組合せ最適化セミナー：演習問題

2018 年 7 月 24 日
垣村 尚徳

1. グラフ G（正則とは限らない）の最大次数を $d_{\max}$ としたとき，

$$\lambda_1 \leq d_{\max}$$

   を示せ．λ_1 は隣接行列の最大固有値である．

2. グラフ G と H が同型であるならば，隣接行列 $A(G)$ と $A(H)$ の固有値は相等しいことを示せ.（逆は成り立つだろうか？）

3. 二部グラフ G の隣接行列 A が固有値 λ をもつならば，$-\lambda$ も固有値にもつことを示せ.

4. d 正則グラフ G の隣接行列を A とし，A の非自明固有値の最大値を $\lambda(A) = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$ とする．このとき，

$$\lambda(A) \geq \sqrt{\frac{d(n-d)}{n-1}}$$

   が成り立つことを示せ.（ヒント：$\mathrm{trace}(A^2)$ を考える）

5. Bilu-Linial 2006 の符号付けに関する定理を示そう．符号付け $s \in \{\pm\}^m$ に対して，A_+ を正の辺だけからなるグラフの隣接行列，A_- を負の辺だけのグラフの隣接行列とする.
   (a) 隣接行列 A, その符号付け A_s，および 2 リフトの隣接行列を，A_+ と A_- をもちいて表せ.
   (b) 2 リフトの隣接行列が，A の固有値および A_s の固有値をもつことを示せ.

6. $p_\emptyset(x) = \mathbb{E}_s[\chi[A_s](x)]$ がマッチング多項式と一致することを示せ.

7. 次数 n の 1 変数実係数多項式 f が real-rooted ならば，その微分 f' は f を interlace することを示せ.

8. f_1, f_2 を全ての根が実数である 2 つの多項式，その最大根をそれぞれ λ_1, λ_2 とする．f_1+f_2 の最大根が $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ よりも小さくなるような，f_1, f_2 の具体例を作りなさい.

9. 以下を示しなさい：f_1, f_2 を次数 n の 1 変数実係数多項式とする．このとき，任意の凸結合 $tf_1 + (1-t)f_2$ $(t \in [0,1])$ が real-rooted ならば，f_1, f_2 は common interlacing をもつ.

10. 以下を示しなさい．ただし A は n 次正則行列，u, v は n 次ベクトルである．

   (a) $\det(A + uv^*) = \det A \cdot (1 + v^* A^{-1} u)$.

   (b) r をランダムベクトルとする．このとき，

$$\mathbb{E}[\det(A - rr^*)] = \left(1 - \frac{\partial}{\partial t}\right) \det(A + t\mathbb{E}[rr^*])|_{t=0}$$

   がなりたつ．

11. グラフ G の隣接行列を A とする．このとき，以下が等価であることを示しなさい．

   (a) A を $\mathbb{GF}(2)$ 上の行列とみなすと非正則である．

   (b) 非空な頂点部分集合 $S \subseteq V$ が存在して，任意の頂点 $v \in V$ は偶数頂点の近傍を S にもつ（つまり，$|N(v) \cap S|$ が偶数，$N(v) = \{u \in V \mid \exists (u, v) \in E\}$）．

   (c) G は偶数個の完全マッチングをもつ．

   さらに，G が二部グラフならば，上と以下が等価であることを示せ．

   (d) ある符号付け s が存在して A_s が非正則である．

   したがって，G が二部グラフならば，非正則な符号付け s があるかどうかを多項式時間で判定できる．G が一般グラフの場合はどうなるだろうか．