

Smithの規則: (重み $\div$ 処理時間)の大きい順に処理すると最適

1機械スケジューリング問題

J : 仕事の集合,

$w: J \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事の正整数重み

$d: J \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事の処理時間(正整数)

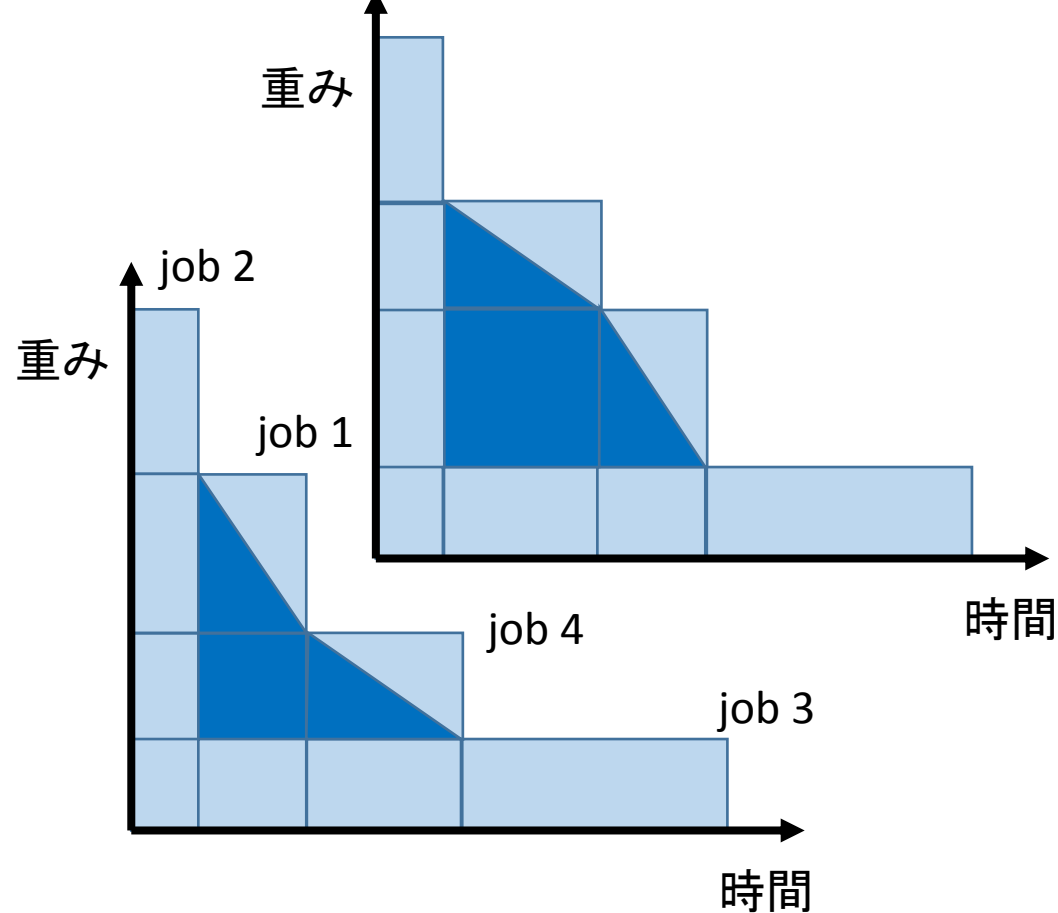
1台のマシンで

すべての仕事を順に処理する.

仕事の全順序の中で,

(仕事重み $\times$ 仕事処理完了時刻)の総和 $\rightarrow$ 最小化

Smithの規則: (重み / 処理時間)の大きい順に処理すると最適



多機械スケジューリング問題

J : 仕事の集合, M : 機械の集合

$w: J \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事の正整数重み

$d: (J \times M) \rightarrow \mathbb{Z}_{++}$ 仕事 j を機械 m で処理した際の時間 $d(j, m) > 0$

各仕事は, どれか1台の機械で処理する.

各機械は, 処理する仕事に順番をつけて処理.

(仕事重み $\times$ 仕事処理完了時刻) の総和 $\rightarrow$ 最小化

仕事の機械への割当が決定できれば,

Smithの規則: (重み / 処理時間) の大きい順に処理すると最適

整数計画に定式化

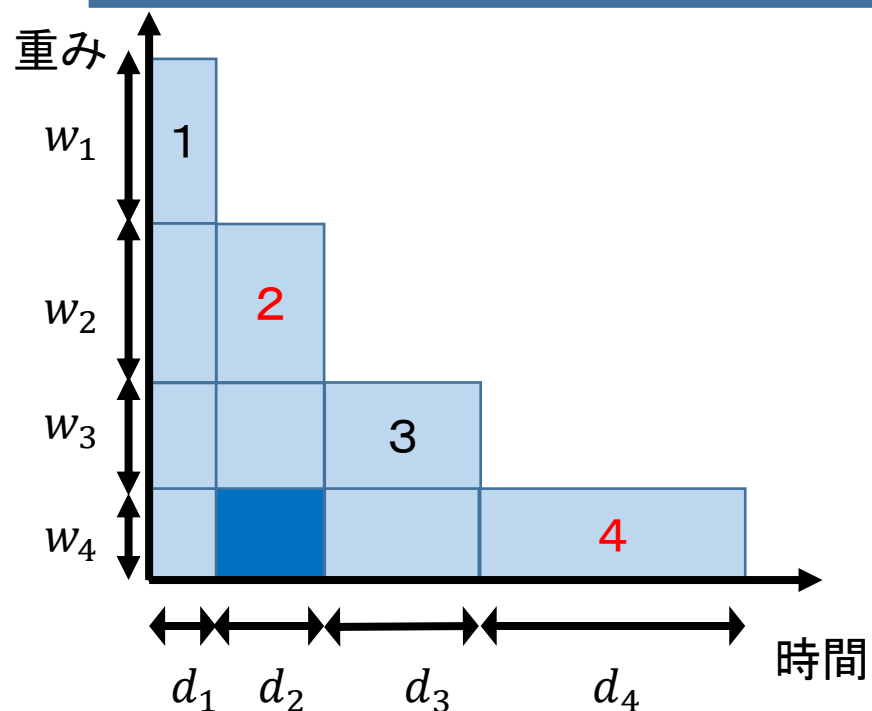
$x(*, m)$ はベクトル x から
機械 m に対応する要素
のみを取り出したベクトル

$x(j, m) = 1$: 仕事 j を機械 m で処理する

$$\text{SP: min. } \sum_{m \in M} x(*, m)^T P_m x(*, m)$$

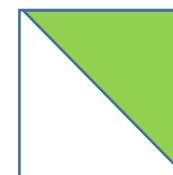
$$\text{s. t. } \sum_{m \in M} x(j, m) = 1 \quad (\forall j \in J),$$

$$x(j, m) \in \{0, 1\} \quad (\forall (j, m) \in J \times M).$$



機械 m に関する処理時間を使って,
Smithの規則で仕事に番号を付ける.
仕事 i と仕事 j を機械 m で処理したとき
 $i \leq j$ ならば $w_j d_i$ が目的関数に加わる.

$$P_m(i, j) = \begin{cases} w_j d_i & (i \leq j), \\ 0 & (i > j). \end{cases}$$



目的関数の変形

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x} \text{ より,}$$

$$f_m(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x}$$

$$\forall \mathbf{x} \geq 0, f_m(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right) 2 \mathbf{q}_m^T \mathbf{x} = \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}$$

$$P_m + P_m^T = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{2}w_1d_1 & w_2d_1 & w_3d_1 & \cdots & w_nd_1 \\ w_2d_1 & \textcolor{red}{2}w_2d_2 & w_3d_2 & \cdots & w_nd_2 \\ w_3d_1 & w_3d_2 & \textcolor{red}{2}w_3d_3 & \cdots & w_nd_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_nd_1 & w_nd_2 & w_nd_3 & \cdots & \textcolor{red}{2}w_nd_n \end{pmatrix}$$

w1	w2	w3	w4
w2	w2	w3	w4
w3	w3	w3	w4
w4	w4	w4	w4

d1	d1	d1	d1
d1	d2	d2	d2
d1	d2	d3	d3
d1	d2	d3	d4

$$\mathbf{q}_m = (w_1d_1, w_2d_2, \dots, w_nd_n)^T$$

目的関数の変形

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x} \text{ より,}$$

$$f_m(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x}$$

$$\forall \mathbf{x} \geq 0, f_m(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right) 2 \mathbf{q}_m^T \mathbf{x} = \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}$$

$$P_m + P_m^T = \begin{pmatrix} 2w_1d_1 & w_2d_1 & w_3d_1 & \cdots & w_nd_1 \\ w_2d_1 & 2w_2d_2 & w_3d_2 & \cdots & w_nd_2 \\ w_3d_1 & w_3d_2 & 2w_3d_3 & \cdots & w_nd_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_nd_1 & w_nd_2 & w_nd_3 & \cdots & 2w_nd_n \end{pmatrix}$$

$$Q_m = \begin{pmatrix} w_1d_1 & w_2d_1 & w_3d_1 & \cdots & w_nd_1 \\ w_2d_1 & w_2d_2 & w_3d_2 & \cdots & w_nd_2 \\ w_3d_1 & w_3d_2 & w_3d_3 & \cdots & w_nd_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_nd_1 & w_nd_2 & w_nd_3 & \cdots & w_nd_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_m = (w_1d_1 \dots, w_nd_n)^T$$

目的関数の変形

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x} \text{ より,}$$

$$f_m(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{x}^T P_m \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_m^T \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x}$$

$$\forall \mathbf{x} \geq 0, f_m(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{x}^T (P_m + P_m^T) \mathbf{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right) 2 \mathbf{q}_m^T \mathbf{x} = \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \{0,1\}^n, f_m(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{x}^T Q_m \mathbf{x} + \mathbf{q}_m^T \mathbf{x})$$

補題: $\frac{w_1}{d_1} \geq \frac{w_2}{d_2} \geq \dots \geq \frac{w_n}{d_n}$ ならば, 行列 Q_m は半正定値.

SP: min. z

$$\text{s.t. } z \geq \sum_{m \in M} \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}(*, m)$$

$$z \geq \sum_{m \in M} \left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{x}(*, m)^T Q_m \mathbf{x}(*, m) + \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}(*, m))$$

$$\sum_{m \in M} x(j, m) = 1 \quad (\forall j \in J),$$

$$x(j, m) \in \{0,1\} \quad (\forall (j, m) \in J \times M).$$

目的関数の変形

補題: $\frac{w_1}{d_1} \geq \frac{w_2}{d_2} \geq \dots \geq \frac{w_n}{d_n}$ ならば, 行列 Q_m は半正定値.

SP-R: min. z

$$\text{s.t. } z \geq \sum_{m \in M} \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}(*, m)$$

$$z \geq \sum_{m \in M} \left(\frac{1}{2} \right) (\mathbf{x}(*, m)^T Q_m \mathbf{x}(*, m) + \mathbf{q}_m^T \mathbf{x}(*, m)),$$

$$\sum_{m \in M} x(j, m) = 1 \quad (\forall j \in J),$$

$$\mathbf{x}(j, m) \geq 0 \quad (\forall (j, m) \in J \times M).$$

SP-Rは凸計画(2次錐計画)であり, 多項式時間で解くことができる.

SP-Rの最適解 $(z^*, \mathbf{x}^*)$ を用いて, 各仕事 j を確率 $x^*(j, m)$ で機械 m に割当

$X(j, m)$: 得られた解を表す0-1確率変数

Z : 得られた解に対応する目的関数値を表す確率変数

近似比率

$(z^*, \mathbf{x}^*)$: SP-Rの最適解

$$\begin{aligned} E[Z] &= E \left[\sum_{m \in M} \left(\sum_{(i,j): i \neq j} \left(\frac{1}{2} \right) (P_m(i,j) + P_m^T(i,j)) X(i,m) X(j,m) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in J} (1/2) 2w_j d_j X(j,m) \right) \Big] \\ &= \sum_{m \in M} \left(\sum_{(i,j): i \neq j} \left(\frac{1}{2} \right) (P_m(i,j) + P_m^T(i,j)) x^*(i,m) x^*(j,m) \right) \\ &\quad + \sum_{j \in J} w_j d_j x^*(j,m) \Big) \\ &\leq \sum_{m \in M} \left(\sum_{(i,j): i \neq j} \left(\frac{1}{2} \right) (P_m(i,j) + P_m^T(i,j)) x^*(i,m) x^*(j,m) \right) \\ &\quad + \sum_{j \in J} (1/2) w_j d_j (x^*(j,m))^2 + \sum_{j \in J} w_j d_j x^*(j,m) \Big) \\ &= \sum_{m \in M} \left(\sum_{(i,j): i \neq j} \left(\frac{1}{2} \right) x^*(*,m)^T Q_m x^*(*,m) \right) \\ &\quad + q_m^T x^*(*,m) \Big) \\ &= \sum_{m \in M} \left(\sum_{(i,j): i \neq j} \left(\frac{1}{2} \right) \left(x^*(*,m)^T Q_m x^*(*,m) + q_m^T x^*(*,m) \right) \right) \\ &\quad + (1/2) q_m^T x^*(*,m) \Big) \\ &\leq z^* + \left(\frac{1}{2} \right) z^* = (3/2) z^* \leq (3/2) (\text{SPの最適値}) \end{aligned}$$

凸2次緩和を使ってみたい！

凸2次緩和の大事なところ！

Q : 任意の正方行列

$D(d)$: d を対角成分に持つ対角行列

$D(q)$: q を対角成分に持つ対角行列

q : Q の対角成分を要素に持つベクトル

01QP: $\min. x^T Q x + d^T x$ subject to $x \in \{0,1\}^n$

$D(d)$: d を対角成分に持つ対角行列

もし, Q が非負行列, $d \geq 0$ かつ $Q + D(d)$ が半正定値ならば,

SOCP: $\min. z$

s. t. $z \geq x^T (Q + D(d)) x,$

$z \geq (q + d)^T x,$

$0 \leq x \leq 1.$

上記は凸計画(2次錐計画)となり, 多項式時間で解くことができる

IRで解を構築すると, 2次関数の非対角項の期待値は目的関数と同じ

MIN 2SAT (定義)

MIN 2SAT

入力: ブール変数 U , クローズの集合 Γ

ただし各クローズ中のリテラルは2個以下.

非負整数のクローズ重み $w: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

問題: Γ 中の真となるクローズ重み和が最小となる, 真偽割当を求めよ.

すべてのクローズは丁度2つのリテラルを含むと仮定

注: 1つのリテラル b からなるクローズは, 常に偽となる人工変数 F を用意して, $(b \vee F)$ と表す.

$x(b) = 1 \Leftrightarrow$ リテラル b が真, $z(C) = 1 \Leftrightarrow$ クローズ C が真

クローズ C がリテラル b, b' を含むとき $C = \{b, b'\}$:

0-1変数 x を使って $z(C) = x(b) + x(b') - x(b)x(b')$ と表せる.

MIN 2SAT (定義)

$$\text{MIN 2SAT: } \min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b'))$$

$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U),$$

$$x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U),$$

$$x(F) = 0.$$

目的関数の変形 $x, y \in \{0,1\}$ ならば

$$x + y - xy = x^2 + y^2 - xy = \left(\frac{1}{2}\right) (x - y)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} x + y - xy &= \left(\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{2}\right) (x + y) - xy \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) (x - y)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (x + y) \end{aligned}$$

MIN 2SAT (定義)

MIN 2SAT: $\min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b'))$

$$\min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2}\right) (x(b) - x(b'))^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (x(b) + x(b')) \right)$$

$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U),$$

$$x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U),$$

$$x(F) = 0.$$

$$\begin{aligned} x + y - xy &= \left(\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{2}\right) (x + y) - xy \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) (x - y)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (x + y) \end{aligned}$$

負係数の非対角項があり, 線形項 $(x + y)$ のみを下界とできない!

MIN 2SATを独立丸めで解く！

MIN 2SAT-R:

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2}\right) (x(b) - x(b'))^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (x(b) + x(b')) \right) \\ \text{s. t.} \quad & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U), \\ & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \quad (\forall a \in U), \\ & x(F) = 0. \end{aligned}$$

凸2次計画なので, 多項式時間で解くことができる.

x^* : MIN 2SAT-R の最適解.

X : IRを用いて得られる解を表す0-1確率変数ベクトル

2-近似解法

$$\min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (x(b) - x(b'))^2 + \left(\frac{1}{2} \right) (x(b) + x(b')) \right)$$

Z : IRで得られる解の目的関数値を表す確率変数

線形項を(1/2)しか
残せなかった

$$E[Z] = E \left[\sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) (X(b) + X(b') - X(b)X(b')) \right]$$

$$= \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) (x^*(b) + x^*(b') - x^*(b)x^*(b'))$$

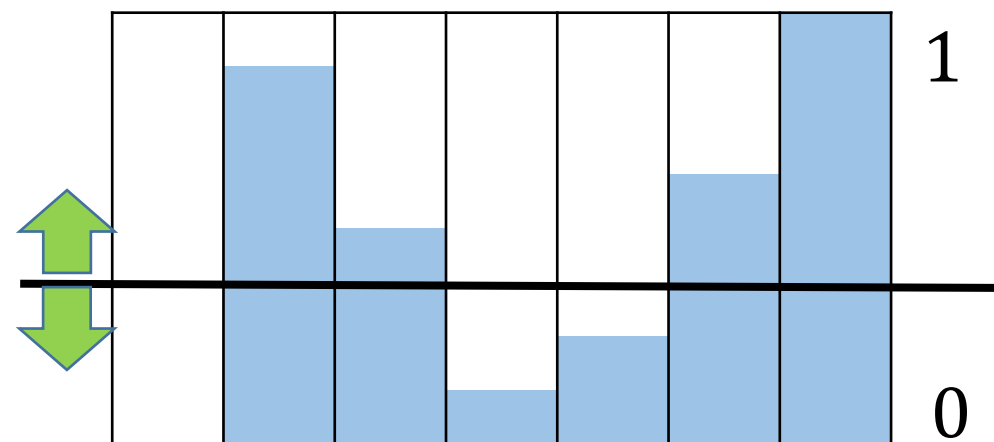
$$\leq \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(x^*(b) + x^*(b') - x^*(b)x^*(b') \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \right) (x^*(b)^2 + x^*(b')^2) \right)$$

$$= \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (x^*(b) - x^*(b'))^2 + x^*(b) + x^*(b') \right)$$

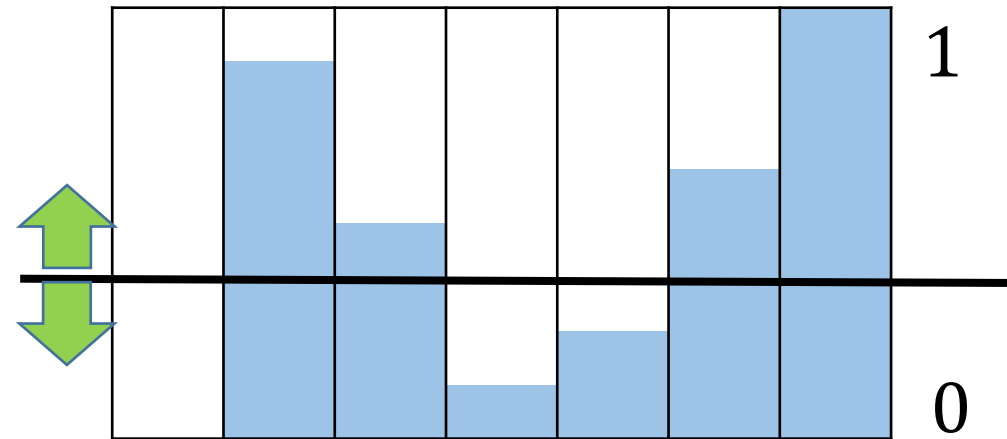
$$\leq 2 \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (x^*(b) - x^*(b'))^2 + \left(\frac{1}{2} \right) (x^*(b) + x^*(b')) \right)$$

$$= 2Z^* = 2 (\text{MIN 2SAT-Rの最適値}) \leq 2 (\text{MIN 2SATの最適値})$$

従属丸め法



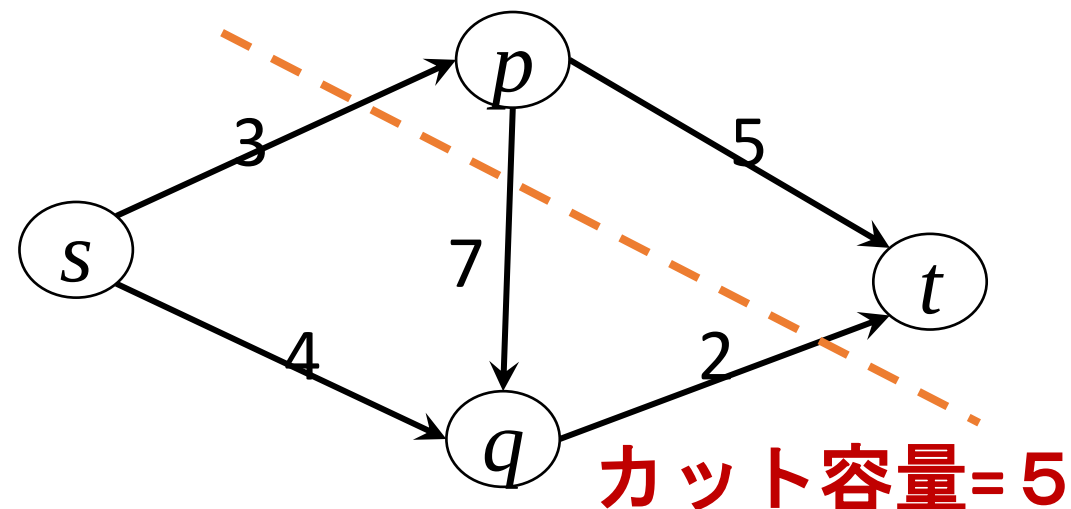
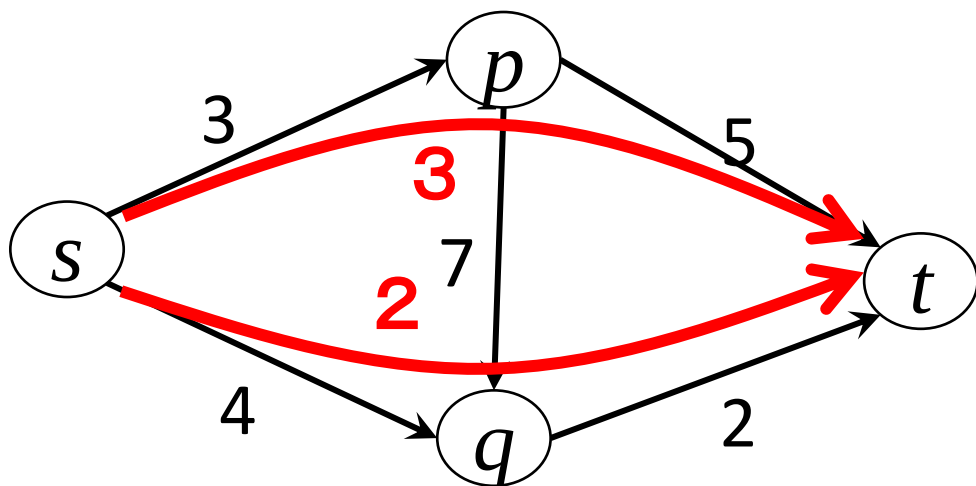
従属丸め法で 最大フロー最小カット定理を 証明する



最大フロー最小カット定理を証明してみよう！

最大フロー問題

入力: 有向グラフ $G = (V, A)$, 始点 $s \in V$, 終点 $t \in V$, 枝容量 $c: A \rightarrow \mathbb{Z}_+$ 問題: 枝容量制約を満たす s から t へのフローの流量最大化.



最小カット問題: s と t を分けるカットで容量最小のものを見つけよ！

最大フロー問題とその双対問題

MF: max. x_0

$x(a)$: 枝 a を流れるフロー量

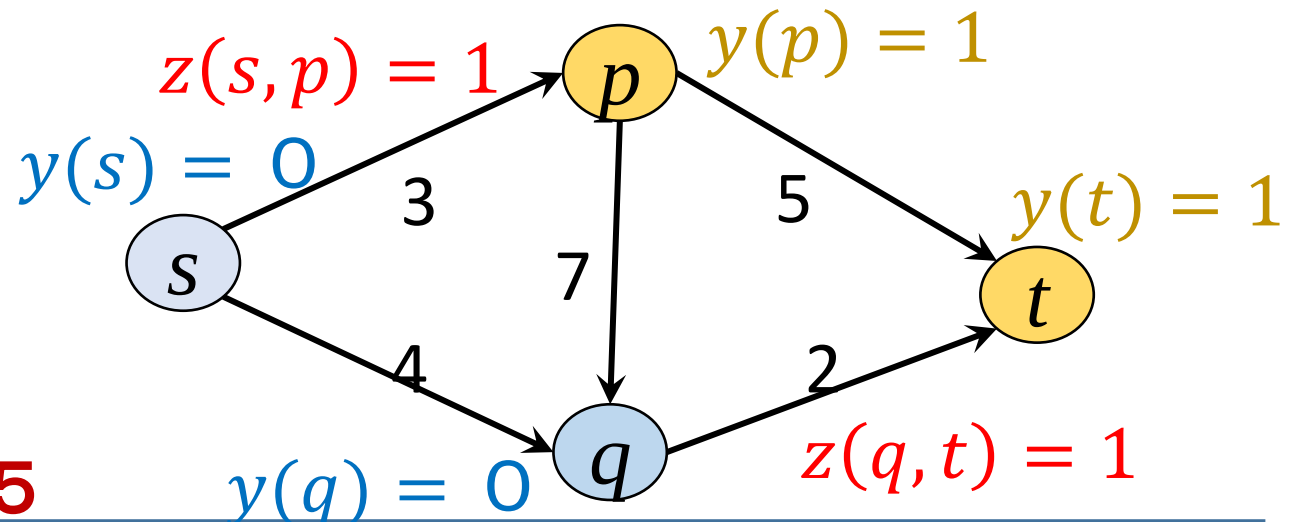
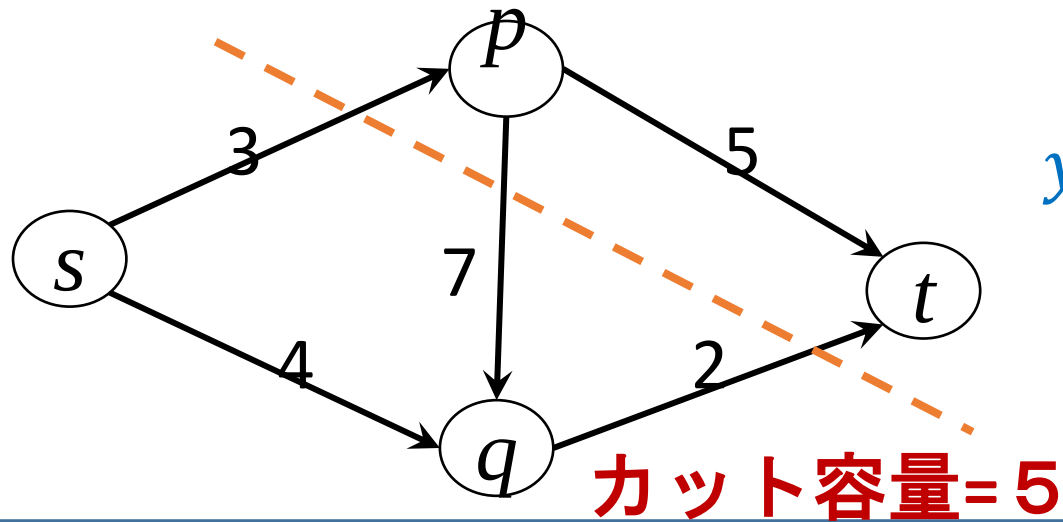
$$\text{s. t. } \sum_{a \in \text{Out}(v)} x(a) - \sum_{a \in \text{In}(v)} x(a) = \begin{cases} x_0 & (v = s), \\ -x_0 & (v = t), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$
$$c(a) \geq x(a) \geq 0 \quad (\forall a \in A).$$

MC: min. $\sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z(u,v)$

$$\text{s. t. } \begin{aligned} z(u,v) &\geq y(v) - y(u) & (\forall (u,v) \in A), \\ y(t) &= y(s) + 1, \\ z(u,v) &\geq 0 & (\forall (u,v) \in A). \end{aligned}$$

強双対定理より. (MFの最適値) = (MCの最適値)

カットと双対許容解

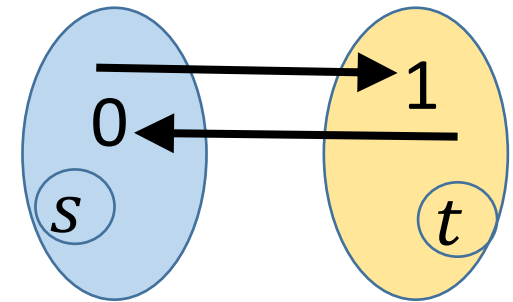


MC: $\min. \sum_{(u,v) \in A} c(u, v) z(u, v)$

$z(u, v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u, v) \in A),$

s. t. $y(t) = y(s) + 1,$

$z(u, v) \geq 0 \quad (\forall (u, v) \in A).$



s-t カット $\rightarrow$ MCの 0-1 許容解, s-t カット $\leftarrow$ MCの 0-1 許容解 (?)

MCに 0-1 最適解があれば最小カットになっている !

最大フロー最小カット定理

$$\text{MC: min. } \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z(u,v)$$

$$\begin{aligned} & z(u,v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u,v) \in A), \\ \text{s. t. } & y(t) = y(s) + 1, \\ & z(u,v) \geq 0 \quad (\forall (u,v) \in A). \end{aligned}$$

定理：問題MCは、0-1最適解を持つ。

証明：問題MCは、 $\mathbf{0} \leq \mathbf{y}^* \leq \mathbf{1}$ を満たす最適解を持つ(略). $\therefore y^*(s) = 0,$
 $y^*(t) = 1.$
解 $\mathbf{y}^*$ を固定すると、目的関数を最小化する $\mathbf{z}^*$ は簡単に決定される。

$$\forall (u,v) \in A, \quad z^*(u,v) = \max\{y^*(v) - y^*(u), 0\}.$$

問題MCの最適解として $\mathbf{y} \in \{0,1\}^V$ があること示せば、 $\mathbf{z}$ も 0-1 の値。

最大フロー最小カット定理

$$\text{MC: min. } \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z(u,v)$$

$$z(u, v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u, v) \in A),$$

$$\text{s. t.} \quad y(t) = y(s) + 1,$$

$$z(u, v) \geq 0 \quad (\forall (u, v) \in A).$$

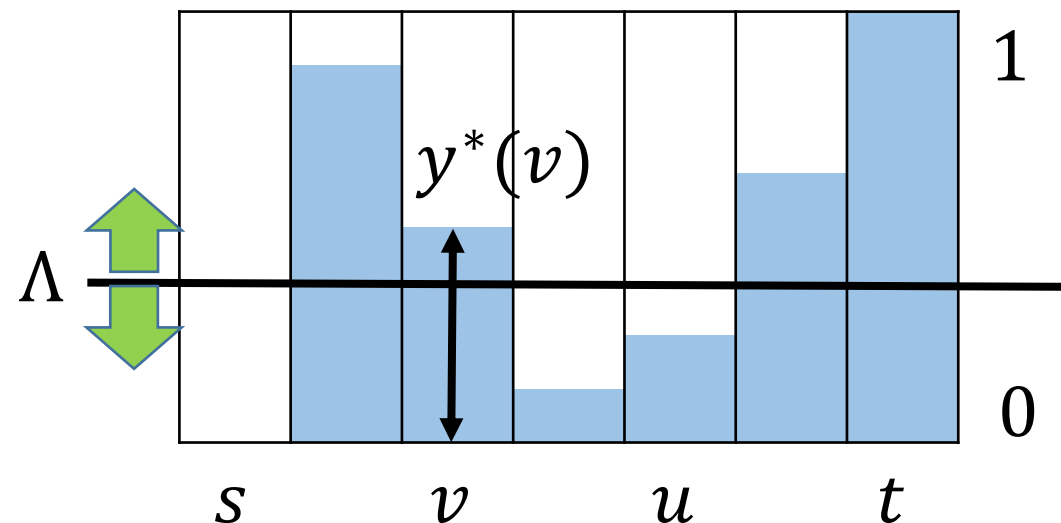
定理: 問題MCは, 0-1最適解を持つ.

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

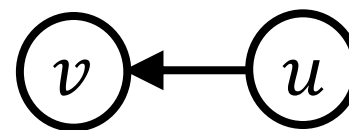
$$Y(v) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < y^*(v)), \\ 0 & (\Lambda \geq y^*(v)). \end{cases}$$

$$Z(u, v) = \max\{Y(v) - Y(u), 0\}$$

(Y, Z) はMC許容解



最大フロー最小カット定理



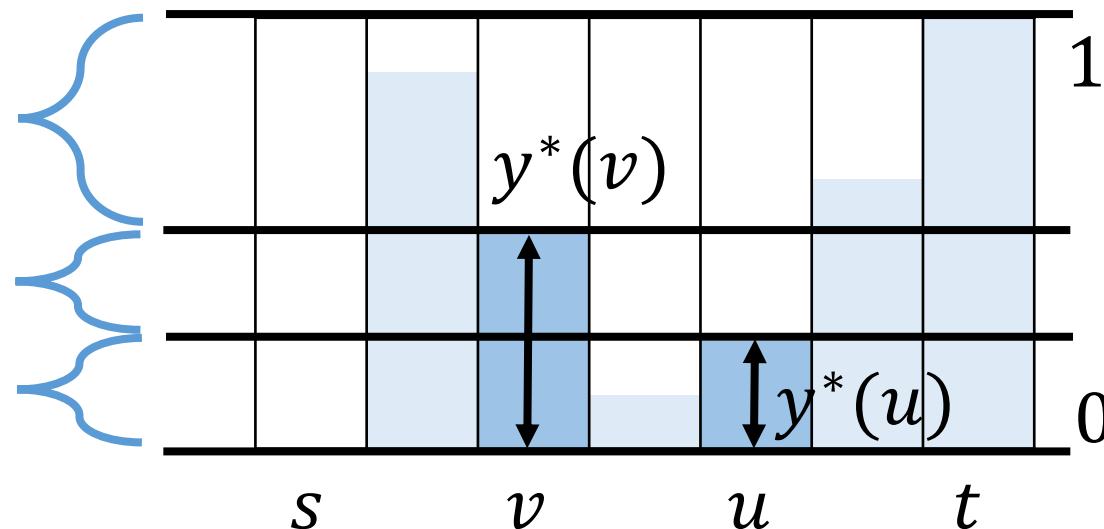
(i) $y^*(v) \geq y^*(u)$ の場合

$$Z(u, v) = \max\{Y(v) - Y(u), 0\}$$

$$(1) Z(u, v) = \max\{0 - 0, 0\} = 0$$

$$(2) Z(u, v) = \max\{1 - 0, 0\} = 1$$

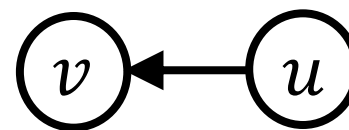
$$(3) Z(u, v) = \max\{1 - 1, 0\} = 0$$



$$\begin{aligned} E[Z(u, v)] &= \Pr[Z(u, v) = 1] = \Pr[y^*(u) \leq \Lambda < y^*(v)] \\ &= y^*(v) - y^*(u) \leq z^*(u, v) \end{aligned}$$

$$z(u, v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u, v) \in A)$$

最大フロー最小カット定理



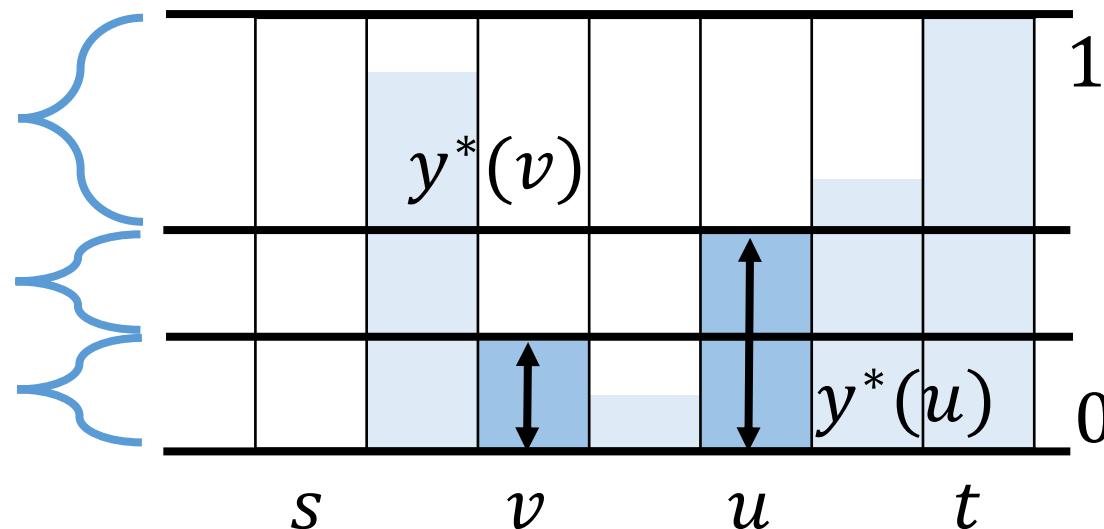
(ii) $y^*(v) \leq y^*(u)$ の場合

$$Z(u, v) = \max\{Y(v) - Y(u), 0\}$$

$$(1) Z(u, v) = \max\{0 - 0, 0\} = 0$$

$$(2) Z(u, v) = \max\{0 - 1, 0\} = 0$$

$$(3) Z(u, v) = \max\{1 - 1, 0\} = 0$$



$$E[Z(u, v)] = \Pr[Z(u, v) = 1] = 0 \leq z^*(u, v)$$

$$z(u, v) \geq 0 \quad (\forall (u, v) \in A)$$

ゆえに, (i)(ii) 両方 において $E[Z(u, v)] \leq z^*(u, v)$ が成り立つ !

最大フロー最小カット定理

$$\begin{aligned} \text{MC: min. } & \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z(u,v) \\ & z(u,v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u,v) \in A), \\ \text{s. t. } & y(t) = y(s) + 1, \\ & z(u,v) \geq 0 \quad (\forall (u,v) \in A). \end{aligned}$$

定理：問題MCは、0-1最適解を持つ。

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$Y(v) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < y^*(v)), \\ 0 & (\Lambda \geq y^*(v)). \end{cases}$$

$$Z(u,v) = \max\{Y(v) - Y(u), 0\}$$

$$\begin{aligned} & \forall (u,v) \in A, E[Z(u,v)] \leq z^*(u,v) \\ & E\left[\sum_{(u,v) \in A} c(u,v)Z(u,v)\right] \\ &= \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)E[Z(u,v)] \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z^*(u,v) \\ &= (\text{MCの最適値}) \end{aligned}$$

最大フロー最小カット定理

$$\begin{aligned} \text{MC: min. } & \sum_{(u,v) \in A} c(u,v)z(u,v) \\ & z(u,v) \geq y(v) - y(u) \quad (\forall (u,v) \in A), \\ \text{s. t. } & y(t) = y(s) + 1, \\ & z(u,v) \geq 0 \quad (\forall (u,v) \in A). \end{aligned}$$

定理：問題MCは、0-1最適解を持つ。

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$Y(v) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < y^*(v)), \\ 0 & (\Lambda \geq y^*(v)). \end{cases}$$

$$Z(u,v) = \max\{Y(v) - Y(u), 0\}$$

$$\forall (u,v) \in A, E[Z(u,v)] = z^*(u,v)$$

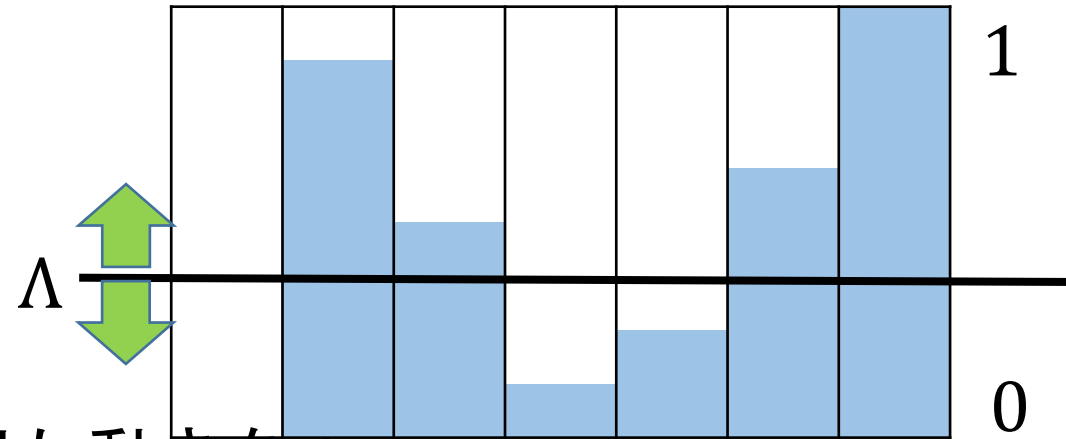
$$E\left[\sum_{(u,v) \in A} c(u,v)Z(u,v)\right] \leq (\text{MCの最適値}) \rightarrow \text{実は等号}$$

(Y, Z) の実現値はすべてMCの最適解。
例えば $U = 1/2$ とした解は、0-1最適解。

従属丸め法

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$Y(v) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < y^*(v)), \\ 0 & (\Lambda \geq y^*(v)). \end{cases}$$



値の似ている変数は、丸めの際似た動きをする。

変数の掛け算の期待値が、線形関数で書けそうな感じがする。

MIN 2SAT 再攻略

- [Bertsimas, Teo and Vohra 1999]

MIN 2SAT (定義)

MIN 2SAT

入力: ブール変数 U , クローズの集合 Γ

ただし各クローズ中のリテラルは丁度2個.

非負整数のクローズ重み $w: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$.

問題: Γ 中の真となるクローズ重み和が最小となる, 真偽割当を求めよ.

$x(b) = 1 \Leftrightarrow$ リテラル b が真

MIN 2SAT: $\min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b'))$

s. t. $x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U),$

$x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U),$

$x(F) = 0.$

MIN 2SAT (凸2次01計画)

$$\text{MIN 2SAT: } \min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C)(x(b) + x(b') - x(b)x(b'))$$

$$\min. \sum_{\{b,b'\}=C \in \Gamma} w(C) \left(\left(\frac{1}{2} \right) (x(b) - x(b'))^2 + \left(\frac{1}{2} \right) (x(b) + x(b')) \right)$$

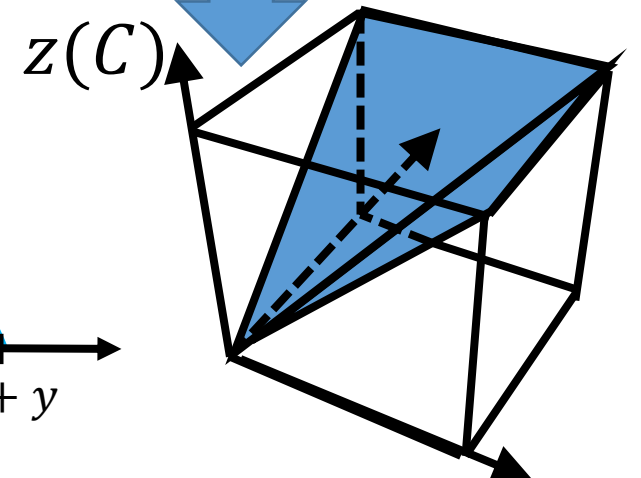
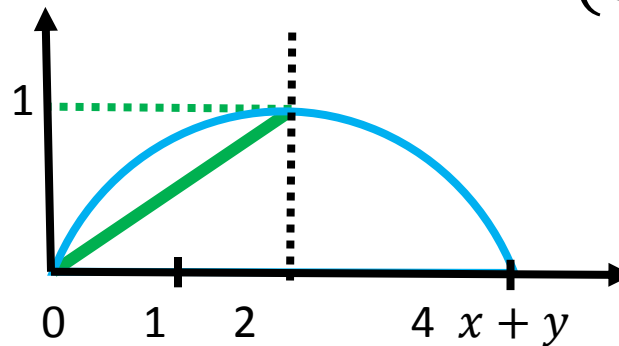
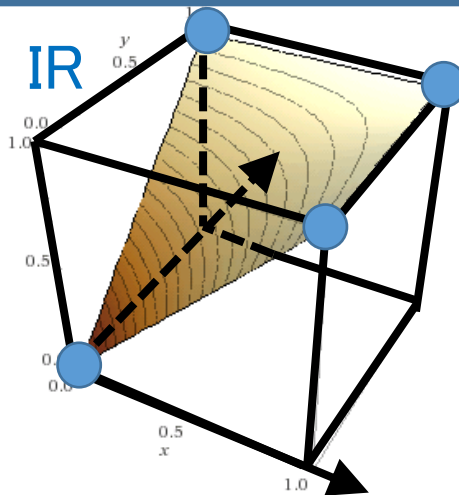
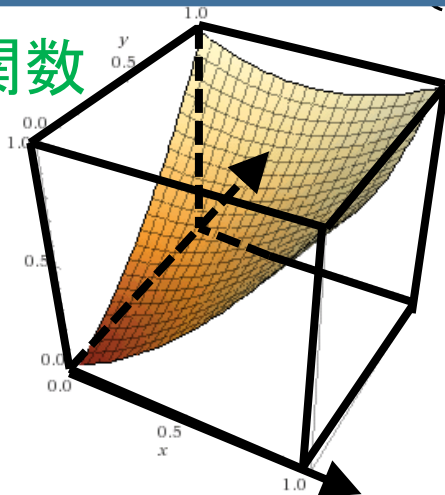
$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U),$$

$$x(a), x(\neg a) \in \{0,1\} \quad (\forall a \in U),$$

$$x(F) = 0.$$

こっちの方が緩和の
ゆるみが少ないよね！

目的関数



MIN 2SAT (線形整数計画)

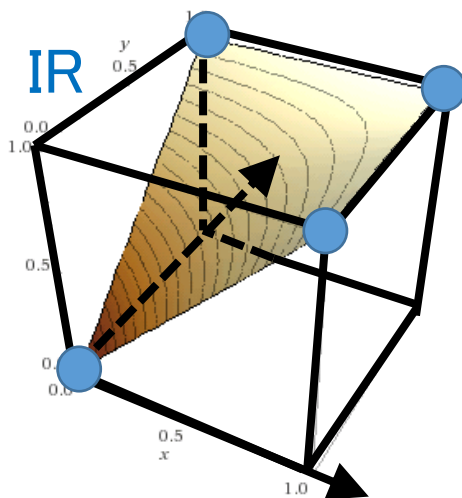
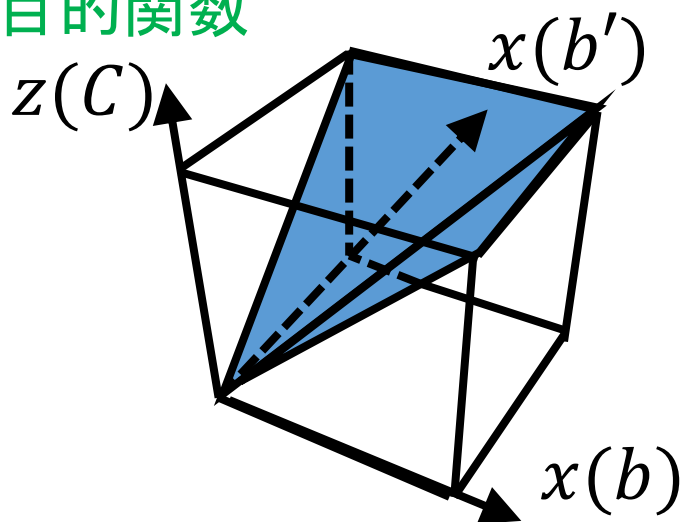
MIN 2SAT: $\min. \sum_{C \in \Gamma} w(C) z(C)$

$$\text{s. t.} \quad \begin{aligned} x(a) + x(\neg a) &= 1 \\ z(C) &\geq \max_{b \in C} \{x(b)\} \end{aligned}$$

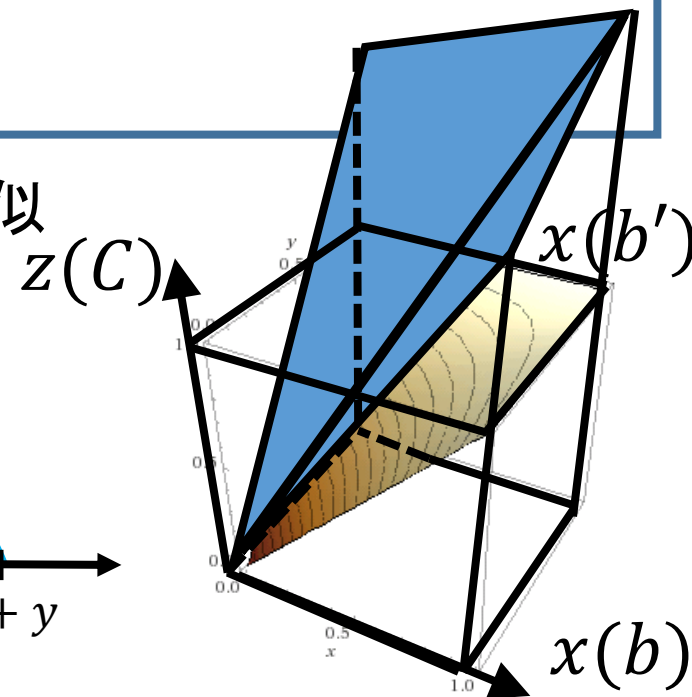
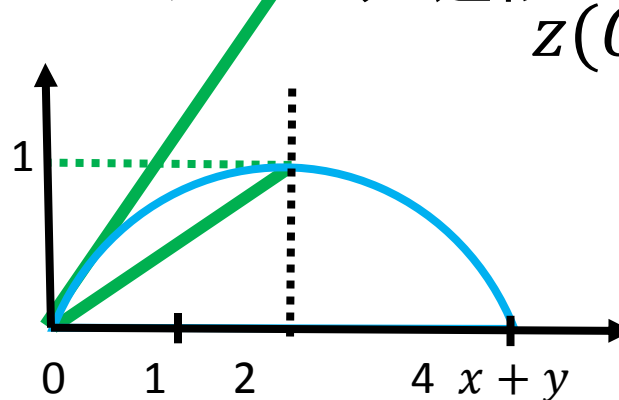
$$\begin{aligned} &(\forall a \in U), \\ &(\forall C \in \Gamma), \quad \begin{cases} C = \{b, b'\} \text{ ならば} \\ z(C) \geq x(b), \\ z(C) \geq x(b'). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(a), x(\neg a) &\in \{0, 1\} \quad (\forall a \in U), \\ z(C) &\in \{0, 1\} \quad (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

目的関数



IRはやっぱり2近似



MIN 2SATの丸め法

- そもそもIRは, いろいろな変数がランダムに真(値1)になるので, いろいろなクローズが勝手に真(値1)になり易い.
- MAX SATは, できるだけ多くのクローズを真にしたいので, IRと相性が良さそう!
- MIN 2SATは, できるだけクローズを真にしたくない. 真になるクローズのところに, 真になる変数を集めたい!
- 従属丸め法は, 緩和問題の最適解で値の近いブール変数は, 似た挙動をする(同時に真になる, あるいは同時に偽になる).

MIN 2SAT (線形緩和)

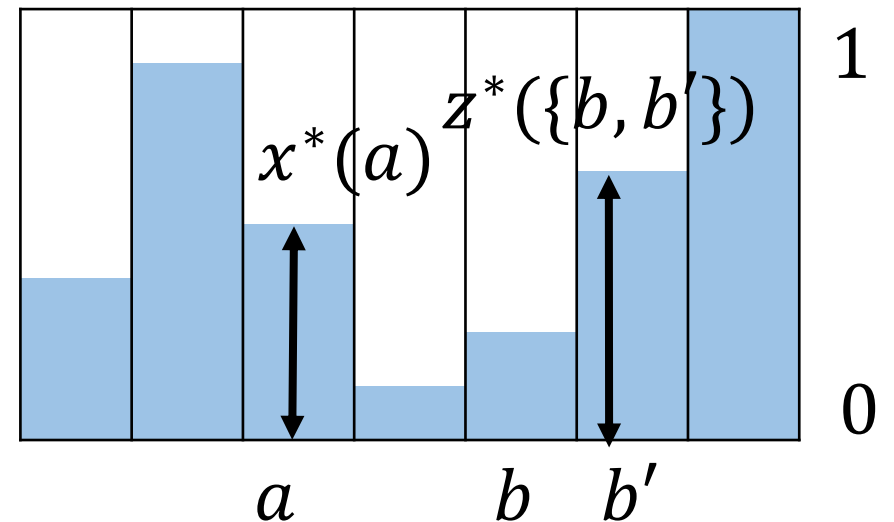
MIN 2SAT-R: $\min. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x(a) + x(\neg a) = 1 & (\forall a \in U), \\ & z(C) \geq \max_{b \in C} \{x(b)\} & (\forall C \in \Gamma), \end{aligned} \quad \begin{cases} C = \{b, b'\} \text{ ならば} \\ z(C) \geq x(b), \\ z(C) \geq x(b'). \end{cases}$$
$$\begin{aligned} & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 & (\forall a \in U), \\ & 0 \leq z(C) \leq 1 & (\forall C \in \Gamma). \end{aligned}$$

(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, 目的関数を
最小化する z^* の値は容易にわかる

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$



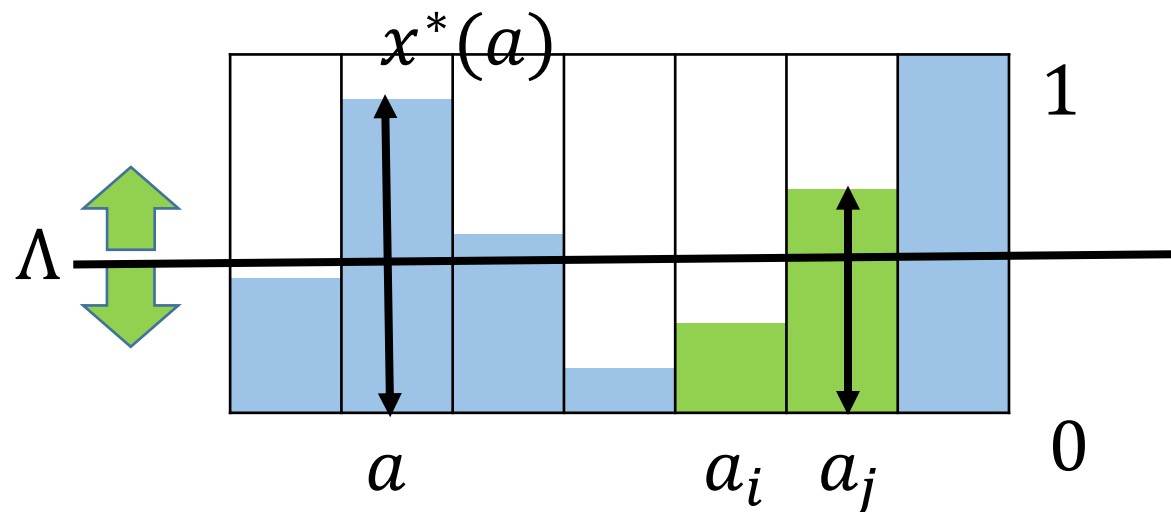
従属丸め法の適用

(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$
$$Z(C) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} C \text{ 中のリテラルに} \\ 1 \text{ のものがある} \end{array} \right), \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$



$C = \{a_i, a_j\}$ の場合

$$\begin{aligned} E[Z(C)] &= \Pr[Z(C) = 1] \\ &= \Pr[\Lambda \leq \max\{x^*(a_i), x^*(a_j)\}] \\ &= \max\{x^*(a_i), x^*(a_j)\} = z^*(C) \end{aligned}$$

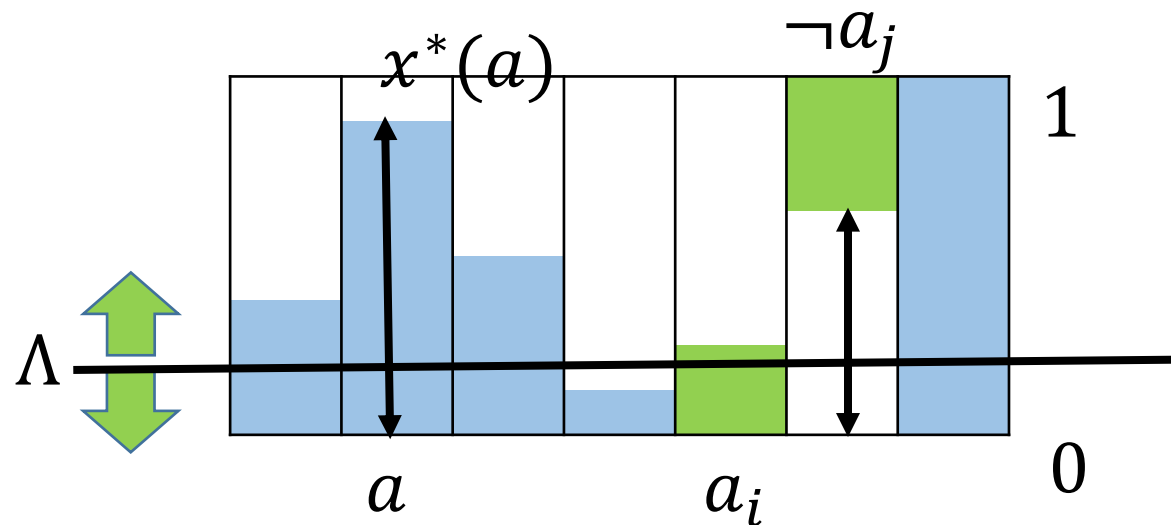
従属丸め法の適用

(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$
$$Z(C) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} C \text{中のリテラルに} \\ 1 \text{のものがある} \end{array} \right), \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$



$C = \{a_i, \neg a_j\}$ の場合

$$\begin{aligned} E[Z(C)] &= \Pr[Z(C) = 1] \\ &= \Pr[\Lambda \leq x^*(a_i) \text{ または } \Lambda > x^*(a_j)] \\ &\leq x^*(a_i) + x^*(\neg a_j) \\ &\leq 2 \max\{x^*(a_i), x^*(\neg a_j)\} = 2z^*(C) \end{aligned}$$

他のケースも $E[Z(C)] \leq 2z^*(C)$

従属丸め法の適用

(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} C \text{ 中のリテラルに} \\ 1 \text{ のものがある} \end{array} \right), \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$

常に $E[Z(C)] \leq 2z^*(C)$ が成立

目的関数の期待値は

$$\begin{aligned} E[\sum_{C \in \Gamma} w(C)Z(C)] &= \sum_{C \in \Gamma} w(C)E[Z(C)] \\ &\leq \sum_{C \in \Gamma} w(C)2z^*(C) \\ &= 2(\text{MIN 2SAT-Rの最適値}) \\ &\leq 2(\text{MIN 2SATの最適値}) \end{aligned}$$

なんだやっぱり2近似じゃん！
でもね... 2SATの2が関係無い！

MIN 2SAT $\rightarrow$ MIN SAT (線形整数計画)

MIN SAT-R: $\min. \sum_{C \in \Gamma} w(C)z(C)$

$$\begin{array}{ll} \text{s. t.} & x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U), \\ & z(C) \geq \max_{b \in C} \{x(b)\} \quad (\forall C \in \Gamma), \\ & 0 \leq x(a), x(\neg a) \leq 1 \quad (\forall a \in U), \\ & 0 \leq z(C) \leq 1 \quad (\forall C \in \Gamma). \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \{b, b', b''\} \text{ならば} \\ z(C) \geq x(b), \\ z(C) \geq x(b'), \\ z(C) \geq x(b''). \end{array} \right.$$

(x^*, z^*) : MIN SAT-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, 目的関数を

最小化する z^* の値は容易にわかる

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

MIN SAT-Rへの従属丸め法の適用

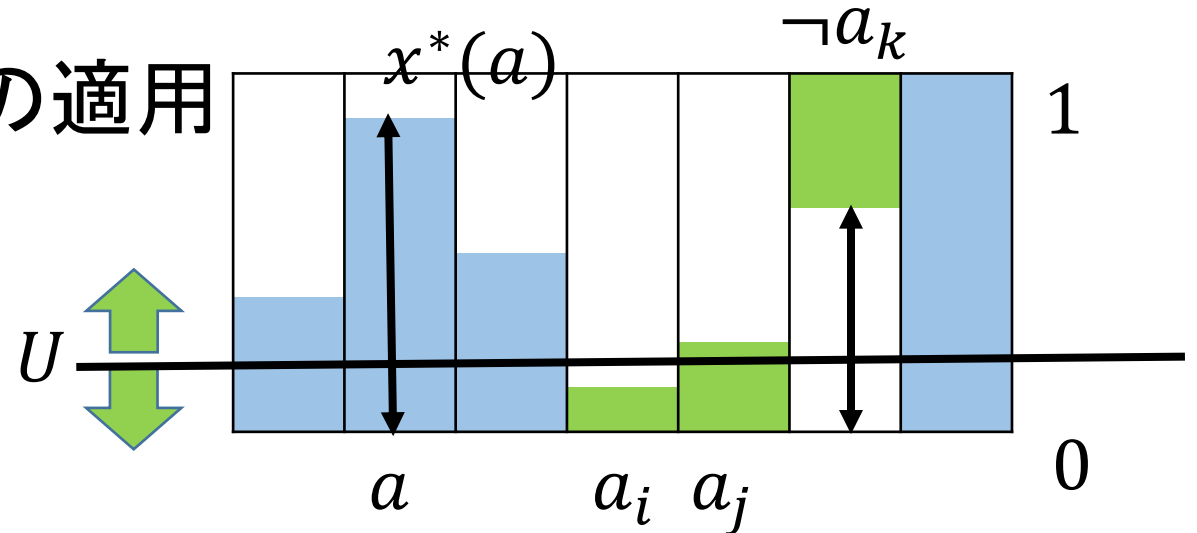
(x^*, z^*) : MIN SAT-Rの最適解

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} C \text{ 中のリテラルに} \\ 1 \text{ のものがある} \end{array} \right), \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$



$C^\neg$: C 中のリテラルで否定のもの

$$C^\circ = C - C^\neg$$

$$E[Z(C)] = \Pr[Z(C) = 1]$$

$$= \Pr \left[\begin{array}{l} \Lambda \leq \max_{b \in C^\circ} \{x^*(b)\} \text{ または} \\ \Lambda > 1 - \max_{b \in C^\neg} \{x^*(b)\} \end{array} \right]$$

$$\leq \max_{b \in C^\circ} \{x^*(b)\} + \max_{b \in C^\neg} \{x^*(b)\}$$

$$\leq 2 \max_{b \in C} \{x^*(b)\} \leq 2z^*(C)$$

MIN SAT-Rへの従属丸め法の適用

(x^*, z^*) : MIN SAT-Rの最適解

$$z^*(C) = \max_{b \in C} \{x^*(b)\}$$

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} C \text{ 中のリテラルに} \\ 1 \text{ のものがある} \end{array} \right), \\ 0 & \text{(それ以外).} \end{cases}$$

常に $E[Z(C)] \leq 2z^*(C)$ が成立

目的関数の期待値は

$$\begin{aligned} E[\sum_{C \in \Gamma} w(C)Z(C)] &= \sum_{C \in \Gamma} w(C)E[Z(C)] \\ &\leq \sum_{C \in \Gamma} w(C)2z^*(C) \\ &= 2(\text{MIN SAT-Rの最適値}) \\ &\leq 2(\text{MIN SATの最適値}) \end{aligned}$$

MIN 2SAT じゃなくて, MIN SATの2近似アルゴリズムができた!

MIN 2SAT の1.5近似解法 [Bertsimas, Teo and Vohra 1999]

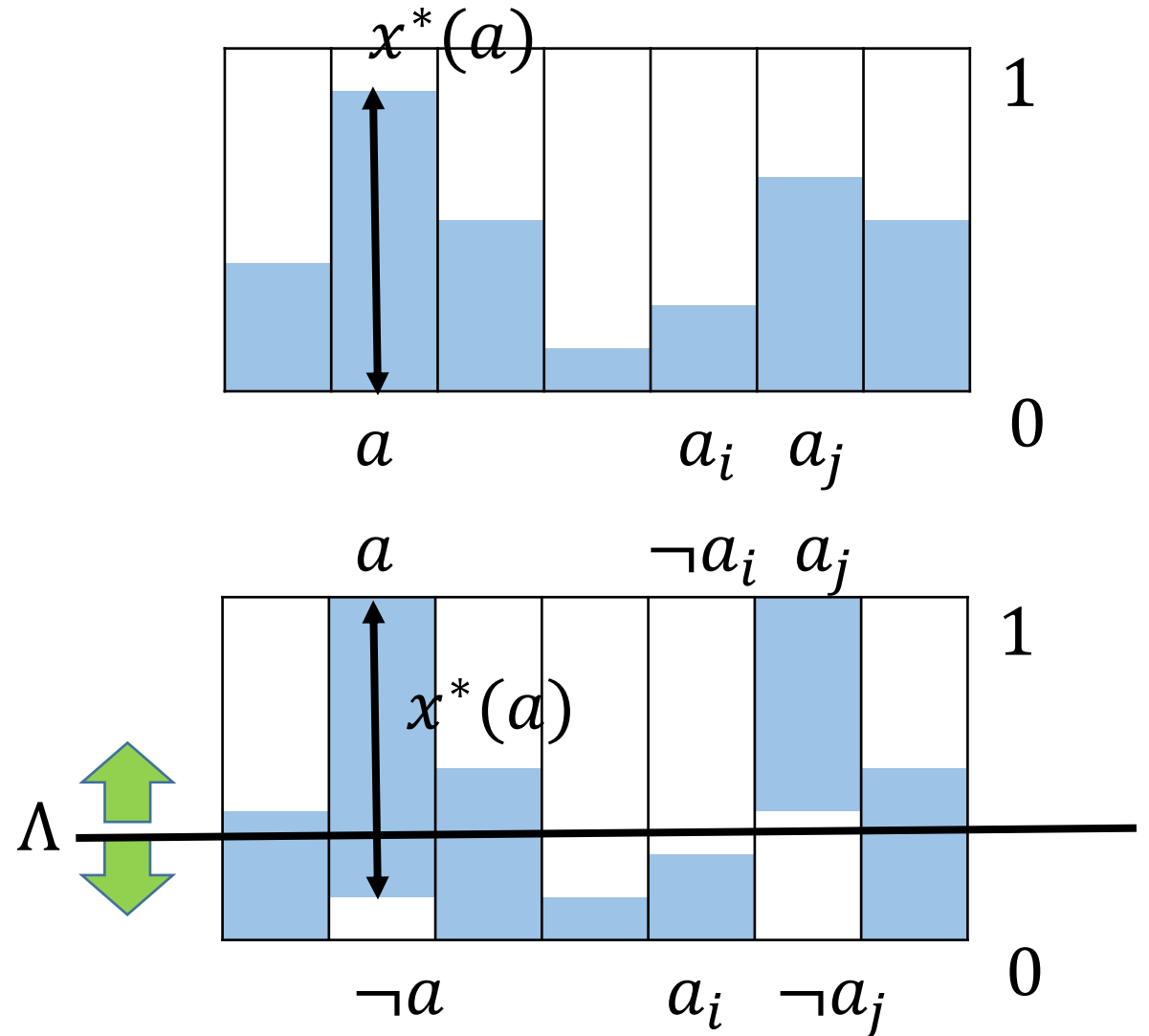
解法: 各ブール変数 a を $(1/2)$ の確率で, a と $\neg a$ を交換して記述

(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & (C \text{ 中のリテラルに} \\ & 1 \text{ のものがある}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$



MIN 2SAT の1.5近似解法 [Bertsimas, Teo and Vohra 1999]

解法: 各ブール変数 a を $(1/2)$ の確率で, a と $\neg a$ を交換して記述

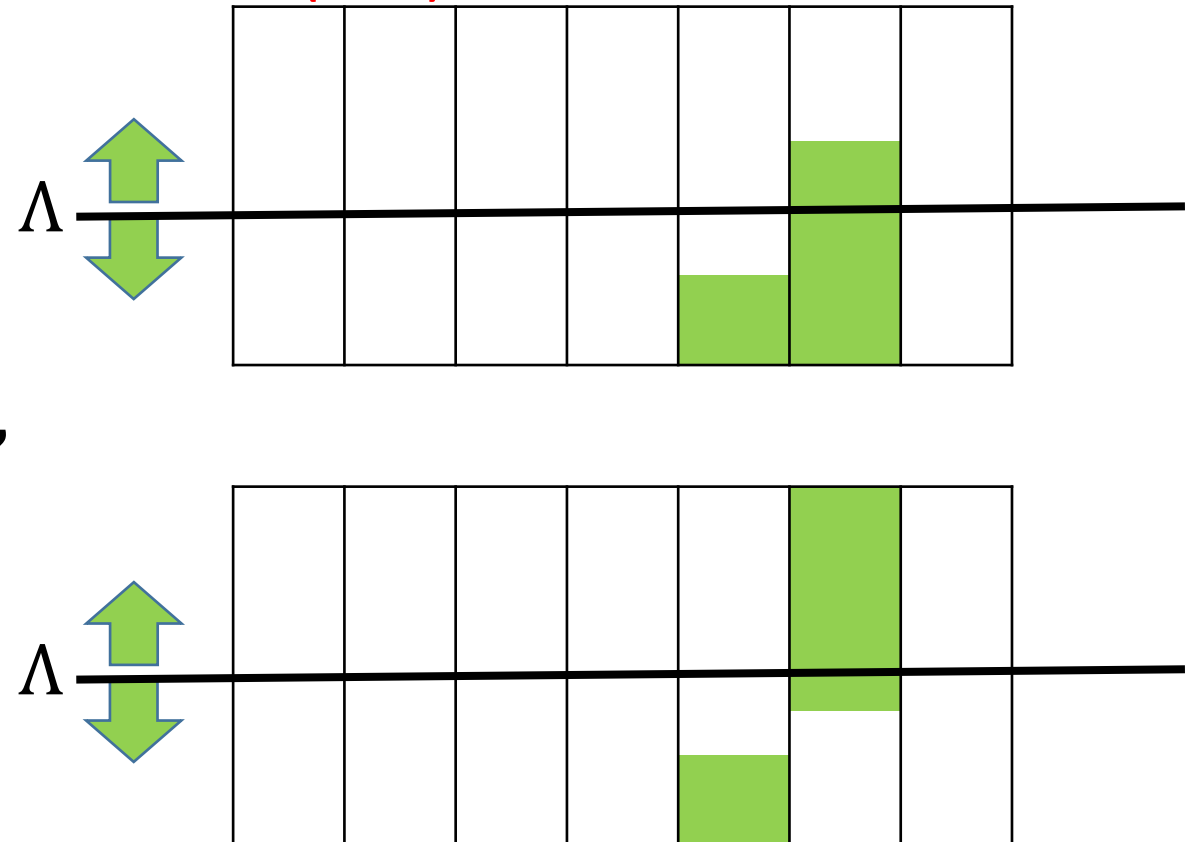
(x^*, z^*) : MIN 2SAT-Rの最適解

Λ : 区間 $[0,1)$ 上の一様乱数

$$X(a) = \begin{cases} 1 & (\Lambda < x^*(a)), \\ 0 & (\Lambda \geq x^*(a)). \end{cases}$$

$$Z(C) = \begin{cases} 1 & (C \text{ 中のリテラルに} \\ & 1 \text{ のものがある}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

下記2つのケースの一方が
(1/2)の確率で出現



MIN 2SAT の1.5近似解法 [Bertsimas, Teo and Vohra 1999]

$C = \{b, b'\}$ の場合

$$E[Z(C)] = \Pr[Z(C) = 1]$$

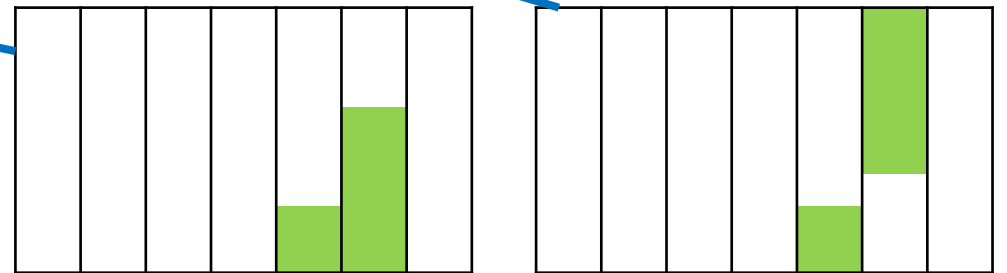
$$= \left(\frac{1}{2}\right) \Pr[\Lambda \leq \max\{x^*(b), x^*(b')\}] + \left(\frac{1}{2}\right) \Pr[\Lambda \leq x^*(b) \text{ または } \Lambda > x^*(b')]$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right) \max\{x^*(b), x^*(b')\} + \left(\frac{1}{2}\right) \textcolor{red}{2} \max\{x^*(b), x^*(b')\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) z^*(C) + \left(\frac{1}{2}\right) \textcolor{red}{2} z^*(C) = \left(\frac{3}{2}\right) z^*(C)$$

目的関数の期待値は

$$E[\sum_{C \in \Gamma} w(C) Z(C)] \leq \sum_{C \in \Gamma} w(C) \left(\frac{3}{2}\right) z^*(C) \leq \left(\frac{3}{2}\right) (\text{MIN SATの最適値})$$



従属丸め法を使ってみたい！

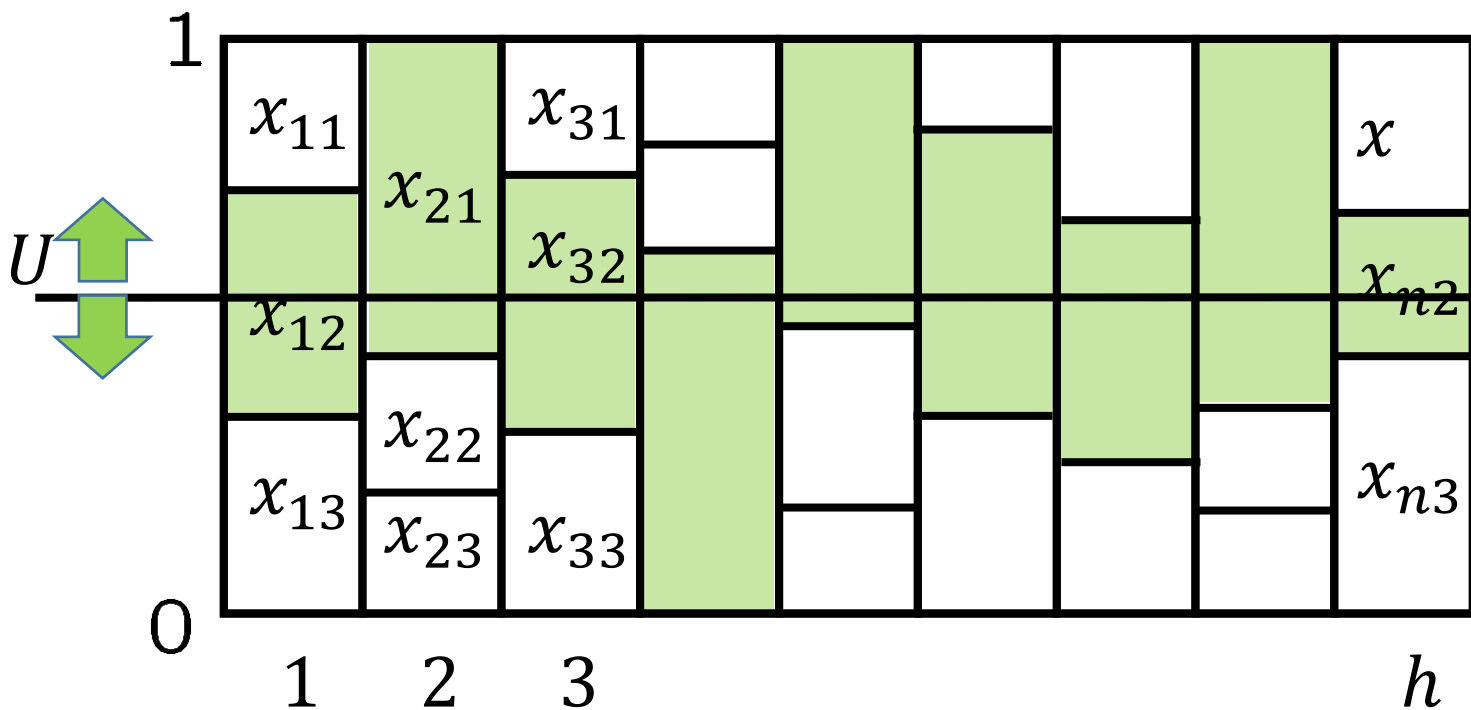
- 道-星状のハブ-スポークネットワークデザイン問題

[Iwasa, Saito and Matsui 2009]

[Kuroki and Matsui 2016]

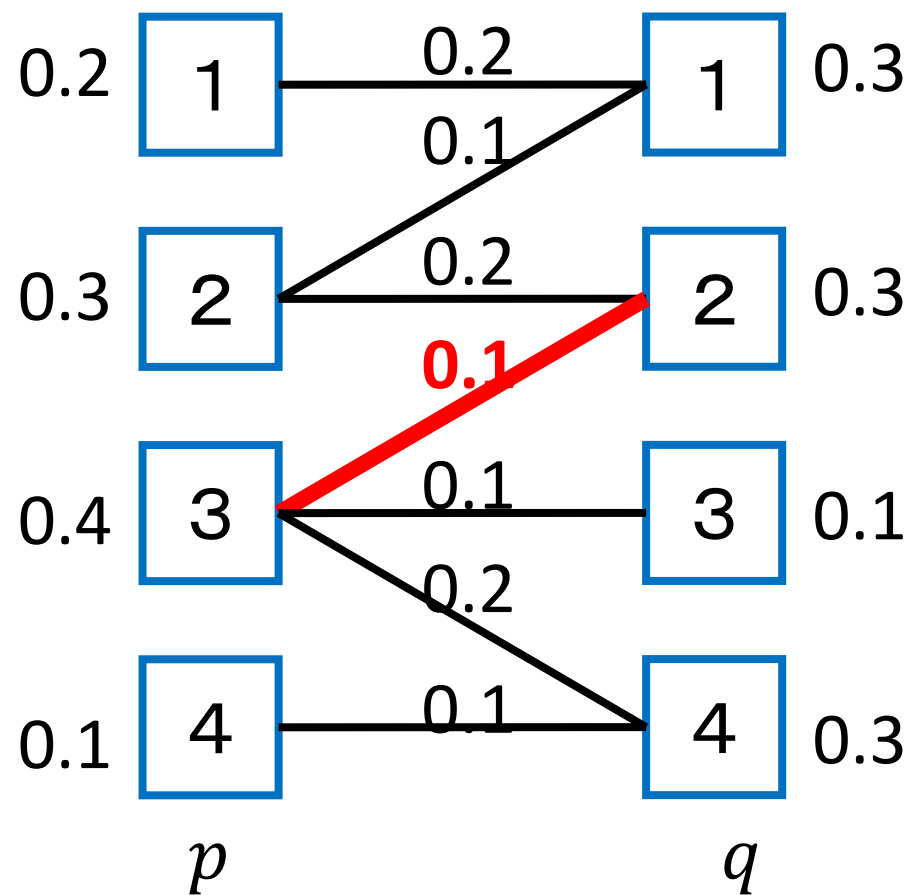
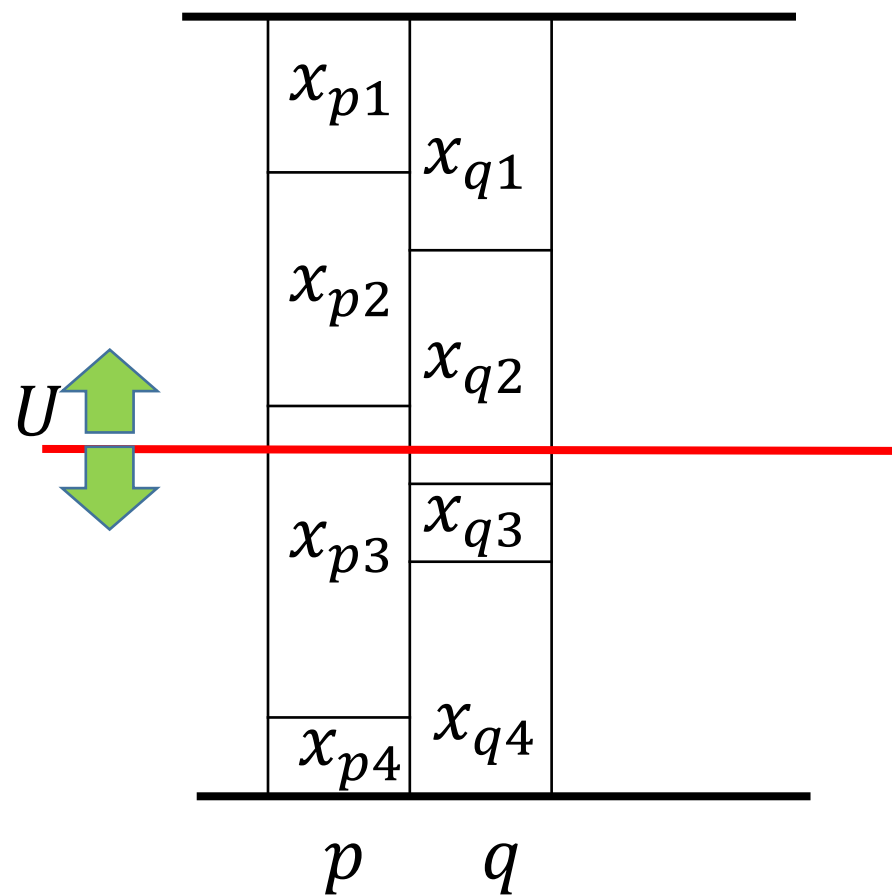
変数が増えたら？

$$x_{h1} + x_{h2} + x_{h3} = 1$$



従属丸め法で得られる解

従属丸め法



Hitchcock 型輸送問題

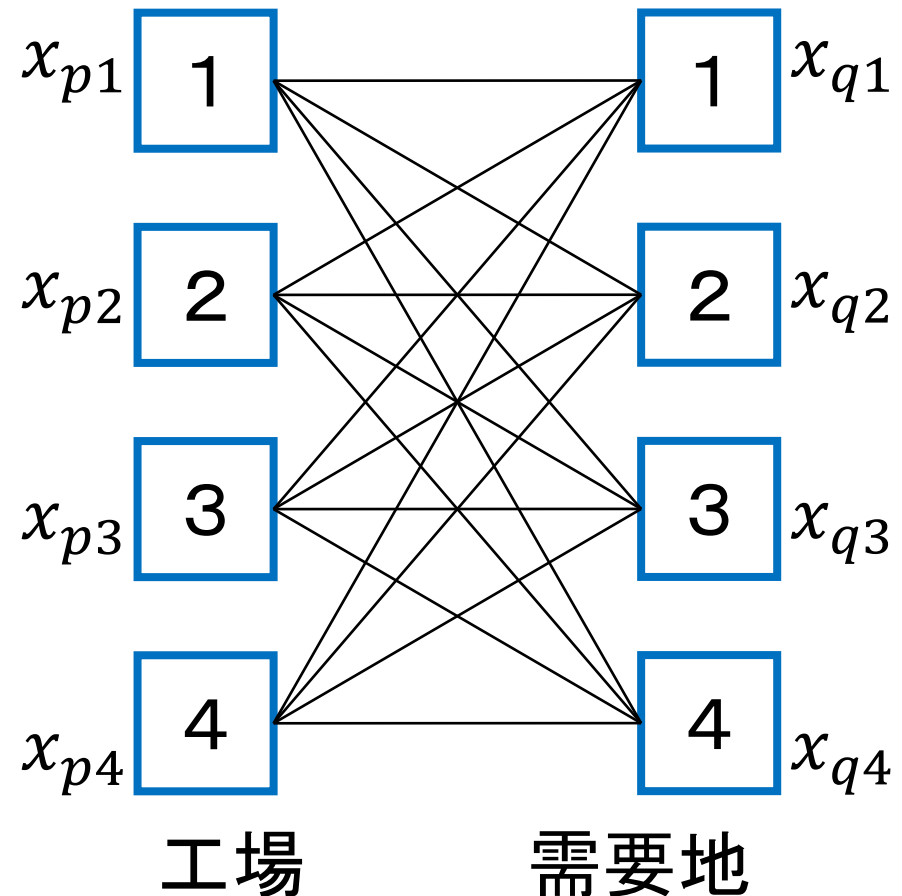
入力: x_{pi} : 工場 i の供給量, x_{qj} : 需要地 j の需要量, $\sum_{i=1}^h x_{pi} = \sum_{j=1}^h x_{qj}$

c_{ij} : 工場 i から需要地 j への
単位当たりの輸送費用

問題: 最小費用の輸送を求める

y_{ij} : 工場 i から需要地 j への輸送量

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_{ij} y_{ij} \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^h y_{ij} = x_{pi} \quad (\forall i), \\ & \sum_{i=1}^h y_{ij} = x_{qj} \quad (\forall j), \\ & y_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i, j)). \end{array}$$



Hitchcock 型輸送問題の許容解

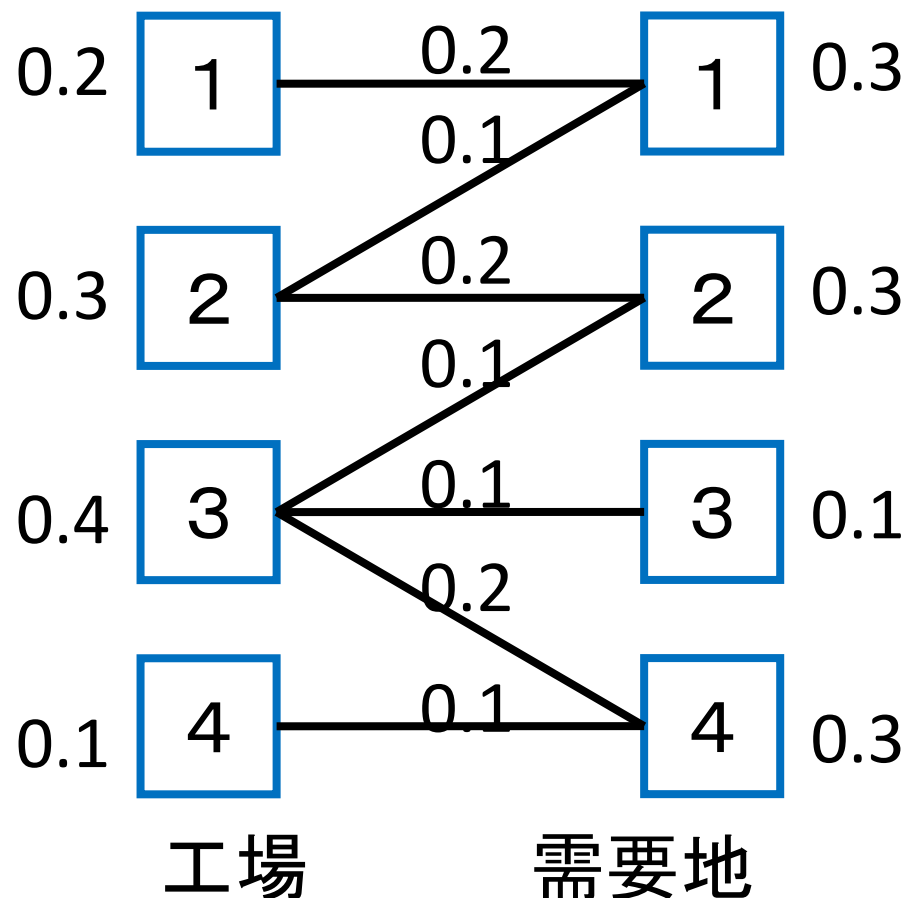
入力: x_{pi} : 工場 i の供給量, x_{qj} : 需要地 j の需要量, $\sum_{i=1}^h x_{pi} = \sum_{j=1}^h x_{qj}$

c_{ij} : 工場 i から需要地 j への
単位当たりの輸送費用

問題: 最小費用の輸送を求める

y_{ij} : 工場 i から需要地 j への輸送量

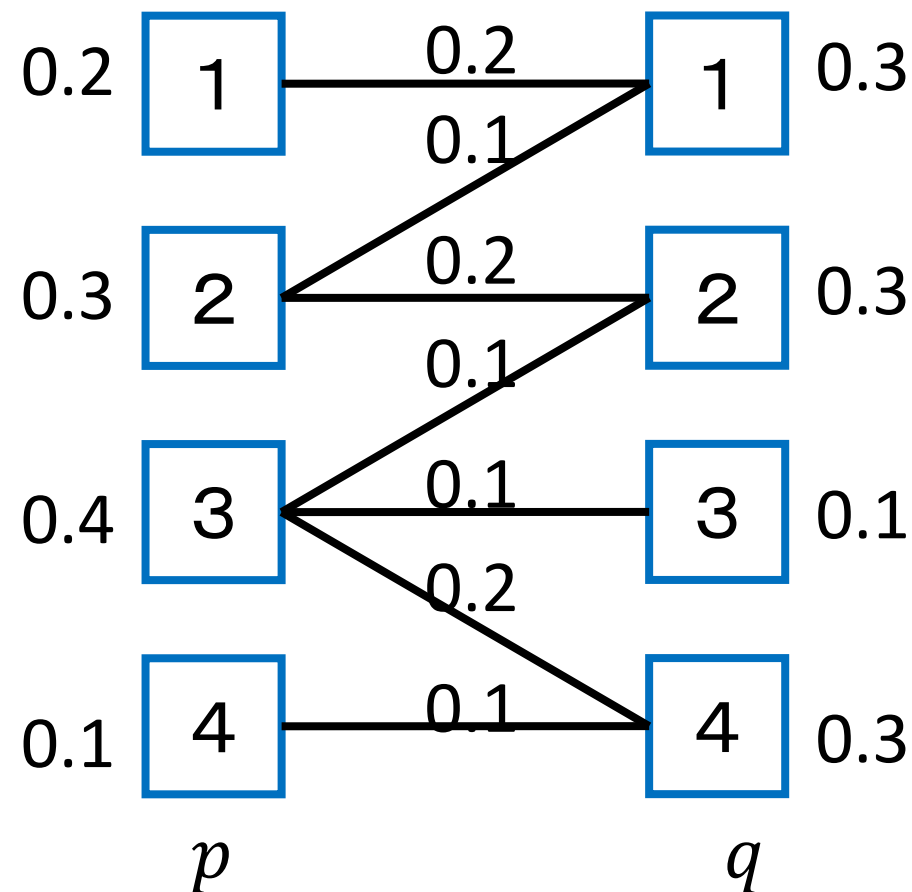
$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_{ij} y_{ij} \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^h y_{ij} = x_{pi} \quad (\forall i), \\ & \sum_{i=1}^h y_{ij} = x_{qj} \quad (\forall j), \\ & y_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i, j)). \end{array}$$



Hitchcock 型輸送問題の許容解

北西隅の規則によって得られる許容解に等しい！

$p \setminus q$	0.3	0.3	0.1	0.3
0.2	0.2			
0.3	0.1	0.2		
0.4		0.1	0.1	0.2
0.1				0.1



北西隅の規則の特徴付け

入力: x_{pi} : 工場 i の供給量, x_{qj} : 需要地 j の需要量, $\sum_{i=1}^h x_{pi} = \sum_{j=1}^h x_{qj}$

c_{ij} : 工場 i から需要地 j への

単位当たりの輸送費用

問題: 最小費用の輸送を求める

y_{ij} : 工場 i から需要地 j への輸送量

$$\text{min. } \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^h y_{ij} = x_{pi} \quad (\forall i),$$

$$\sum_{i=1}^h y_{ij} = x_{qj} \quad (\forall j),$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i, j)).$$

定理: y が北西隅の規則で得られる解であることは, 下記の等式系の解であることと必要十分. また, 下記の等式系は唯一の解を持つ.

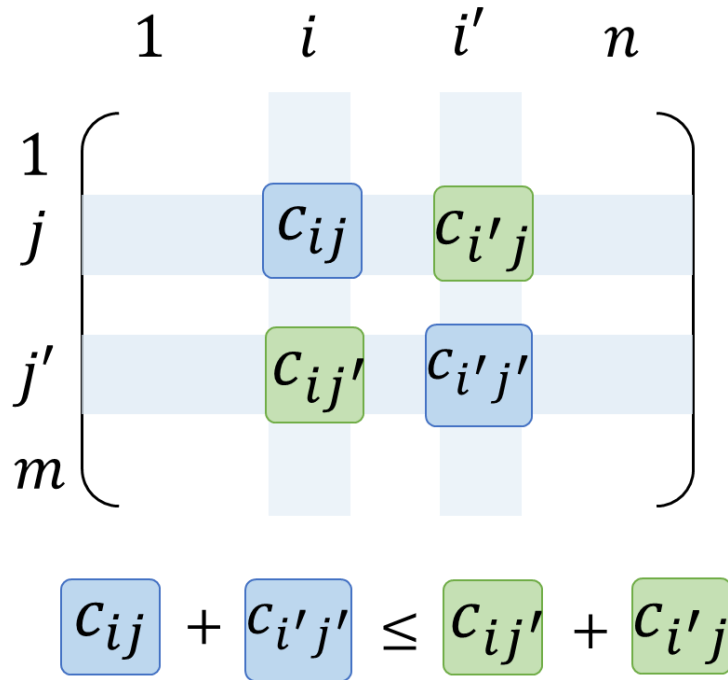
$$\forall (i', j') \in \{1, 2, \dots, h\}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} y_{ij}$$

$$= \min \left\{ \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^*, \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \right\}.$$

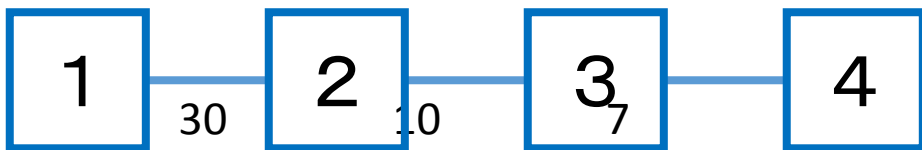
Monge (モンジュ) 行列

Monge 行列



補題：パス (V, E) と非負枝長さが与えられ，パスは $(1, 2, \dots, n)$ の順で頂点が並んでいるとする．このとき頂点 i, j 間のパスの長さを c_{ij} で表すならば，行列 $C = (c_{ij})$ はMonge 行列である．

定理 [Haffman 1963]：
費用行列が Monge行列となっている Hitchcock 型輸送問題は，北西隅の規則で得られた解が最適解となる．



道-星状のハブ-スポークネットワークデザイン問題

道の形状をした, ハイスピード情報路.

ハブ□: 情報路のアクセスポイント

非ハブ○: 個々の通信端末

ハブ-スポークネットワークデザイン問題:

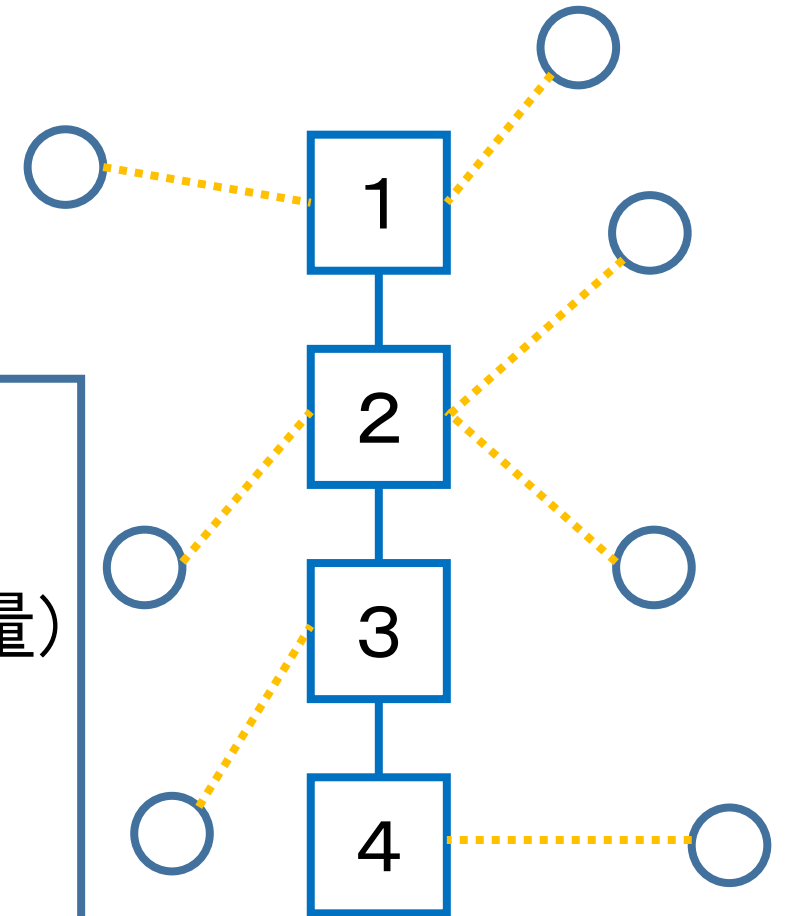
H : ハブの集合, N : 非ハブの集合

各非ハブをどれか一つのハブに接続

w_{pq} : 非ハブ p から非ハブ q への輸送量(通信量)

c_{ij} : (ハブまたは非ハブ) i, j 間の単位当たり
の輸送費用(通信費用)

目的: 総輸送費用最小化



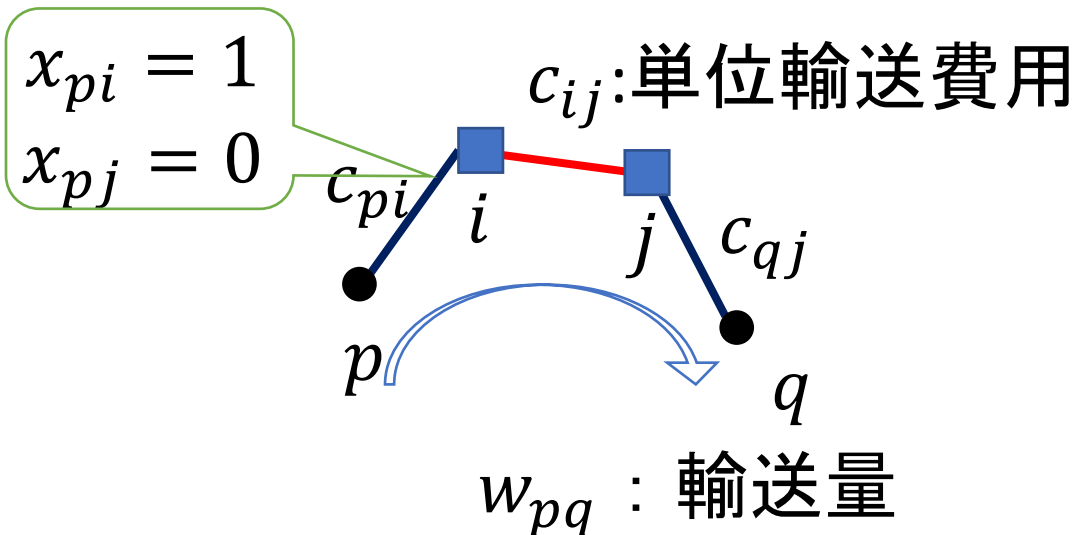
定式化

01変数: $x_{pi} = 1 \Leftrightarrow$ 非ハブ $p \in N$ をハブ $i \in H$ に接続

HSN:

$$\min. \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} x_{pi} x_{qj} \right)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N),$$
$$x_{pi} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,p) \in (H \times N)).$$



ハブ間の輸送費用:

$$w_{pq} c_{ij} x_{pi} x_{qj}$$

非ハブ-ハブ間の輸送費用:

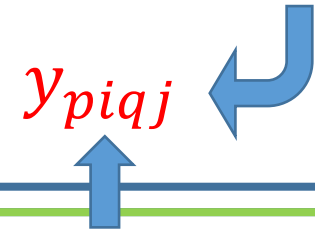
$$w_{pq} (c_{pi} x_{pi} + c_{qj} x_{qj})$$

定式化

01変数: $x_{pi} = 1 \Leftrightarrow$ 非ハブ $p \in N$ をハブ $i \in H$ に接続

HSN:

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} x_{pi} x_{qj} \right) \\ \text{s. t.} & \sum_{i \in H} x_{pi} = 1 \quad (\forall p \in N), \\ & x_{pi} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,p) \in (H \times N)). \end{aligned}$$



HSNL:

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj} \right) \\ \text{s. t.} & \sum_{i \in H} y_{piqj} = x_{qj} \quad (\forall (p,q) \in N^2, \forall i \in H, p < q), \\ & \sum_{j \in H} y_{piqj} = x_{pi} \quad (\forall (p,q) \in N^2, \forall j \in H, p < q), \\ & x_{pi} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,p) \in (H \times N)), \\ & y_{piqj} \in \{0,1\} \quad (\forall (p,q) \in N^2, \forall i \in H^2, p < q). \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in H} x_{pi} x_{qj} = 1 \cdot x_{qj}$$

緩和問題

01変数: $x_{pi} = 1 \Leftrightarrow$ 非ハブ $p \in N$ をハブ $i \in H$ に接続

HSNL-R:

$$\min. \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj} \right)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in H} y_{piqj} = x_{qj} \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H, p < q),$$

$$\sum_{j \in H} y_{piqj} = x_{pi} \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall j \in H, p < q),$$

$$0 \leq x_{pi} \leq 1 \quad (\forall (i, p) \in (H \times N)),$$

$$0 \leq y_{piqj} \leq 1 \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H^2, p < q).$$

定理: HSNL-Rは, ハブがパス状ならば, 01最適解を持つ.

緩和問題の最適解

01変数: $x_{pi} = 1 \Leftrightarrow$ 非ハブ $p \in N$ をハブ $i \in H$ に接続

HSNL-R:

$$\min. \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj} \right)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in H} y_{piqj} = x_{qj}^* \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H, p < q),$$

$$\sum_{j \in H} y_{piqj} = x_{pi}^* \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall j \in H, p < q),$$

$$0 \leq x_{pi} \leq 1 \quad (\forall (i, p) \in (H \times N)),$$

$$0 \leq y_{piqj} \leq 1 \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H^2, p < q).$$

(x^*, y^*) : HSNL-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると, Hitchcock型輸送問題に分解される→次頁

Hitchcock 型輸送問題

(x^*, y^*) : HSNL-Rの最適解

変数 x を x^* に固定すると,

Hitchcock型輸送問題に分解される.

$$\min. \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj}$$

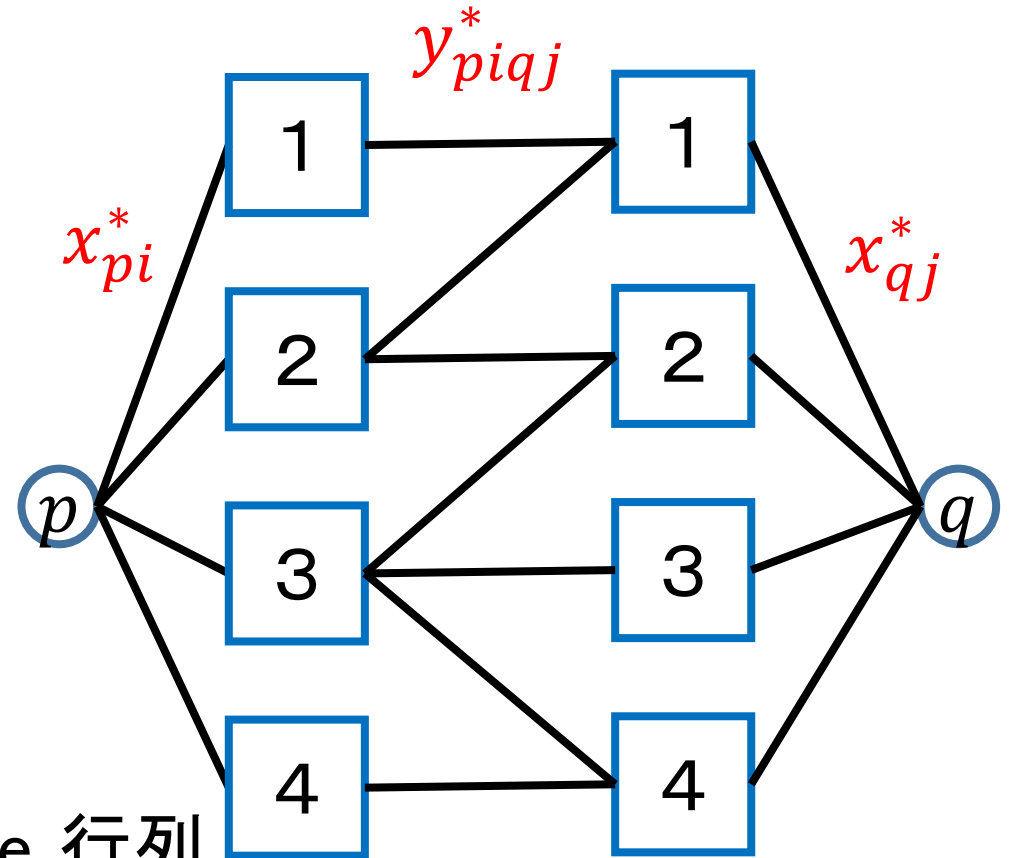
$$\text{s. t. } \sum_{i \in H} y_{piqj} = x_{qj}^* \quad (\forall j \in H),$$

$$\sum_{j \in H} y_{piqj} = x_{pi}^* \quad (\forall i \in H),$$

$$0 \leq y_{piqj} \leq 1 \quad (\forall i \in H^2).$$

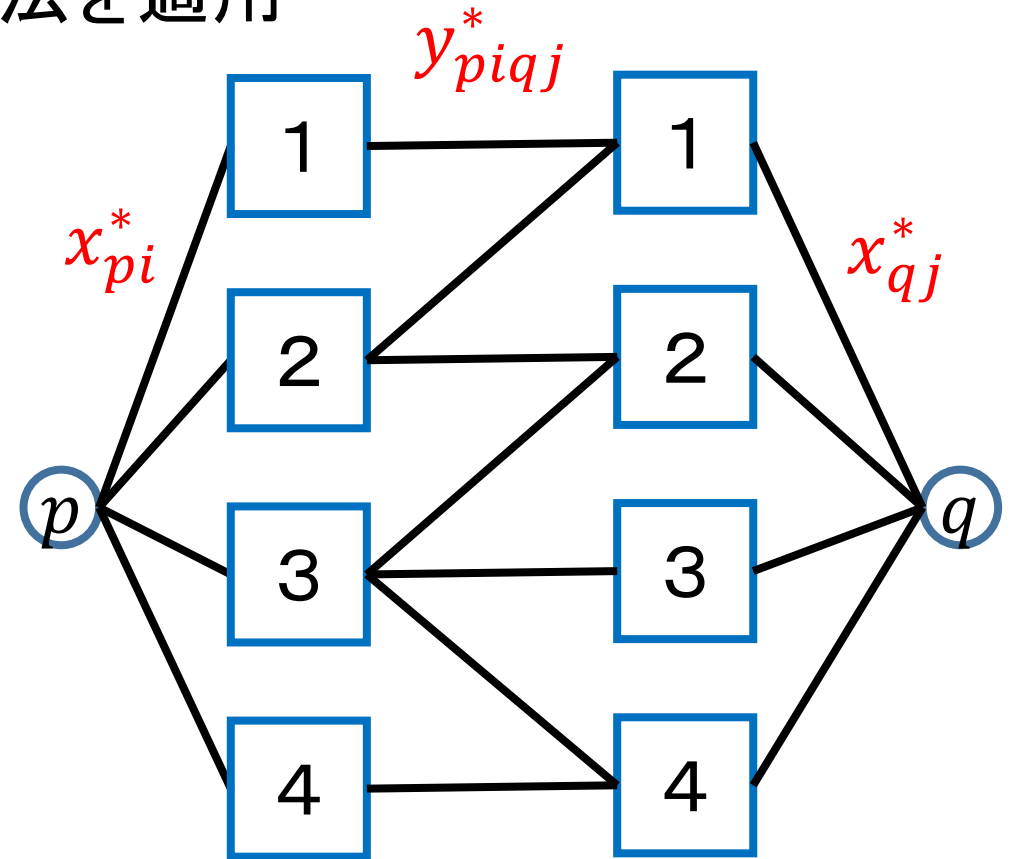
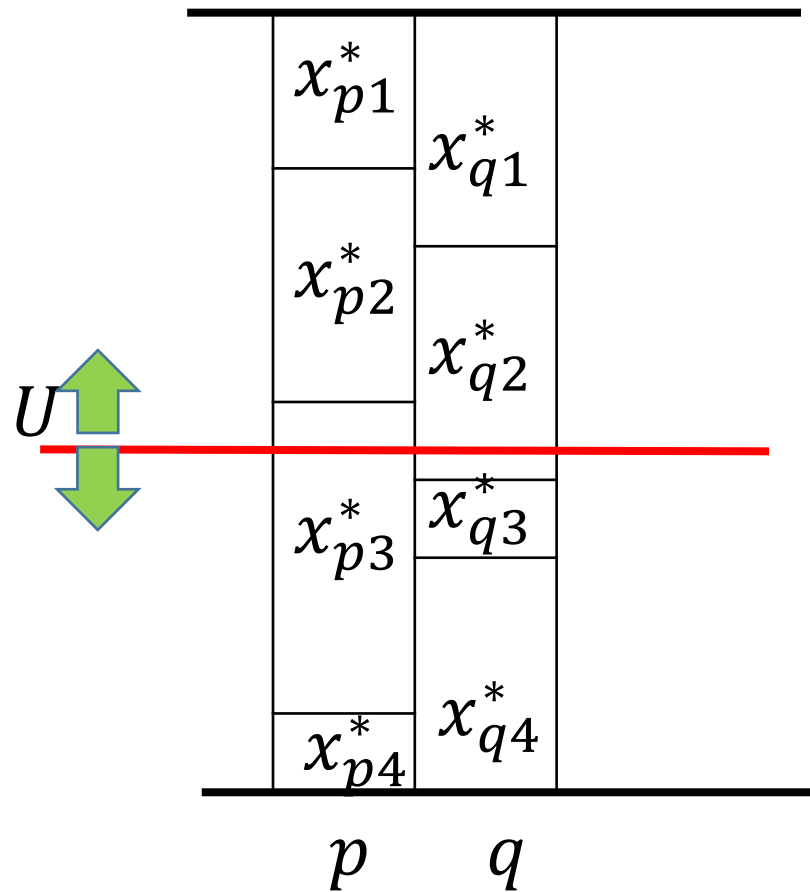
ハブがパス状なので, 費用行列はMonge 行列

最適解 y^* は北西隅の規則



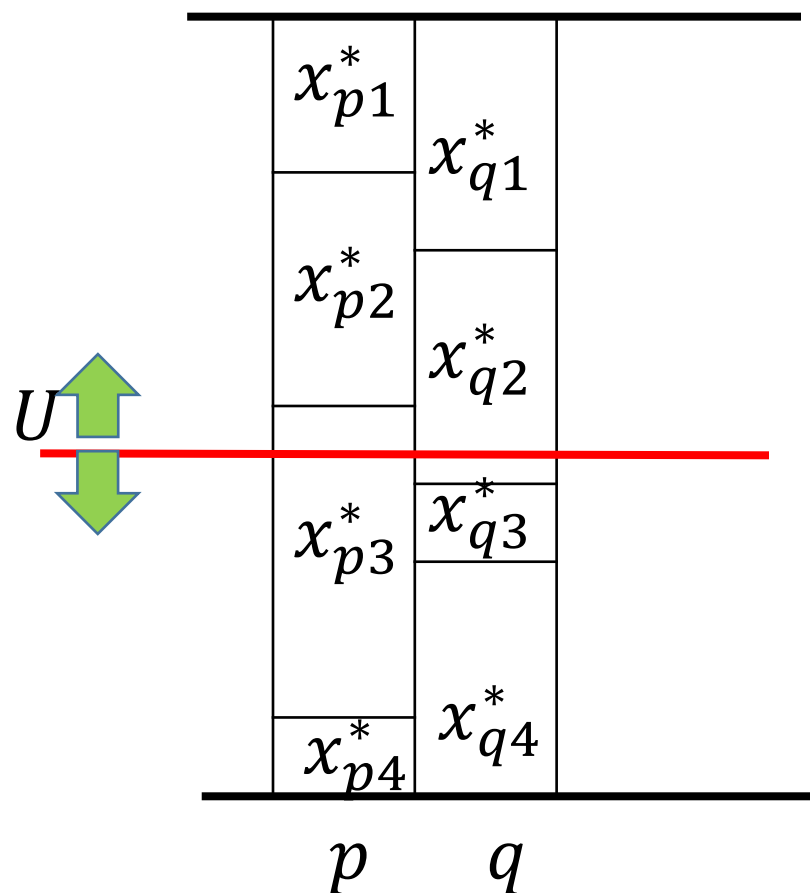
従属丸め法

(x^*, y^*) : HSNL-Rの最適解に従属丸め法を適用



期待値の算定

(x^*, y^*) : HSNL-Rの最適解に従属丸め法を適用



$$X_{pi} = \begin{cases} 1 & (U \text{ の線が横切ったら}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$$\text{明らかに } E[X_{pi}] = x_{pi}^*$$

$$E[X_{pi}X_{qj}] = \Pr[X_{pi} = 1 \text{ かつ } X_{qj} = 1]$$

$$\forall (i', j') \in \{1, 2, \dots, h\}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} E[X_{pi}X_{qj}]$$

$$= E \left[\begin{array}{l} X_{p1} + \dots + X_{pi'} = 1 \text{ かつ} \\ X_{q1} + \dots + X_{qj'} = 1 \end{array} \right]$$

期待値の算定

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$: HSNL-Rの最適解に従属丸め法を適用

$$X_{pi} = \begin{cases} 1 & (U \text{の線が横切ったら}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$$\text{明らかに } E[X_{pi}] = x_{pi}^*$$

$$E[X_{pi}X_{qj}] = \Pr \left[\begin{array}{l} X_{pi} = 1 \text{ かつ} \\ X_{qj} = 1 \end{array} \right]$$

$$\forall (i', j') \in \{1, 2, \dots, h\}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} E[X_{pi}X_{qj}]$$

$$= E \left[\begin{array}{l} X_{p1} + \dots + X_{pi'} = 1 \text{ かつ} \\ X_{q1} + \dots + X_{qj'} = 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \Pr \left[\begin{array}{l} \Lambda < \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^* \text{ かつ} \\ \Lambda < \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \end{array} \right] \\ &= \Pr \left[\Lambda < \min \left\{ \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^*, \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \right\} \right] \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^*, \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \right\} \end{aligned}$$

期待値の算定

(x^*, y^*) : HSNL-Rの最適解に従属丸め法を適用

$$X_{pi} = \begin{cases} 1 & (U \text{の線が横切ったら}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$$\text{明らかに } E[X_{pi}] = x_{pi}^*$$

$$E[X_{pi}X_{qj}] = \Pr \left[\begin{array}{l} X_{pi} = 1 \text{ かつ} \\ X_{qj} = 1 \end{array} \right]$$

$$\forall (i', j') \in \{1, 2, \dots, h\}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} E[X_{pi}X_{qj}]$$

$$= \min \left\{ \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^*, \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \right\}$$

定理： y が北西隅の規則で得られる解であることは、下記の等式系の解であることと必要十分。また、下記の等式系は唯一の解を持つ。

$$\forall (i', j') \in \{1, 2, \dots, h\}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{i'} \sum_{j=1}^{j'} y_{ij}$$

$$= \min \left\{ \sum_{i=1}^{i'} x_{pi}^*, \sum_{j=1}^{j'} x_{qj}^* \right\}.$$

上記定理より $E[X_{pi}X_{qj}] = y_{piqj}^*$

期待値の算定

X_{pi} : HSNL-Rの最適解に従属丸め法を適用して得られる解

明らかに $E[X_{pi}] = x_{pi}^*$, **定理より** $E[X_{pi}X_{qj}] = y_{piqj}^*$

Z : 従属丸め法で得られる解の目的関数値(確率変数)

$$\begin{aligned} E[Z] &= E \left[\sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} X_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} X_{qj} \right) + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} X_{pi} X_{qj} \right] \\ &= \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} E[X_{pi}] + \sum_{j \in H} c_{qj} E[X_{qj}] + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} E[X_{pi} X_{qj}] \right) \\ &= \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi}^* + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj}^* + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj}^* \right) = \text{HSNL-Rの最適値} \\ &\leq \text{HSNLの最適値} = \text{HSNの最適値} \end{aligned}$$

緩和問題

01変数: $x_{pi} = 1 \Leftrightarrow$ 非ハブ $p \in N$ をハブ $i \in H$ に接続

HSNL-R:

$$\min. \sum_{(p,q) \in N^2} w_{pq} \left(\sum_{i \in H} c_{pi} x_{pi} + \sum_{j \in H} c_{qj} x_{qj} + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj} \right)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in H} y_{piqj} = x_{qj} \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H, p < q),$$

$$\sum_{j \in H} y_{piqj} = x_{pi} \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall j \in H, p < q),$$

$$0 \leq x_{pi} \leq 1 \quad (\forall (i, p) \in (H \times N)),$$

$$0 \leq y_{piqj} \leq 1 \quad (\forall (p, q) \in N^2, \forall i \in H^2, p < q).$$

定理: HSNL-Rは, ハブがパス状ならば, 01最適解を持つ.

演習問題

入力: ブール変数 U , クローズ集合 Γ (各クローズはリテラルを丁度3個含む),
非負整数のクローズ重み $w: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_+$

下記の問題を01整数計画に定式化し, 丸め法を用いた近似解法を構築し, その近似比率を算定しなさい.

$$\text{P1: min. } \sum_{\{b,b',b''\}=C \in \Gamma} w(C) (x(b) + x(b') + x(b''))^2$$
$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U).$$

$$\text{P2: min. } \sum_{\{b,b',b''\}=C \in \Gamma} w(C) \min\{2, x(b) + x(b') + x(b'')\}$$
$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U).$$

$$\text{P3: max. } \sum_{\{b,b',b''\}=C \in \Gamma} w(C) \min\{2, x(b) + x(b') + x(b'')\}$$
$$\text{s. t. } x(a) + x(\neg a) = 1 \quad (\forall a \in U).$$

演習問題(追補)

- (1) MIN 2SAT に対する1.5 近似解法を, MAX 2SAT用に改訂すると, どのような解法となるか?
- (2) MIN SATに対する2近似解法を, MAX SAT用に改訂すると, どのような解法となるか?
- (3) MIN 2SATに対する1.5近似解法を脱乱択化しなさい.
- (4) 最大化問題に対する α -近似解法Aがあるとする. 任意の (ε, δ) ただし $0 < (\varepsilon, \delta) < 1$ に対し, 整数 L を $(\alpha\varepsilon)^{-1} \ln \delta$ の切り上げとする. 解法Aを与えられた問題例に対し L 回実行して得られる解の目的関数を $Z_1, Z_2, \dots, Z_L$ とすると,

$$\Pr[\max\{Z_1, Z_2, \dots, Z_L\} \geq (1 - \varepsilon)\alpha z^*] \geq 1 - \delta$$

となることを示しなさい, ただし z^* は与えられた問題例の最適値である.

丸め技法の選択

特定の変数対が同時に1にならない方が良い

MAX 2SAT, MAX SAT, FF, スケジューリング問題

→独立丸め法

特定の変数対が同時に1になった方が良い

MIN 2SAT, MIN SAT, ハブ-スポークネットワーク設計問題

→従属丸め法

もちろん, 従属丸め法には, まだいろいろな物がある!

おしまい

参考文献

Bertsimas, Dimitris, Chungpiaw Teo, and Rakesh Vohra. "On dependent randomized rounding algorithms." *Operations Research Letters* 24.3 (1999): 105–114.

Cai, Leizhen, Elad Verbin, and Lin Yang. "Firefighting on trees: $(1 - 1/e)$ -approximation, fixed parameter tractability and a subexponential algorithm." *International Symposium on Algorithms and Computation*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

Charnes, Abraham, and William W. Cooper. "The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation problems." *Management Science* 1.1 (1954): 49–69.

Goemans, Michel X., and David P. Williamson. "New 3/4-approximation algorithms for the maximum satisfiability problem." *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7.4 (1994): 656–666.

Hartnell, Bert, and Qiyan Li. "Firefighting on trees: How bad is the greedy algorithm?." *Congressus Numerantium* (2000): 187–192.

Iwasa, Masaru, Hiroo Saito, and Tomomi Matsui. "Approximation algorithms for the single allocation problem in hub-and-spoke networks and related metric labeling problems." *Discrete Applied Mathematics* 157.9 (2009): 2078–2088.

Kuroki, Yukoi and Tomomi Matsui, "Approximation algorithm for cycle-star hub network design problem." in preparation.

Skutella, Martin. "Semidefinite relaxations for parallel machine scheduling." *Foundations of Computer Science*, 1998. Proceedings. 39th Annual Symposium on. IEEE, 1998.