

SoS 緩和による証明のアルゴリズム化: 演習

吉田 悠一

国立情報学研究所

August 1, 2016

SoS アルゴリズムが制約 $\mathcal{E} = \{p_1 = \dots = p_m = 0\}$ に対して出力するのは、以下を満たす双線型写像 $M: \mathbb{R}_{\ell/2}^n \times \mathbb{R}_{\ell/2}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

正規性 $M(1, 1) = 1$

対称性 もし $p, q, r, s \in R_{\ell/2}^n$ が $pq = rs$ を満たすならば
 $M(p, q) = M(r, s)$.

非負性 任意の $p \in R_{\ell/2}^n$ に対して $M(p, p) \geq 0$.

実行可能性 任意の $i \in [m]$, $p \in R_{\ell/2-d}^n$, $q \in R_{\ell/2}^n$ に対して
 $M(p_i p, q) = 0$.

演習 1

対称性と実行可能性が任意の単項式で成り立てば、任意の多項式でも成り立つことを示せ。

演習 2

以下が成り立つ .

$$x^4 \leq 1 \vdash_4 x^2 \leq 1$$

演習 3

任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して ,

$$x^4 \geq 1 \not\vdash_\ell x^2 \geq 1.$$

演習 4

$$\vdash_2 2xy \leq x^2 + y^2.$$

演習 5

- $y, y': \mathbf{E} y^2 = \mathbf{E}(y')^2 = 1, \mathbf{E}(y - y')^2 \geq 4(1 - \delta)$ を満たすガウシアン .

$$\Rightarrow \Pr[\text{sign}(y) = \text{sign}(y')] = O(\sqrt{\delta}).$$

ヒント: $\arccos(-1 + \delta) = \pi - \sqrt{2\delta} + O(\delta^{3/2})$ を使う .

演習 6

もしサンプリング補題が次数 6 の多項式についても成り立てば , $P=NP$ となることを示せ .

Theorem 1 (Positivstellensatz [?, ?])

任意の充足不可能な $\mathcal{E}$ は, ある $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して, ℓ 次の SoS 反駁を持つ.

演習 7

$x_i^2 = x_i$ ($i \in [n]$) が $\mathcal{E}$ に入っている場合に *Positivstellensatz* を証明せよ.

演習 8

$x^2 = y^2 = z^2 = 1$ を満たす 4 次の疑似分布 $\{x\}$ について以下が成り立つ .

$$\tilde{\mathbf{E}}(x - z)^2 \leq \tilde{\mathbf{E}}(x - y)^2 + \tilde{\mathbf{E}}(y - z)^2.$$

演習 9

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ を ϵn 疎ベクトルとする . 以下が成り立つ .

$$\|\mathbf{v}\|_q \geq (\epsilon n)^{1/q-1/p} \|\mathbf{v}\|_p.$$



J L Krivine.

Anneaux préordonnés.

Journal d'Analyse Mathématique, 12(1):307–326, 1964.



Gilbert Stengle.

A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry.

Mathematische Annalen, 207(2):87–97, 1974.