

SoS 緩和による証明のアルゴリズム化

吉田 悠一

国立情報学研究所

August 1, 2016

① イントロダクション

② 最大カット

③ 植込疎ベクトル

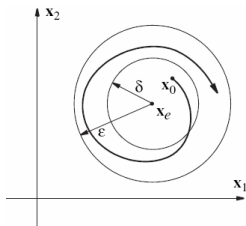
④ その他の話題

⑤ まとめ

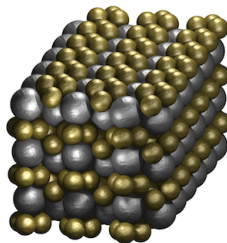
Sum of Squares (SoS) 緩和

SoS 緩和 多項式計画に対する緩和解法

応用 システムと制御・力学系の解析・行列の共正値性・
信号処理・オプション価格の決定・量子情報理論・
ゲーム理論など



(a) リアプノフ安定性



(b) 球の埋め込み

 from wikipedia

Sum of Squares (SoS) 緩和

ここ数年 SoS 緩和が理論計算機科学で盛り上がっている。

- Unique Games に対する準指数時間アルゴリズム
- 平均計算量の解析（例：ランダム CSP，植込クリーク）
- 疎な解の発見（圧縮センシング，テンソル分解，辞書学習）
- SoS に対する新しい理解（計算論的ベイズ推論？）。

本講義では，SoS 緩和の最近の発展の一部を解説する。

多項式計画問題

連立代数方程式 (多項式 $= 0$ の集合)

$$\mathcal{E} = \{p_1(\mathbf{x}) = \cdots = p_m(\mathbf{x}) = 0\}$$

に対して, 全制約を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在するか判定せよ.

注: 不等式制約 $q(\mathbf{x}) \geq 0$ も, 等式制約 $q(\mathbf{x}) - y^2 = 0$ で表現可能.

注: 最適化問題も二分探索により充足性判定に帰着できる (本講演では精度の問題は無視).

多項式計画問題の例

線形計画 : 全ての p_i が線形関数. 多項式時間で解ける.

最小二乗法 : $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ が与えられる.
 $\min_{a \in \mathbb{R}^d} \sum_{i \in [n]} (y_i - \langle a, x_i \rangle)^2$ を求めよ.

最大固有値 : $\max_{\|x\|_2=1} \langle x, Ax \rangle$ を求めよ.

3SAT : $(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee x_k)$ の形をした制約が多数与えられる. 出来るだけ多くの制約を満たす $x \in \{0, 1\}^n$ を求めよ.

$$x_i \in \{0, 1\} \Leftrightarrow x_i^2 = x_i,$$

$$(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee x_k) = (\overline{x_i \wedge x_j \wedge \bar{x}_k}) = 1 \Leftrightarrow x_i x_j (1 - x_k) = 0.$$

k-Clique : $x_i^2 = x_i$, $\sum_i x_i = k$, $x_i x_j = 0$ if $(i, j) \notin E$.

多項式計画問題は一般に NP 困難.

Sum of Squares (SoS) アルゴリズム

多項式 p が **SoS** ($p \succeq 0$): 或る多項式 $\{q_i\}$ で $p = \sum_i q_i^2$ と書ける.

SoS アルゴリズム (informal)

偶数 $\ell \geq 2d$ と n 変数上の連立 d 次代数方程式 $\mathcal{E}$ に対して, **ℓ 次 SoS アルゴリズム** は $n^{O(\ell)}$ 時間で以下のどちらかを出力:

Yes: 解上の「 ℓ 次の疑似分布」

No: 解が存在しないことの「 ℓ 次の SoS 証明」

多項式計画に対する緩和解法.

以下 ℓ 次の SoS アルゴリズムを SoS_ℓ と書く.

SoS_ℓ の出力: Yes の場合

$\mathbb{R}_d^n$: 次数 d 以下の n 変数多項式の集合.

SoS_ℓ の出力: Yes の場合

$\mathcal{E} = \{p_1 = \cdots = p_m = 0\}$: 連立 d 次方程式

Yes の場合, SoS_ℓ は以下を満たす線形写像 $L: \mathbb{R}_\ell^n \rightarrow \mathbb{R}$ を出力.

正規性 $L(1) = 1$.

非負性 任意の SoS $p \in \mathbb{R}_\ell^n$ に対して $L(p) \geq 0$.

実行可能性 任意の $i \in [m]$, $p \in \mathbb{R}_{\ell-d}^n$ に対して $L(p_i p) = 0$.

線形写像 L の解釈: 疑似分布

$\mathcal{E}$ を満たす解上の分布 μ は以下を満たす.

正規性 $\mathbb{E}_{x \sim \mu}[1] = 1$.

非負性 任意の SoS $p \in \mathbb{R}_n^n$ に対して $\mathbb{E}_{x \sim \mu}[p(x)] \geq 0$.

実行可能性 任意の $i \in [m]$, $p \in \mathbb{R}_{n-d}^n$ に対して $\mathbb{E}_{x \sim \mu}[p_i p] = 0$.

線形写像 L は作用素 E を弱めたものとみなすことが出来る.

$\Rightarrow L$ を **疑似分布作用素** と呼び, $\tilde{E}$ と書く.

x に対する同時分布は存在しないが, 低次の多項式 $p \in \mathbb{R}_\ell^n$ に対して $\tilde{E} p(x)$ は計算できる.

線形写像 L の実体

実際に SoS_ℓ が出力するのは、以下を満たす双線型写像

$$M : \mathbb{R}_{\ell/2}^n \times \mathbb{R}_{\ell/2}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

正規性 $M(1, 1) = 1$ (左辺の 1 は $p(x) = 1$ という多項式).

対称性 もし $p, q, r, s \in R_{\ell/2}^n$ が $pq = rs$ を満たすならば
 $M(p, q) = M(r, s)$.

非負性 任意の $p \in R_{\ell/2}^n$ に対して $M(p, p) \geq 0$.

実行可能性 任意の $i \in [m]$, $p \in R_{\ell/2-d}^n$, $q \in R_{\ell/2}^n$ に対して
 $M(p_i p, q) = 0$.

M から L への変換

多項式 $p \in \mathbb{R}_\ell^n$ に対して, $p = \sum_i \alpha_i q_i$ と単項式に分解し, 更に単項式 $q'_i, q''_i \in \mathbb{R}_{\ell/2}^n$ を用いて, $q_i = q'_i q''_i$ と分解する.

対称性より

$$\sum \alpha_i M(q'_i, q''_i).$$

は一意に定まるので, $L(p)$ をこの値で定義.

L の正規性, 非負性, 実行可能性は簡単に確認できる.

双線型写像 M の存在性

補題

ε が解を持つならば、条件を満たす M が存在する。

証明.

$x^* \in \mathbb{R}^n$ を解とする。 $M(p, q) = p(x^*)q(x^*)$ とおけば、 M は全ての制約を満たす。 □

双線型写像 M の計算

条件を満たす M は多項式時間で計算できるか？

演習

対称性と実行可能性が任意の単項式で成り立てば、任意の多項式でも成り立つことを示せ．

単項式 $p, q \in \mathbb{R}_{\ell/2}^n$ に対して

$$A_{pq} = M(p, q)$$

なる行列 A を考える．

対称性と実行可能性 $\Rightarrow A$ に対する線形制約

双線型写像 M の計算

補題

M が非負性を満たす $\Leftrightarrow A$ が半正定値.

証明.

($\Leftarrow$) 多項式 $p \in \mathbb{R}_{\ell/2}^n$ は単項式 $\{q_i\}$ を使い $p = \sum_i \alpha_i q_i$ と分解できる. この時,

$$M(p, p) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j M(q_i, q_j) = \langle \alpha, A\alpha \rangle \geq 0.$$

逆も同様. □

M は幾つかの線形制約を満たす半正定値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n^{\ell/2} \times n^{\ell/2}}$ として表現できる $\Rightarrow$ SDP により $n^{O(\ell)}$ 時間で求まる.

SoS_ℓ の出力: No の場合

- 疑似分布は SDP を解くことで得られるので，No の場合は ε が満たせない証拠を分離平面として得ることが出来る．
- この分離平面は， ε に対する SoS 推論による反駁とみなすことが出来る．

SoS 推論

定義 (SoS 推論)

p を多項式, $\mathcal{E} = \{q_1 \geq 0, \dots, q_m \geq 0\} \cup \{r_1 = \dots = r_{m'} = 0\}$ とする.

この時 $p \geq 0$ に対する ℓ 次の SoS 証明があるとは, ある SoS $u_0, \dots, u_m$ と多項式 $v_1, \dots, v_{m'}$ が存在して,

$$p = u_0 + \sum_{i=1}^m u_i q_i + \sum_{j=1}^{m'} v_j r_j,$$

with $\deg(u_0), \deg(u_i q_i), \deg(v_j r_j) \leq \ell \ \forall i \in [m], j \in [m']$.

と書けることを指す. また, これを $\mathcal{E} \vdash_{\ell} p \geq 0$ と書く.

SoS 推論

SoS 証明は動的な証明系として使うことも出来る.

命題

$$\frac{\mathcal{E} \vdash_{\ell} p \geq 0 \quad \mathcal{E}' \vdash_{\ell'} p' \geq 0}{\mathcal{E}, \mathcal{E}' \vdash_{\max\{\ell, \ell'\}} p + p' \geq 0}$$

命題

$\mathcal{E} = \{q_1 \geq 0, \dots, q_m \geq 0\}, \mathcal{E}' = \{q'_1 \geq 0, \dots, q'_{m'} \geq 0\}$ の時,

$$\frac{\mathcal{E} \vdash_{\ell} p \geq 0 \quad \mathcal{E}' \vdash_{\ell'} p' \geq 0}{\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}' \vdash_{\ell + \ell'} pp' \geq 0}$$

ただし $\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}' = \{q_i q'_j \geq 0 \mid i \in [m], j \in [m']\}$.

SoS 推論の例

演習

以下が成り立つ.

$$x^4 \leq 1 \vdash_4 x^2 \leq 1$$

SoS 推論の例

演習

任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して,

$$x^4 \geq 1 \not\vdash_{\ell} x^2 \geq 1.$$

演習

$$\vdash_2 2xy \leq x^2 + y^2.$$

Positivstellensatz

もし $\mathcal{E}$ が充足不可能な時、その証明は SoS 証明により得られる？

定義

$\mathcal{E} \vdash -1 \geq 0$ の時、 $\mathcal{E}$ は SoS 反駁を持つという。

定理 (Positivstellensatz [Kri64, Ste74, Sch91, PV99])

(緩い仮定のもとで) 任意の充足不可能な $\mathcal{E}$ は、ある $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して、 ℓ 次の SoS 反駁を持つ。

緩い仮定 (の例) : ある $M \in \mathbb{R}_+$ に対して $\|x\|_2^2 \leq M$.

注: Nullstellensatz は $\mathbb{C}^n$ 上の話. よって不等式は出てこない.

双対性

定理

(緩い仮定のもとで) d 次連立代数方程式 $\mathcal{E} = \{p_1 = \dots = p_m = 0\}$ は、以下のどちらか一方を満たす。

- (i) $\mathcal{E}$ を満たす ℓ 次の疑似分布が存在する。
- (ii) $\mathcal{E}$ に対する ℓ 次の SoS 反駁を持つ。

注: 不等式も扱えるが省略。

双対性

(ii) $\Rightarrow$ not (i).

仮定より或る SoS $q_0 \in \mathbb{R}_\ell^n$ と $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}_{\ell-d}^n$ が存在し
 $-1 = q_0 + \sum_i q_i p_i$ を満たす。

任意の疑似分布が ε を満たさないことを示す。実際

$$\tilde{\mathbb{E}} \sum_i q_i p_i = -\tilde{\mathbb{E}} 1 - \tilde{\mathbb{E}} q_0 \leq -1$$

であり、これは或る $i \in [m]$ に対して $\tilde{\mathbb{E}} q_i p_i \neq 0$ を意味する。 $\square$

双対性

not (ii) $\Rightarrow$ (i).

C を SoS $q_0 \in \mathbb{R}_\ell^n$ と $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}_{\ell-d}^n$ に対して $q_0 + \sum_i q_i p_i$ の形をした多項式のなす錐とする。

$\mathcal{E}$ は ℓ 次 SoS 反駁を持たないので、 -1 はこの錐に入っていない (また境界にも無いと示せる)。

分離超平面の存在より、ある線形演算子 L が存在し、 $L(-1) < 0$ かつ任意の $p \in C$ に対して $L(p) \geq 0$ 。

また正規化により $L(1) = 1$ と仮定してよい。これは $\mathcal{E}$ を満たす疑似分布演算子。 $\square$

注: これは $\mathcal{E} \vdash_\ell p \geq 0$ であれば、 $\tilde{\mathcal{E}} p \geq 0$ を示唆している。

SoS アルゴリズム

定理

(緩い仮定のもとで) d 次の連立代数方程式 $\mathcal{E}$ に対して,
 SoS_ℓ ($\ell \geq 2d$) は $n^{O(\ell)}$ 時間で以下のどちらかを出力する.

- $\mathcal{E}$ を満たす ℓ 次の疑似分布,
- $\mathcal{E}$ に対する ℓ 次の SoS 反駁.

疑似分布に対するコメント

疑似分布

- 幾つかの線形制約を満たす半正定値行列
- 低次のモーメントのみが定義されている分布
- 統計的機械学習では知識を分布として表すことが多い。
 - Y というデータのもとでの X という未知の値に対する知識を $\Pr[X \mid Y]$ と表現.
- 理論計算機科学の典型的な問題では Y を与えたら X は完全に決まるが、 $\tilde{E}$ は計算能力を考慮しながら X に対する知識を表現している.

SoS 証明系に対するコメント

次数制限のない SoS 証明

$\mathbb{R}^n$ 上の多項式に関する任意の事実を証明できる健全かつ完全な証明系.

ℓ 次の SoS 証明

- 分布に対する健全だが完全でない証明系.
- ℓ 次の疑似分布に関しては健全かつ完全な証明系.
- SDP により自動的に証明を発見することが出来る.

SoS アルゴリズムの解析の方針

- 本当の分布が得られたと思って、その性能解析を SoS 証明系で行う．
- その証明は自動的に SoS アルゴリズムの性能解析になる（**証明のアルゴリズム化**）．
- 確率的手法とは相性が悪い（Chernoff bound + union bound など），

歴史

- Minkowski and Hilbert (19 世紀): 任意の非負多項式は多項式の SoS で表現できるか？
 - (非構成的に) 否.
 - Motzkin [Mot67]: $M(x, y) := 1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2$ は非負だが SoS ではない.
- Hilbert's 17th problem (1900): 任意の非負多項式は, SoS/SoS で表現できるか？
 - $M(x, y) = \frac{x^2y^2(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-2)^2+(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$
 - Artin [Art27]: Yes
- Krivine [Kri64] and Stengle [Ste74]: 任意の充足不能な連立代数方程式は SoS 反駁を持つ (Positivstellensatz).
- Parillo [Par03] and Lasserre [Las01]: SoS アルゴリズム

① イントロダクション

② **最大カット**

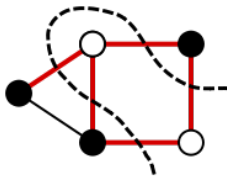
③ 植込疎ベクトル

④ その他の話題

⑤ まとめ

最大カット問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$
- 頂点集合 $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$
- (正規化された) **カットサイズ** $\text{cut}(S) := |E(S, V \setminus S)|$.



最大カット問題

グラフ G に対して $\text{maxcut}(G) := \max_S \text{cut}(S)$ を求めよ.

既知の結果

- ランダム分割 S : $\mathbf{E}[\text{cut}(S)] = 1/2 \Rightarrow 1/2$ 近似.
 - $\alpha_{\text{GW}} \approx 0.878$ 近似. [GW95]
 - (*) $\text{maxcut}(G) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow \text{cut}(S) \geq 1 - O(\sqrt{\epsilon})$ を出力 [GW95]
 - Unique Games 予想の下で α_{GW} 近似はタイト [KKMO07, MOO10]
 - 多項式サイズの LP は $1/2$ 近似を破れない [CLR13]
 - 多項式サイズの SDP は α_{GW} 近似を破れない [LRS15]
- ここでは (*) の結果を SoS 的に見る.

ラプラシアン

- 以降グラフは n 頂点, d 正則を仮定 ($\Rightarrow |E| = dn/2$).
- **ラプラシアン** $L := dI - A$.

ベクトル $z \in \{-1, 1\}^V$ を頂点集合 $S \subseteq V$ の特性ベクトルとする ($z_u = 1 \Leftrightarrow u \in S$).

$$\begin{aligned}\langle z, Lz \rangle &= \langle z, (dI - A)z \rangle = d \sum_u z_i^2 - 2 \sum_{(i,j) \in E} z_i z_j \\ &= \sum_{(i,j) \in E} (z_i - z_j)^2 = 4E(S, \bar{S}) = 2dn \cdot \text{cut}(S).\end{aligned}$$

Goemans-Williamson のアルゴリズム

定理

2 次の疑似分布 $\{x\}$ が以下を満たすとする.

- $\tilde{\mathbb{E}} x_i^2 = 1 \ (i \in V)$
- $\tilde{\mathbb{E}} \langle x, Lx \rangle \geq 2dn(1 - \epsilon)$

以下を満たす $z \in \{-1, 1\}^V$ を多項式時間で計算可能.

- $\langle z, Lz \rangle \geq 2dn(1 - O(\sqrt{\epsilon}))$

[GW95] のアルゴリズム: $\text{maxcut}(G) \geq 1 - \epsilon$ なるグラフ G に対し, 制約 $\mathcal{E} = \{x_i^2 = 1 \ (i \in V), \langle x, Lx \rangle \geq 2dn(1 - \epsilon)\}$ のもとで 2 次の疑似分布を計算し, 上記定理を適用.

サンプリング補題

補題

$\{x\}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の次数 2 以上の疑似分布とする．或る $\mathbb{R}^n$ 上のガウス分布 $\{y\}$ が存在して，任意の次数 2 以下の多項式 P に対して，

$$\tilde{\mathbb{E}}_x P(x) = \mathbb{E}_y P(y)$$

が成り立つ．

サンプリング補題の証明

証明.

- $\tilde{\mathbf{E}} x_i = 0$ ($i \in [n]$) と仮定 (適宜平行移動).
- 二次モーメント行列 $M = \tilde{\mathbf{E}} x x^T$ は半正定値対称.

$\Rightarrow d \times n$ 行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ を用いて $M = B^T B$ と書ける.

- ガウシアン $g \sim N(0_d, I_d)$ に対して $y_i = \langle b_i, g \rangle$ とおく.

$\Rightarrow$ 各 $i, j \in [n]$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{E} y_i y_j &= \mathbf{E} \langle b_i, g \rangle \langle b_j, g \rangle = \mathbf{E} \sum_{a,b} b_i(a) g_a b_j(b) g_b \\ &= \sum_{a,b} b_i(a) b_j(b) \delta_{ab} = \langle b_i, b_j \rangle = M_{i,j} = \tilde{\mathbf{E}} x_i x_j. \quad \square \end{aligned}$$

仮定とサンプリング補題より

$$\mathbf{E}_y \sum_{(i,j) \in E} (y_i - y_j)^2 \geq 2dn(1 - \epsilon)$$

演習

- $y, y': \mathbf{E} y^2 = \mathbf{E} (y')^2 = 1, \mathbf{E} (y - y')^2 \geq 4(1 - \delta)$ を満たすガウシアン.

$$\Rightarrow \Pr[\text{sign}(y) = \text{sign}(y')] = O(\sqrt{\delta}).$$

$\Rightarrow$ ベクトル $z := \text{sign}(y)$ は $\langle z, Lz \rangle \geq 2dn(1 - O(\sqrt{\epsilon}))$ を満たす.

SoS₂ でよりよい解は得られる？

SoS₂ でよりよい解は得られる？ $\Rightarrow$ No.

命題

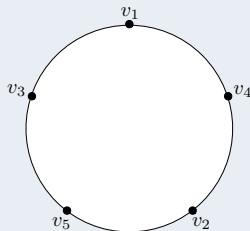
$n = 1/\sqrt{\epsilon}$ 頂点の奇閉路 G は以下を満たす．

- $\text{maxcut}(G) \leq 1 - \Omega(\sqrt{\epsilon})$
- $\mathbb{E} x_i^2 = 1$ ($i \in V$), $\mathbb{E} \langle \mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle \geq 2dn(1 - O(\epsilon))$ を満たす 2 次の疑似分布 $\{\mathbf{x}\}$ が存在

証明.

二部グラフではないので, $\text{maxcut}(G) \leq 1 - 1/n = 1 - \sqrt{\epsilon}$.

単位ベクトル $v_1, \dots, v_n$ を周上に $\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1 + \epsilon$ ($i \in [n]$) と
なるよう配置 ($v_{n+1} = v_1$ と同一視).



証明.

$\tilde{\mathbf{E}}$ の二次モーメント行列 M を $M_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ とおく.

$\tilde{\mathbf{E}} x_i^2 = M_{ii} = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \ (i \in [n])$.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} \langle \mathbf{x}, L\mathbf{x} \rangle &= \tilde{\mathbf{E}} \left(d \sum_i x_i^2 - 2 \sum_{(i,j) \in E} x_i x_j \right) \\ &= d \sum_i \|\mathbf{v}_i\|^2 - 2 \sum_{(i,j) \in E} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= dn - dn(-1 + \epsilon) \\ &= 2dn(1 - \epsilon/2).\end{aligned}$$



注：小さい奇閉路の直和を取ることで ϵ と n の依存は外せる.

高次の SoS でよりよい解は得られる？ $\Rightarrow$ 少なくとも奇閉路は SoS₄ で解ける

補題

$n = 1/\sqrt{\epsilon}$ 頂点の奇サイクルに対して、4 次の疑似分布 $\{x\}$ で以下を満たすものは存在しない。

- $x_i^2 = 1 \ (i \in [n])$
- $\tilde{\mathbb{E}} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 > 4(n-1) = 2d(n-1) = 2dn(1 - \sqrt{\epsilon})$.

真の分布に対する証明を SoS で焼き直し。

演習

$x_i^2 = 1$ ($i \in [n]$) を満たす 4 次の疑似分布 $\{x\}$ について以下が成り立つ．任意の $i, j, k \in [n]$ に対して

$$\tilde{\mathbf{E}}(x_i - x_k)^2 \leq \tilde{\mathbf{E}}(x_i - x_j)^2 + \tilde{\mathbf{E}}(x_j - x_k)^2. \quad (1)$$

補題の証明.

もし存在したとする.

$(a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - (a - b)^2$ より

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} \sum_{i \in [n]} (x_i + x_{i+1})^2 &= \tilde{\mathbf{E}} \sum_{i \in [n]} (2x_i^2 + 2x_{i+1}^2 - (x_i - x_{i+1})^2) \\ &< 4n - 4(n-1) = 4.\end{aligned}$$

(1) を $x_i, -x_{i+1}, x_{i+2}$ に適用して

$$\tilde{\mathbf{E}}(x_i - x_{i+2})^2 \leq \tilde{\mathbf{E}}(x_i + x_{i+1})^2 + \tilde{\mathbf{E}}(x_{i+1} + x_{i+2})^2.$$

証明 (続き) .

$(n-1)/2$ 回繰り返し、再び (1) を適用して

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x_1 - x_n)^2 &\leq \tilde{\mathbf{E}} \sum_{i=1,3,\dots,n-2} (x_i - x_{i+2})^2 \\ &\leq \tilde{\mathbf{E}} \sum_{i \in [n-1]} (x_i + x_{i+1})^2.\end{aligned}$$

以上の議論を $(x_1$ だけでなく) 全ての x_i について行い和をとると,

$$\tilde{\mathbf{E}} \sum_{i \in [n]} (x_i - x_{i+1})^2 \leq (n-1) \tilde{\mathbf{E}} \sum_{i \in [n]} (x_i + x_{i+1})^2 < 4(n-1). \quad \square$$

まとめ

- [GW95] を SoS_2 としてみた.
- $1 - \epsilon$ vs $1 - \sqrt{\epsilon}$ は 2 次の SoS ではタイト (奇閉路).
- SoS_4 は, 奇閉路に対してはよりよい近似保証.
 - 真の最適値の証明を SoS 証明に置き換える.
- 高次の SoS が SoS_2 に対する既知の Integrality gap instance に対してよい近似を与える例:
 - Unique Games [OZ13]
 - 頂点被覆 [KOTZ14]
 - 最大カット [OZ13, DMN13]
- 最大 CSP は $O(\frac{\log n}{\log \log n})$ 次 SoS でも SoS_2 の近似保証を超えられない. [LRS15]

① イントロダクション

② 最大カット

③ 植込疎ベクトル

④ その他の話題

⑤ まとめ

問題設定

植込疎ベクトル (informal)

$v_0 \in \mathbb{R}^n$ を疎なベクトル, $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ($k = o(n)$) をランダムに生成されたベクトルとする. $V = \text{span}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ の任意の基底が与えられるので v_0 を復元せよ.

植込疎ベクトル自体は理論的興味の強い問題.

関連する話題:

- 格子上の最短ベクトル: $\mathbb{Z}^n$ 上のベクトルを考える. $v_1, \dots, v_k$ に (ランダムに生成されたという) 仮定をおかない.
- 圧縮センシング
- 辞書学習

圧縮センシング

圧縮センシング (informal)

未知の疎なベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ と既知の (ランダム) 行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ($k = o(n)$) に対して, $y = Ax$ が与えられる.
 x を復元せよ.

- ℓ_1 ノルム最小化により, 小さい k でも x を復元可能 ($k \geq \|x\|_0 \log(n/\|x\|_0)$).

応用例：CT スキャン

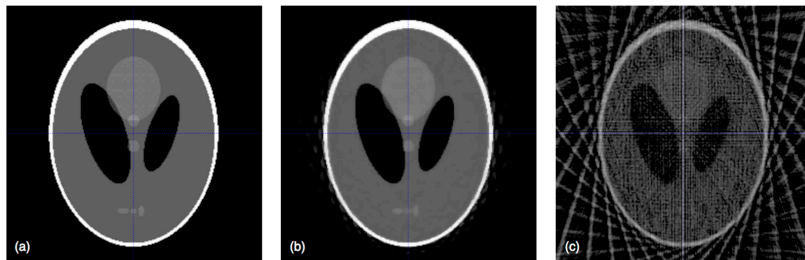


図: (a) 元画像 (b) CS による復元画像 (c) FDK アルゴリズムによる復元画像 ([CWZ⁺10] より)

疎復元と植込疎ベクトルの関連

$V = \ker A$ に着目すると,

疎復元 (言い換え)

$v_0 \in \mathbb{R}^n$ を疎なベクトル, V を $n - k$ 次元のランダムな部分空間とする. アフィン部分空間 $v_0 + V$ が与えられるので v_0 を復元せよ.

疎復元に対する植込疎ベクトルの特徴

- V の次元が $o(n)$.
- $0 \in V$ なので, v_0 は V 中の最も疎なベクトルではない.
- ℓ_1 ノルム最小化では 0 が返ってくる.

辞書学習

辞書学習 (informal)

辞書 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$: 未知の行列 ($m = 10n$ 程度).

疎なベクトル上の分布 $\{x\}$ に対して, $y = Ax$ という形をしたサンプルが大量に手に入るので, 辞書 A を復元せよ.

- サンプルから, それを疎に表現する基底を学習する
 - 画像や音声ではフーリエ変換やウェーブレット変換が上手く動くが, それを自動で学習する.
- 辞書学習の手法の一つに植込疎ベクトルが使われている [SWW12].

辞書学習の応用：画像の修復



図: 画像の修復 ([MBPS09] より)

大量の画像を用いて辞書 A を学習.

毀損した画像 y を $y = Ax$ と表現し、閾値以下の x_i を 0 にする.

問題設定

植込疎ベクトル

- v_0 : $\leq \epsilon n$ 要素が非ゼロ (ϵn 疎) の単位ベクトル.
- $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$: v_0 に直交するガウシアンベクトル

$\text{span}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ の任意の基底 B が与えられるので,
 $\langle v, v_0 \rangle \geq 0.99$ なる v を復元せよ.

注: 正確に v_0 を復元することも可能.

注: v_0 との直交性の仮定も取り除ける

既知の結果

文献	手法	計算時間	最大の k	最大の ϵ
[DH14, SWW12]	LP	poly	any	$\Omega(1/\sqrt{k})$
[QSW14]	AM	$O(n^2 k^5)$	$\Omega(n^{1/4})$	$\Omega(1)$
[BKS14]	SoS	poly	$\Omega(n^{1/2})$	$\Omega(1)$
[HSSS16]	SoS	$\tilde{O}(nk)$	$\Omega(n^{1/2})$	$\Omega(1)$

AM: 交互最適化

今回紹介するのは [BKS14].

アイデア

- 入力ベクトルが疎である，もしくは尖っているほど値が大きくなるような多項式 $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ はあるか？
- 累乗を取ると尖ったベクトルはより尖るので，比 $\|v\|_q / \|v\|_p$ ($q > p$) を考えると良さそう．
- 疎だと比 $\|v\|_q / \|v\|_p$ は大きい：

演習

$v \in \mathbb{R}^n$ を ϵn 疎ベクトルとする．以下が成り立つ．

$$\|v\|_q \geq (\epsilon n)^{1/q - 1/p} \|v\|_p.$$

- 逆は成り立たないが， q と p が近ければランダム部分空間が比の大きいベクトルを含む確率は小さい．

q と p の選び方

以下の問題を考える.

$$\begin{array}{ll} \max & \|v\|_q \\ \text{subject to} & \|v\|_p = 1 \\ & v \in V \end{array}$$

- $q = \infty, p = 1$ ([DH14, SWW12]):
 - LP で解ける.
 - しかし $\epsilon = O(1/\sqrt{k})$ の場合しか扱えない.
- $q = 2, p = 1$
 - $k = \Omega(n)$ まで大きく出来て, 任意の $\epsilon > 0$ を扱える.
 - しかし上の最適化問題が解けない.
- ここでは $q = 4, p = 2$ を考える.

定式化

以下の多項式計画問題の (次数 4 の) SoS 緩和を解く.

$$\begin{array}{ll} \max & \|\mathbf{v}\|_4^4 \\ \text{subject to} & \|\mathbf{v}\|_2^2 = 1 \\ & \mathbf{v} \in V \end{array}$$

或る $C = \Omega(1/\epsilon) \gg 1$ に対して,

$$\mathcal{E} = \{\|\mathbf{v}\|_4^4 = C^4/n, \|\mathbf{v}\|_2^2 = 1, \mathbf{v} \in \text{span}\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k\}\}$$

を満たす疑似分布 $\{\mathbf{v}\}$ が得られる.

主補題

補題 (主補題)

$\{v\}$ を ε を満たす疑似分布とする．この時， $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ への射影行列 P に対して， $\mathbb{E} \|Pv\|_2^2 \leq 0.001$ が成り立つ．

先に主補題から v_0 が復元できることを見る．

v_0 の復元

$\{u\}$: サンプルング補題を $\{v\}$ に適用.

$$\Rightarrow \mathbf{E} \|Pu\|_2^2 \leq 0.001 \text{ かつ } \mathbf{E} \|u\|_2^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \text{低くない確率で } \|Pu\|_2^2 \leq 0.01 \text{ かつ } \|u\|_2^2 \geq 1/2.$$

$$\Rightarrow \|Pu\|_2^2 \leq 0.002 \|u\|_2^2.$$

$$\Rightarrow \langle u, v_0 \rangle \geq 0.99 \|u\|_2.$$

注： $\{v\}$ が次数 4 の疑似分布であることは，主補題の証明でのみ使う．

最初に実際の確率分布で主補題を証明し、それを後で疑似分布に置き換える。

補題 (補題 1)

高い確率で、全ての $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|Pv\|_4^4 \leq 10 \|Pv\|_2^4 / n \quad (2)$$

意味： $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ 中のベクトル v は比 $\|v\|_4 / \|v\|_2$ が小さい

補題 (補題 2)

もし P が (2) を満たすなら、 $\|v\|_4^4 = \|v_0\|_4^4 = C^4/n$ を満たす任意の単位ベクトル $v \in V$ に対して

$$\langle v, v_0 \rangle^2 \geq 1 - O(1/C).$$

意味：比 $\|v\|_4/\|v\|_2$ が大きいなら、 v_0 との相関が高い。

$C \gg 1$ であるので、補題 1 と 2 より主補題（の分布版）は従う。

補題 1 の証明

証明.

略.

係数がランダムな多項式の和が集中することを示す.



補題2の証明

証明.

$\mathbf{v} \in V$ より $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_0 + P\mathbf{v}$ と書ける. 三角不等式より

$$\|\mathbf{v}\|_4 \leq \alpha \|\mathbf{v}_0\|_4 + \|P\mathbf{v}\|_4$$

または

$$\alpha \geq 1 - \|P\mathbf{v}\|_4 / \|\mathbf{v}_0\|_4.$$

$\|P\mathbf{v}\|_4^4 \leq 10\|\mathbf{v}\|_2^4/n$ と $\|\mathbf{v}_0\|_4^4 = C^4/n$ より, 補題が成り立つ. $\square$

補題 1 の疑似分布版

補題 (補題 1 の疑似分布版)

高い確率で

$$\|P\mathbf{v}\|_4^4 \preceq 10\|P\mathbf{v}\|_2^4/n \quad (3)$$

証明.

略.

$\mathbb{E}[P(\mathbf{v})] \preceq \mathbb{E}[Q(\mathbf{v})]$ を示すのに, P と Q の係数を行列で表現し, 行列の最大特異値に対する集中不等式を利用する. $\square$

補題 2 の疑似分布版

補題 (補題 2 の疑似分布版)

もし P が

$$\|P\mathbf{v}\|_4^4 \leq 10\|P\mathbf{v}\|_2^4/n$$

を満たすなら, 任意の ε を満たす次数 4 以上の疑似分布 $\{\mathbf{v}\}$ に対して,

$$\tilde{\mathbb{E}}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle^2 \geq 1 - O(1/C).$$

補題 2 の疑似分布版の証明

補題 (疑似 ℓ_4 三角不等式)

4 次以上の疑似分布 $\{(x, y)\}$ に対して,

$$\left(\tilde{E} \|x + y\|_4^4\right)^{1/4} \leq \left(\tilde{E} \|x\|_4^4\right)^{1/4} + \left(E \|y\|_4^4\right)^{1/4}$$

補題 2 の疑似分布版の証明

証明.

$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_0 + P\mathbf{v}$ と書けるので、疑似 ℓ_4 三角不等式より

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{E}} \|\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} &\leq (\tilde{\mathbf{E}} \|\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_0\|_4^4)^{1/4} + (\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} \\ &= \frac{C}{n^{1/4}} (\tilde{\mathbf{E}} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle^4)^{1/4} + (\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} \end{aligned}$$

言い換えると

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{E}} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle^4)^{1/4} &\geq \frac{n^{1/4}}{C} \left((\tilde{\mathbf{E}} \|\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} - (\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} \right) \\ &= 1 - \frac{n^{1/4}}{C} (\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} \end{aligned}$$

補題 2 の疑似分布版の証明

証明.

仮定と $\|P\mathbf{v}\|_2^4 \preceq \|\mathbf{v}\|_2^4$ より (詳細略)

$$(\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_4^4)^{1/4} \leq \frac{2}{n^{1/4}} (\tilde{\mathbf{E}} \|P\mathbf{v}\|_2^4)^{1/4} \leq \frac{2}{n^{1/4}} (\tilde{\mathbf{E}} \|\mathbf{v}\|_2^4)^{1/4}$$

以上と $\tilde{\mathbf{E}} \|\mathbf{v}\|_2^4 = 1$ より,

$$(\tilde{\mathbf{E}} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v} \rangle^4)^{1/4} \geq 1 - \frac{2}{C} (\tilde{\mathbf{E}} \|\mathbf{v}\|_2^4)^{1/4} = 1 - \frac{2}{C}.$$

補題 2 の疑似分布版の証明

証明.

最後に $\tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^4$ と $\tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^2$ を結びつける.

まず $\langle v, v_0 \rangle^4 \preceq \langle v, v_0 \rangle^2 \|v\|_2^2$ (詳細略).

また

$$\tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^2 \|v\|_2^2 = \tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^2.$$

よって

$$\tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^2 \geq \tilde{E}\langle v, v_0 \rangle^4 \geq \left(1 - \frac{2}{C}\right)^4 \geq 1 - \frac{8}{C}.$$



まとめ

- 植込疎ベクトルに対する SoS アルゴリズム.
- 与えられた部分空間 V の中で比 $\|v\|_4^4 / \|v\|_2^4$ が最大になる v を SoS アルゴリズムで探す.
- 理想的には比 $\|v\|_2^2 / \|v\|_1^2$ を扱いたい ($k = \Omega(n)$ に出来る), ℓ_1 ノルムに対する疑似三角不等式などで詰まる.

① イントロダクション

② 最大カット

③ 植込疎ベクトル

④ **その他の話題**

⑤ まとめ

テンソル分解

テンソル分解

以下の形をした (3 次の) テンソル $T \in \mathbb{R}^{n^3}$ が与えられる.

$$T = \sum_{p \in [m]} \mathbf{a}^p \otimes \mathbf{a}^p \otimes \mathbf{a}^p + E \quad (T_{ijk} = \sum_{p \in [m]} a_i^p a_j^p a_k^p + E_{ijk})$$

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \sim n$ 次元球の面

E : ノイズ

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ を復元せよ.

$m \gg n$ (over-complete) な場合に, m をどこまで大きくしても復元可能?

応用

a^p がランダムな場合は主に理論的興味.

a^p がランダムではない場合:

- 混合ガウシアン分布のパラメータ推定 [ABG⁺13]
- 独立成分分析 [DLCC07]
- 潜在的ディリクレ配分法 [AGH⁺14]

既知の結果

文献	手法	計算時間	最大の m
[AGJ15]	tensor power iteration	poly	$\Omega(n)$
[GM15]	SoS	$n^{O(\log n)}$	$\tilde{\Omega}(n^{3/2})$
[HSSS16]	SoS	$\tilde{O}(mn^{1+\omega})$	$\tilde{\Omega}(n^{4/3})$
[TM16]	SoS	poly	$\tilde{\Omega}(n^{3/2})$

ω : 行列積の計算時間の指数.

考察

テンソル $T \in \mathbb{R}^{n^3}$ の**単射ノルム**:

$$\|T\|_{\text{inj}} = \sup_{\|x\|=1} \sum_{i,j,k \in [n]} T_{ijk} x_i x_j x_k.$$

$T = \sum_{p \in [m]} a^p \otimes a^p \otimes a^p$ の時,

$$\|T\|_{\text{inj}} = \sup_{\|x\|=1} \sum_{p \in [m]} \langle a^p, x \rangle^3.$$

- $m \ll n^{3/2}$ であれば, $1 - o(1) \leq \|T\|_{\text{inj}} \leq 1 + o(1)$.
- $\|T\|_{\text{inj}}$ を 1 に近くするのは, a^p ($p \in [m]$) だけ.
- SoS で証明+ラウンディングにより a^p が復元される.

疎復元

圧縮センシング (informal)

未知の疎なベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ と既知の (ランダム) 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m = o(n)$) に対して, $y = Ax$ が与えられる.
 x を復元せよ.

疎復元 (informal)

未知の**疎に近い**ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ と既知の (ランダム) 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m = o(n)$) に対して, $y = Ax$ が与えられる.
 x に**近い**ベクトルを復元せよ.

疎復元の方がより現実的な設定.

疎復元

$\sigma_k(\mathbf{x})_p$: $\mathbf{x}$ に ℓ_p ノルムが最も近い k 疎なベクトルとの距離.

$$\sigma_k(\mathbf{x})_p = \min_{\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}^*\|_0 \leq k} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_p$$

疎復元

未知のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と既知の行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m = o(n)$) に対して, ベクトル $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ と $k \in \mathbb{N}$, $p > 0$ が与えられる.

$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p = C\sigma_k(\mathbf{x})_p$ ($C > 0$) なるベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ を復元せよ.

m を k に対して出来るだけ小さくしたい.

既知の結果

	p	m	復元時間
[CM06]	2	$O(k \log n)$	poly
[IR08]	1	$O(k \log \frac{n}{k})$	poly
[SL11]	$0 < p \leq 1$	$O(C_1(p)k + C_2(p)k \log \frac{n}{k})$	unknown
[SY16]	$0 < p \leq 1$	$O(k^{2/p} \log(n))$	poly

- 異なるノルムの復元能力は比較出来ない.
- p が小さいと尖ったノイズに強い.

ここでは $p < 1$ の場合に着目.

定式化

[SL11] は以下の ℓ_p ノルム最小化の解 z から x に近いベクトルを復元している.

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \|z\|_p^p \\ \text{subject to} & Az = y\end{array}$$

しかし, これを解く多項式時間アルゴリズムは知られていない.

代わりに SoS 緩和を解く！ [SY16]

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \tilde{\mathbf{E}} \|z\|_p^p \\ \text{subject to} & Az = y \end{array}$$

$|x|^p$ は SoS では表現できないが、 $w^{2/p} = x^2$ なる変数 w を導入することで解く。

ℓ_p^p ノルムに対する三角不等式等で困るが、必要な制約を全部 SoS 緩和に追加することで対処。

より単純な証明も存在 [MN16]

① イントロダクション

② 最大カット

③ 植込疎ベクトル

④ その他の話題

⑤ **まとめ**

まとめ

SoS アルゴリズムは以下の二つの双対性に着目した手法

- 疑似分布
- SoS 証明による反駁

SoS 緩和の見通しがよくなり、平均時の解析に対して様々な結果が得られた。

- 植込疎ベクトル [BKS14]
- テンソル分解 [TM16, GM15, HSSS16]
- 疎復元 [SY16]
- ランダム CSP [AOW15]
- 植込クリークに対する下界 [HKP⁺15, MPW15, BHK⁺16]

未解決問題

問題 (植込疎ベクトル: 平均時版)

$k = \omega(\sqrt{n})$, $\epsilon = \Omega(1)$ の時に, 疎ベクトルを復元することは出来るか?

問題 (植込疎ベクトル: 最悪時版)

部分空間 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, 以下の二つを区別せよ.

- 或る ϵn 疎なベクトル $v \in V$ が存在.
- 任意の $v \in V$ に対して $\|v\|_4^4 / \|v\|_2^4 \leq C/n$.

これが $n^{\text{poly log } n}$ 時間で解けると Small Set Expansion 仮説 (Unique Game 予想より強い予想) が破れる.

未解決問題

問題 (疎復元)

多項式時間の疎復元において, $m = O(C_1(q)k + C_2(q)k \log \frac{n}{k})$ を達成することは出来るか.

問題 (最大カット)

或る $\eta > 1/2$ と $\delta < 1$ に対して, n^δ 次の SoS アルゴリズムで, 最大カットに対する $1 - \epsilon$ vs $1 - \epsilon^\eta$ 近似が得られるか?

未解決問題

問題 (SoS 定理証明の限界)

どの様な証明なら SoS 証明に置き換えられるか？
特に加法的組合せ論や Zig-Zag 積に頼る疑似乱数性 (*Expansion*, *RIP* など) の証明を SoS 証明で書けるか？

問題 (その他の定理証明系)

SoS よりも強力かつ自然で自動化可能な定理証明系はあるか？ それを用いて有用な事実が示せるか？

- *hyperbolic programming*
- 構文的次数ではなく実際の次数を抑えた SoS 定理証明系 [GHP02] (反駁は $NP \cap coNP$ に入る)

未解決問題

問題

代数的な最適化手法・定理証明系 SoS は代数的な問題に弱い
(例：有限体上の線形連立方程式)

代数的な問題を含む最適化問題 (例： $Max\ 3Lin$) に対して，計算量と計算能力のトレードオフを見ることの出来る最適化手法・定理証明系は存在するか？

参考文献 I



Joseph Anderson, Mikhail Belkin, Navin Goyal, Luis Rademacher, and James Voss.

The more, the merrier: the blessing of dimensionality for learning large gaussian mixtures.

arXiv:1311.2891, 2013.



Animashree Anandkumar, Rong Ge, Daniel Hsu, Sham M Kakade, and Matus Telgarsky.

Tensor decompositions for learning latent variable models.

The Journal of Machine Learning Research, 15(1):2773–2832, 2014.



Animashree Anandkumar, Rong Ge, and Majid Janzamin.

Learning overcomplete latent variable models through tensor methods.

In *COLT*, pages 36–112, 2015.

参考文献 II



Sarah R Allen, Ryan O'Donnell, and David Witmer.
How to refute a random CSP.
In *FOCS*, pages 689–708, 2015.



Emil Artin.
Über die zerlegung definiter funktionen in quadrate.
*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der
Universität Hamburg*, 5(1):100–115, 1927.



Boaz Barak, Samuel B. Hopkins, Jonathan Kelner, Pravesh K.
Kothari, Ankur Moitra, and Aaron Potechin.
A nearly tight sum-of-squares lower bound for the planted
clique problem.
In *FOCS*, 2016.
to appear.

参考文献 III



Boaz Barak, Jonathan A Kelner, and David Steurer.
Rounding sum-of-squares relaxations.
In *STOC*, pages 31–40, 2014.



S O Chan, J R Lee, and Prasad Raghavendra.
Approximate constraint satisfaction requires large LP
relaxations.
FOCS, 2013.



Graham Cormode and S Muthukrishnan.
Combinatorial algorithms for compressed sensing.
In *SIROCCO*, pages 280–294, 2006.

参考文献 IV



Kihwan Choi, Jing Wang, Lei Zhu, Tae-Suk Suh, Stephen Boyd, and Lei Xing.

Compressed sensing based cone-beam computed tomography reconstruction with a first-order method.

Medical Physics, 37(9):5113–5125, 2010.



Laurent Demanet and Paul Hand.

Scaling law for recovering the sparsest element in a subspace.

Information and Inference, 3(4):295–309, 2014.

参考文献 V



Lieven De Lathauwer, Josphine Castaing, and Jean-Franois Cardoso.

Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures.

IEEE Transactions on Signal Processing, 55(6):2965–2973, 2007.



Anindya De, Elchanan Mossel, and Joe Neeman.

Majority is stablest: discrete and SoS.

In *STOC*, pages 477–486, 2013.



Dima Grigoriev, Edward A Hirsch, and Dmitrii V Pasechnik.

Complexity of semi-algebraic proofs.

In *STACS*, pages 419–430, 2002.

参考文献 VI



Rong Ge and Tengyu Ma.

Decomposing overcomplete 3rd order tensors using sum-of-squares algorithms.

In *RANDOM*, pages 829–849, 2015.



Michel X Goemans and David P Williamson.

Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming.

Journal of the ACM, 42(6):1115–1145, 1995.



Samuel B Hopkins, Pravesh Kothari, Aaron Henry Potechin, Prasad Raghavendra, and Tselil Schramm.

On the integrality gap of degree-4 sum of squares for planted clique.

In *SODA*, pages 1079–1095, 2015.

参考文献 VII



Samuel B Hopkins, Tselil Schramm, Jonathan Shi, and David Steurer.

Fast spectral algorithms from sum-of-squares proofs: tensor decomposition and planted sparse vectors.

In *STOC*, pages 178–191, 2016.



Piotr Indyk and Milan Ružić.

Near-optimal sparse recovery in the l_1 norm.

In *FOCS*, pages 199–207, 2008.



Subhash Khot, Guy Kindler, Elchanan Mossel, and Ryan O'Donnell.

Optimal Inapproximability Results for MAX-CUT and Other 2-Variable CSPs?

SIAM Journal on Computing, 37(1):319–357, 2007.

参考文献 VIII



Manuel Kauers, Ryan O'Donnell, Li-Yang Tan, and Yuan Zhou.

Hypercontractive inequalities via sos, and the Frankl-Rödl graph.

In *SODA*, 2014.



J L Krivine.

Anneaux préordonnés.

Journal d'Analyse Mathématique, 12(1):307–326, 1964.



Jean B Lasserre.

Global optimization with polynomials and the problem of moments.

SIAM Journal on Optimization, 11(3):796–817, 2001.

参考文献 IX



James R Lee, Prasad Raghavendra, and David Steurer.
Lower bounds on the size of semidefinite programming
relaxations.
[In *STOC*, 2015.](#)



Julien Mairal, Francis Bach, Jean Ponce, and Guillermo
Sapiro.
Online dictionary learning for sparse coding.
[In *ICML*, pages 689–696, 2009.](#)



Tom Morgan and Jelani Nelson.
A note on reductions between compressed sensing guarantees.
[arXiv:1606.00757, 2016.](#)

参考文献 X



Elchanan Mossel, Ryan O'Donnell, and Krzysztof Oleszkiewicz.

Noise stability of functions with low influences: Invariance and optimality.

Annals of Mathematics, 171(1):295–341, 2010.



T. S. Motzkin.

The arithmetic-geometric inequality.

Inequalities, pages 205–224, 1967.



Raghu Meka, Aaron Potechin, and Avi Wigderson.

Sum-of-squares lower bounds for planted clique.

In *STOC*, pages 87–96, 2015.

参考文献 XI



Ryan O'Donnell and Yuan Zhou.
Approximability and proof complexity.
In *SODA*, pages 1537–1556, 2013.



Pablo A Parrilo.
Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems.
Mathematical Programming, 96(2):293–320, 2003.



Mihai Putinar and Florian-Horia Vasilescu.
Positive polynomials on semi-algebraic sets.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 328(7):585–589, 1999.

参考文献 XII



Qing Qu, Ju Sun, and John Wright.

Finding a sparse vector in a subspace: Linear sparsity using alternating directions.

In *NIPS*, pages 3401–3409, 2014.



Konrad Schmüdgen.

The k -moment problem for compact semi-algebraic sets.

Mathematische Annalen, 289(1):203–206, 1991.



Yi Shen and Song Li.

Restricted p -isometry property and its application for nonconvex compressive sensing.

Advances in Computational Mathematics, 37(3):441–452, 2011.

参考文献 XIII



Gilbert Stengle.

A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry.

Mathematische Annalen, 207(2):87–97, 1974.



Daniel A Spielman, Huan Wang, and John Wright.

Exact recovery of sparsely-used dictionaries.

In *COLT*, pages 37.1–37.18, 2012.



Tasuku Soma and Yuichi Yoshida.

Non-convex compressed sensing with the sum-of-squares method.

In *SODA*, pages 570–579, 2016.

参考文献 XIV



David Steurer Tengyu Ma, Jonathan Shi.

Polynomial-time tensor decompositions with sum-of-squares.

In *FOCS*, 2016.

to appear.