不確実性を考慮した最適化手法　演習問題

2017 年 7 月 26 日　　担当：武田朗子

問 0：（説明済） n 次元確率変数 $\boldsymbol{u}$ は多次元正規分布 $\mathcal{N}_n(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従うとする．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値対称行列とする．$\eta \geq 0.5$ の時に，次の機会制約付き最適化問題：

$$\left|\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \Pr(\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}) \geq \eta \end{array}\right.$$

は凸計画問題となる．その問題を，標準正規分布の累積密度関数 $\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ を用いて記せ.

問 1： 二次錐計画問題：

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} & \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{x} + d_i, \quad i = 1, \ldots, N \end{array}$$

を次のような半正定値計画問題：

$$\begin{array}{ll} \max & -\boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{P}_k \preceq \boldsymbol{P}_0, \quad i = 1, \ldots, N \end{array}$$

で表せる．このとき，$\boldsymbol{P}_0, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ を $\boldsymbol{A}_i = \left(\boldsymbol{a}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in}\right), \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{c}_i, d_i, \forall i,$ を用いて記せ.

> ヒント 1 ： $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ が半正定値対称行列　$\Leftrightarrow$ ブロック対角行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & O \\ O & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}$ は半正定値対称行列.
>
> ヒント 2 ： $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S}^\top \\ \boldsymbol{S} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}$ が対称で，$\boldsymbol{Q}$ が正定値行列とする．そのとき，次が成り立つ.
>
> $$\boldsymbol{T} \succeq O \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{R} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{S}^\top \succeq O.$$

問 2： 凸二次計画問題：

$$\left|\begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}_0 \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{q}_0^\top \boldsymbol{x} + \gamma_0 \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}\right.$$

について，等価な [1] 二次錐計画問題に変形して示せ．ただし，$\boldsymbol{Q}_0$ は正定値対称行列とする.

[1] 最適解が同じであることを意味しており，最適値が同じである必要はない.

問 3： 次のロバスト最小二乗問題：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \max_{\boldsymbol{a}_i, \forall i} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} - b_i)^2 \right\}^{1/2} \quad (= \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_i := \{\bar{\boldsymbol{a}}_i + \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{u}_i : \|\boldsymbol{u}_i\| \le 1\},\ i = 1 \ldots, m \end{aligned}$$

を二次錐計画問題として表せ．ただし，$\boldsymbol{Q}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}_m$ は正定値対称行列とする．

問 4： 決定変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と確率変数 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ によって定まる損失関数を $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ と記し，$\boldsymbol{u}$ の分布関数は $p(\boldsymbol{u})$ で与えられているとする．また，$\Phi(\boldsymbol{x}, \alpha)$ は損失 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ の累積分布関数（つまり，$\Phi(\boldsymbol{x}, \alpha) = \int_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le \alpha} p(\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\boldsymbol{u}$）とし，$\alpha$ について連続であると仮定する．このとき，パラメータ $\beta \in [0, 1)$,

- β-VaR (=β 分位点) である $\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) := \min\{\alpha : \Phi(\boldsymbol{x}, \alpha) \ge \beta\}$ と
- β-CVaR である $\phi_\beta(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \ge \alpha_\beta(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) p(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u}$

に対して，下式が成り立つことを示せ．

$$\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) \in \arg\min_{\alpha} F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha), \quad \phi_\beta(\boldsymbol{x}) = \min_{\alpha} F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha)$$

ただし，$F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha)$ は以下のように定義される．

$$F_\beta(\boldsymbol{x}, \alpha) := \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\boldsymbol{u}} [f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \alpha]^+ p(\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

ヒント： $G(\boldsymbol{x}, \alpha) := \int_{\boldsymbol{u}} [f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - \alpha]^+ p(\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}\boldsymbol{u}$ は α について凸で連続微分可能な関数である．そして，その微分は次式で与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} G(\boldsymbol{x}, \alpha) = \Phi(\boldsymbol{x}, \alpha) - 1$$

問 5： n 次元確率変数 $\boldsymbol{u}$ は多次元正規分布 $\mathcal{N}_n(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従い，ポートフォリオ・リターンの損失は $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x}$ と表わされるとする．簡単のために，損失を確率変数 L_x，そして L_x の密度関数を $p(L_x)$ と書くと，CVaR 最小化ポートフォリオ問題は次のように構築される．

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi_\beta(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1-\beta} \int_{\alpha_\beta}^{\infty} L_x \cdot p(L_x) \mathrm{d}L_x \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

この問題を二次錐計画問題に変形せよ．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値対称行列，$\boldsymbol{1}$ は全て成分が 1 のベクトルとする．

問 6： 決定変数 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ と離散型確率変数 $(y, \boldsymbol{x})$ によって定まる損失関数を $f(\boldsymbol{w}, b; y, \boldsymbol{x}) := -y(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + b)$ と定義する．ただし，$(y, \boldsymbol{x})$ は $p(y = y_i, \boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}_i^0) = \frac{1}{m}$, $y_i \in \{-1, 1\}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_i^0 \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$，に従うものとする．パラメータ $\nu \in (0, 1]$ とすると，二値判別モデル Eν-SVM (Perez-Cruz et al., 2003)：

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \boldsymbol{z}, b, \boldsymbol{w}} \quad & \nu\alpha + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_i \\ \text{s.t.} \quad & z_i \geq -y_i(\boldsymbol{w}^\top \bar{\boldsymbol{x}}_i^0 + b) - \alpha, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{z} \geq 0, \quad \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} = 1 \end{aligned}$$

は次の CVaR 最小化問題と等価である．

$$\min_{\alpha, b, \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} = 1} \alpha + \frac{1}{\nu m}\sum_{i=1}^{m}[f(\boldsymbol{w}, b; y_i, \bar{\boldsymbol{x}}_i^0) - \alpha]^+$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_i^0$ へのノイズの影響を考慮し，$\mathcal{E}_i := \{\bar{\boldsymbol{x}}_i^0 + \Delta\boldsymbol{x}_i : \|\Delta\boldsymbol{x}_i\| \leq \delta\}$, $\forall i$, の不確実性集合を想定する．このとき，ロバスト CVaR 最小化問題（つまり，ロバスト Eν-SVM)：

$$\min_{\alpha, b, \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} = 1} \ \max_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{E}_i, \forall i} \ \alpha + \frac{1}{\nu m}\sum_{i=1}^{m}[f(\boldsymbol{w}, b; y_i, \boldsymbol{x}_i) - \alpha]^+$$

を一段階の最適化問題（min 型最適化問題）に帰着せよ．

問 7： 行列 $\boldsymbol{D_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, k$, が与えられている．多面体型不確実性集合 $\mathcal{U}_i := \{\boldsymbol{a}_i : \boldsymbol{D_i}\boldsymbol{a}_i \leq \boldsymbol{d}_i\} \subset \mathbb{R}^n$, $\forall i$, を用いて，次のロバスト線形計画問題：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \max_{\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{U}_i} \ & \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

を変形し，線形計画問題へ帰着させよ．