

グラフと線形代数：  
グラフスペクトルとその周辺  
その1：導入

垣村尚徳  
慶應義塾大学

# 今日の目標: 以下の論文MSS15を紹介すること<sup>1</sup>

---

- ▶ スペクトラルグラフ理論のアルゴリズム的研究
  - “algorithmic spectral graph theory”
    - Simon Instituteのプログラム: 2014
  
- ▶ Adam Marcus, Daniel A. Spielman, and Nikhil Srivastava.  
**Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees.** Ann. of Math. 182-1 (2015), 307-325.  
(FOCS, pages 529–537, 2013)
  - ラマヌジャングラフが無限個存在することを証明

# 今日の目標: 以下の論文MSS15を紹介すること<sup>2</sup>

---

- ▶ Adam Marcus, Daniel A. Spielman, and Nikhil Srivastava. **Interlacing Families I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees**. Ann. of Math. 182-1 (2015), 307-325. (FOCS, pages 529–537, 2013)

- ラマヌジャングラフが無限個存在することを証明

## ▶ 参考文献

- Adam Marcus, Daniel A. Spielman, and Nikhil Srivastava, **Ramanujan Graphs and the Solution of the Kadison–Singer Problem**, Proceedings of ICM, Vol III (2014), 375-386. (国際数学者会議の招待講演)
- 講義ノート2015: Daniel Spielman (Yale)
- Adam Marcus (Princeton) の発表スライド

# 証明手法が新しい：一連の研究成果

---

- A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava,
  - Interlacing Families **I: Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees**. Ann. of Math. 182-1 (2015), 307-325. (FOCS, pages 529–537, 2013)
  - Interlacing families **II: mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem**, Ann. of Math. 182-1 (2015), 327-350.
    - Operator theory
  - Interlacing families **III: improved bounds for restricted invertibility**, submitted.
    - Linear Algebra
  - Interlacing families **IV: bipartite Ramanujan graphs of all sizes**, FOCS 2015.

# 選んだ理由：自身の研究の先行研究

---

- ▶ Charles Carlson, Karthekeyan Chandrasekaran, Hsien-Chih Chang, Naonori Kakimura, Alexandra Kolla, **Spectral Aspects of Symmetric Signings**, ArXiv, 2017. (Submitted)

- 組合せ的な話

- 行列要素に正負を割り当て良い性質を満たすようにする

- ▶ 研究動機：

- 紹介文献MSS2015 における未解決問題

# 今日のスケジュール

---

1. 10:30 - 11:20 準備 と 主結果
2. 11:40 - 12:30 証明の流れ
3. 14:00 - 15:00 証明の詳細
4. 15:15 - 16:15 演習
5. 16:30 - 17:30 演習の解説 と 総括

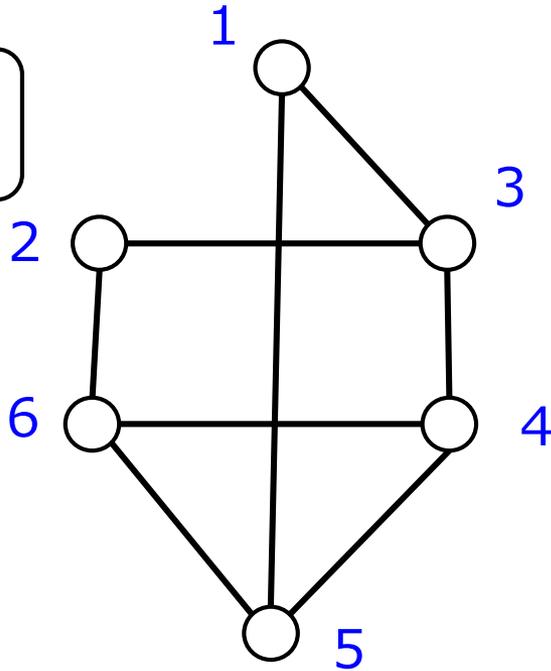
# グラフ と 行列

スペクトラルグラフ理論

# グラフと隣接行列 (Adjacency Matrix)

 $G=(V, E)$ 

並行辺,  
ループなし

 $A(G) \in \{0,1\}^{V \times V}$ 

対称

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定義：グラフ  $G$  の隣接行列  $A(G) = (a_{ij})$

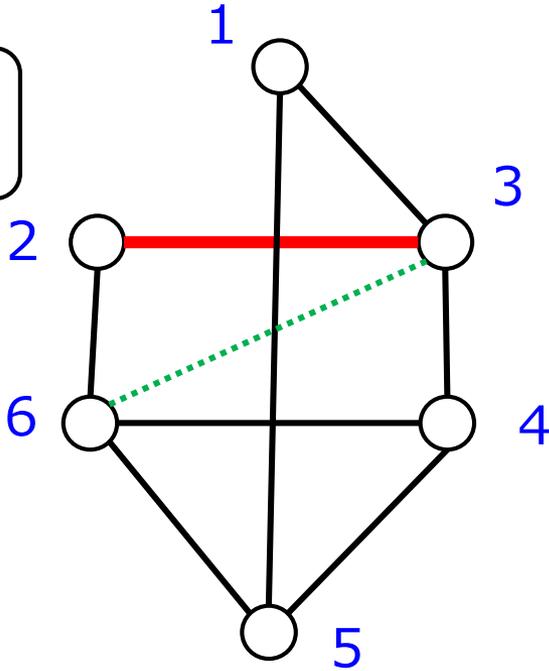
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in E \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

# グラフと隣接行列 (Adjacency Matrix)

対称

$$G=(V, E)$$

並行辺,  
ループなし



$$A(G) \in \{0,1\}^{V \times V}$$

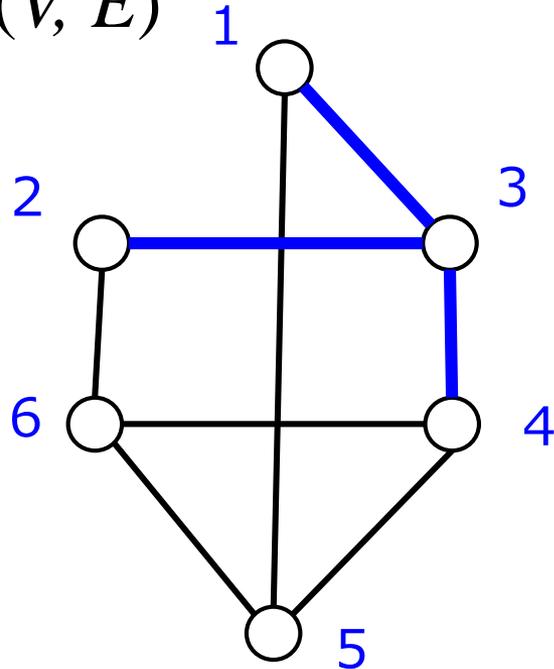
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定義：グラフ  $G$  の隣接行列  $A(G) = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in E \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

# cf) ラプラシアン行列 (Laplacian)

$G=(V, E)$



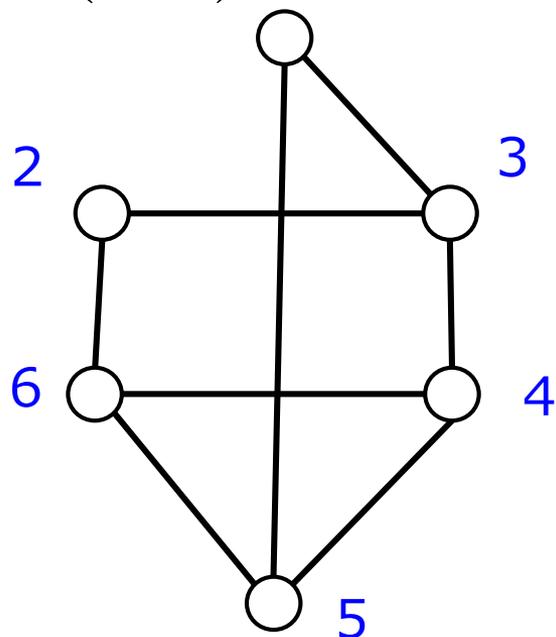
$$L(G) = D - A(G)$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \mathbf{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定義：グラフ  $G$  のラプラシアン行列  $L(G) = D - A(G)$

- $D$  は次数を対角に並べた行列

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{頂点 } i \text{ の次数} & (i = j) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$G=(V, E)$  $A(G)$ 

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

 $L(G)$ 

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## スペクトラルグラフ理論

隣接行列やラプラシアン行列の固有値や固有ベクトルから  
グラフの性質を解析

定義：固有値  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

以下を満たすベクトル  $x \in \mathbb{C}^n$  ( $x \neq 0$ ) が存在

$$Ax = \lambda x$$

$x$ : 固有ベクトル

➤  $\lambda \in \mathbb{C}$  が固有値  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda$ に関する $n$ 次多項式の根  
(特性多項式・固有多項式)

➤ 事実

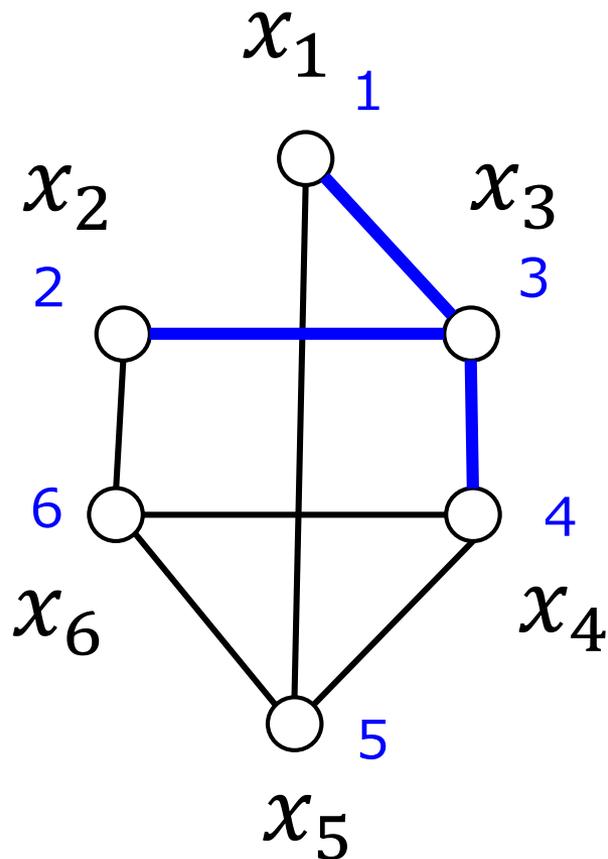
- 対称行列の固有値はすべて実数

# 隣接行列 $A(G)$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $x$

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j \in N(i)} x_j = \lambda x_i, \quad \forall i \in V$$

点 $i$ の近傍 $N(i)$ の $x$ の値の和

$x \in \mathbb{R}^V$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 + x_5 = \lambda x_1 \\ x_3 + x_6 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = \lambda x_3 \\ x_3 + x_5 + x_6 = \lambda x_4 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \lambda x_5 \\ x_2 + x_4 + x_5 = \lambda x_6 \end{array} \right.$$

# 隣接行列 $A(G)$ の固有値の性質

- 隣接行列 $A(G)$ の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ )

- ▶ 平均次数  $\leq \lambda_1 \leq$  最大次数 (演習)

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg v \qquad \max_{v \in V} \deg v$$

- ▶  $d$ 正則グラフ $G$ が連結  $\Leftrightarrow \lambda_2 < \lambda_1$

- 連結成分数 = ( $\lambda_1$ の重複度)

- ▶  $d$ 正則グラフのラプラシアン $L(G)$ の固有値  $d - \lambda_i$

- 固有ベクトルは $A(G)$ のものと同じ

# グラフ固有値のさまざまな応用

---

- ▶ グラフの描画
- ▶ 同型性判定
- ▶ 彩色
- ▶ クラスタリング
- ▶ ランダムウォークの解析
- ▶ グラフのsparsification
- ▶ . . .

# 例1 : Spectral Embedding [Hall70]

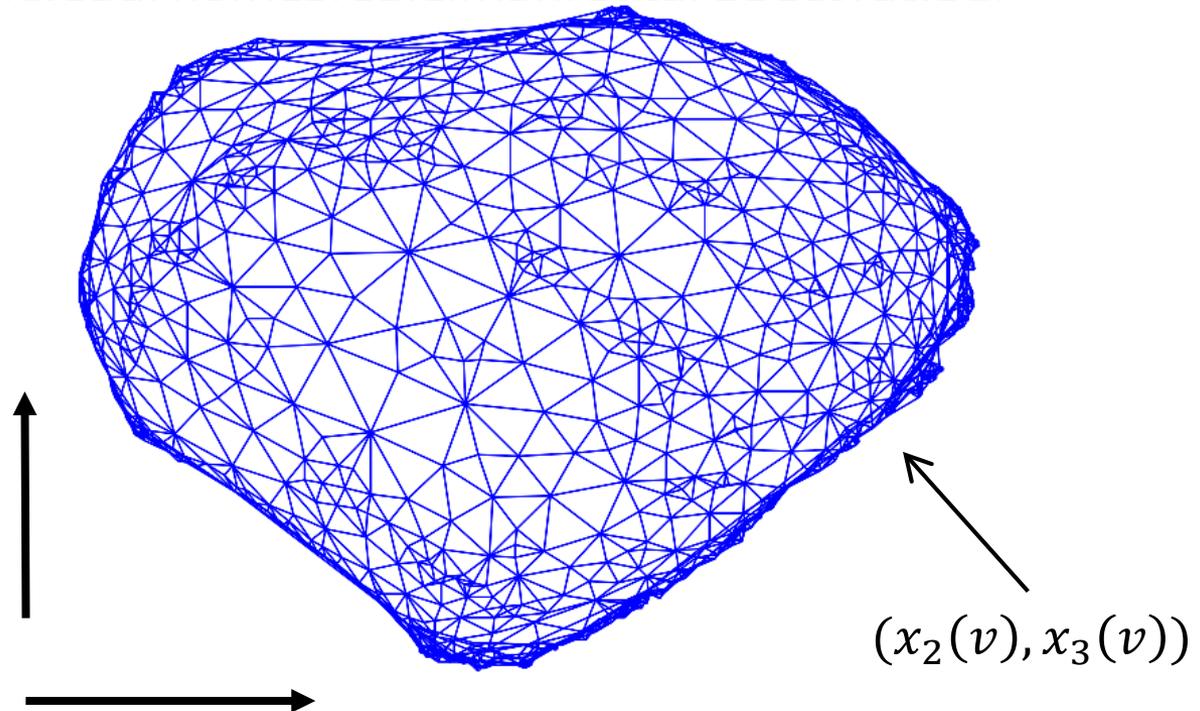
▶  $L(G)$ の2,3番目に小さな固有値の固有ベクトルを座標に利用

□ Spielman の講義録から

- <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/sata/SpectTut.pdf>

$L(G)$ の最小固有値0 : 自明

$L(G)$ の  
第3固有値の  
固有ベクトル $x_3$



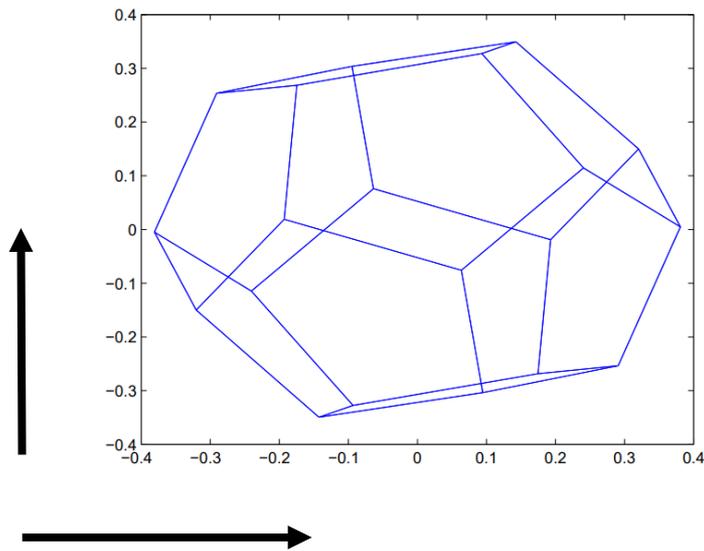
$L(G)$ の第2固有値の固有ベクトル $x_2$

# 例1 : Spectral Embedding [Hall70]

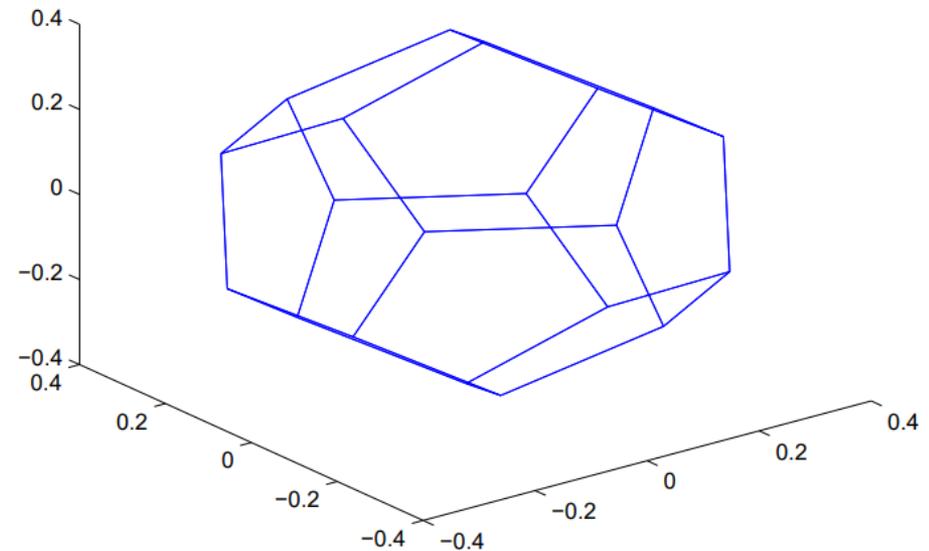
## ➤ 固有ベクトルを座標に利用

### □ Spielman の講義録から

- <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/sgta/SpectTut.pdf>



正12面体



3つの固有ベクトル (多重度3)

# 例1 : Spectral Embedding [Hall70]

➤ 下の最適化問題の最適解は  $x_2$  と  $x_3$

$$\min \sum_{(i,j) \in E} \left\| \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \right\|^2 = x^T L(G)x + y^T L(G)y$$

隣接した頂点の距離が近くなるように

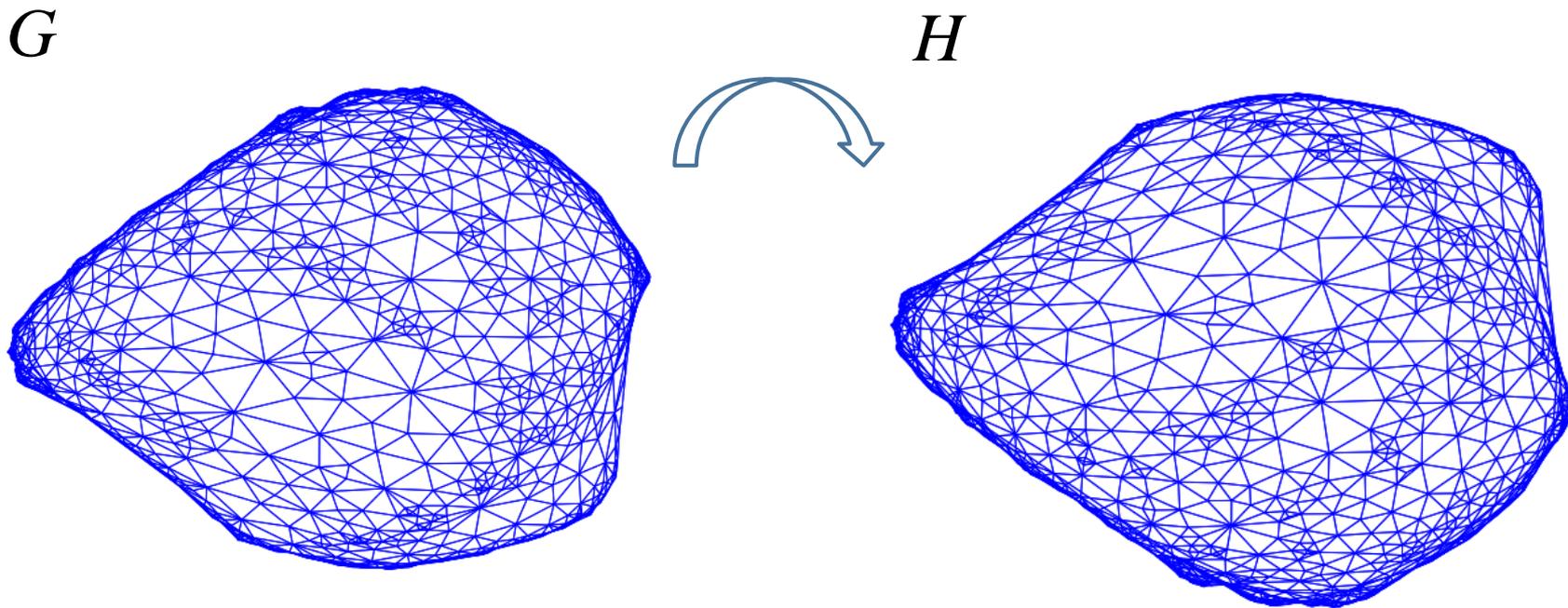
$$\text{s.t.} \quad \left. \begin{array}{l} \|x\|^2 = \|y\|^2 = 1 \\ 1^T x = 1^T y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \text{ など} \\ \text{自明な答えを避ける} \end{array}$$

$$x^T y = 0 \quad x \text{ と } y \text{ を ことなるものに}$$

## 例2：グラフの同型性判定

定義：  $G=(V, E)$  と  $H=(U, F)$  が同型

$$\exists \sigma: V \rightarrow U \text{ s.t. } (u, v) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in F$$



同型

## 例2：グラフの同型性判定

定義：  $G=(V, E)$  と  $H=(U, F)$  が同型

$$\exists \sigma: V \rightarrow U \text{ s.t. } (u, v) \in E \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in F$$

### ➤ 事実

- $G$  と  $H$  が同型  $\Rightarrow$  隣接行列の固有値が同じ（演習）
  - 逆は成り立たない
- 固有値の多重度が定数ならば多項式時間で判定可能
  - [Babai-Grigoryev-Mount 82]

# 例3：グラフの彩色

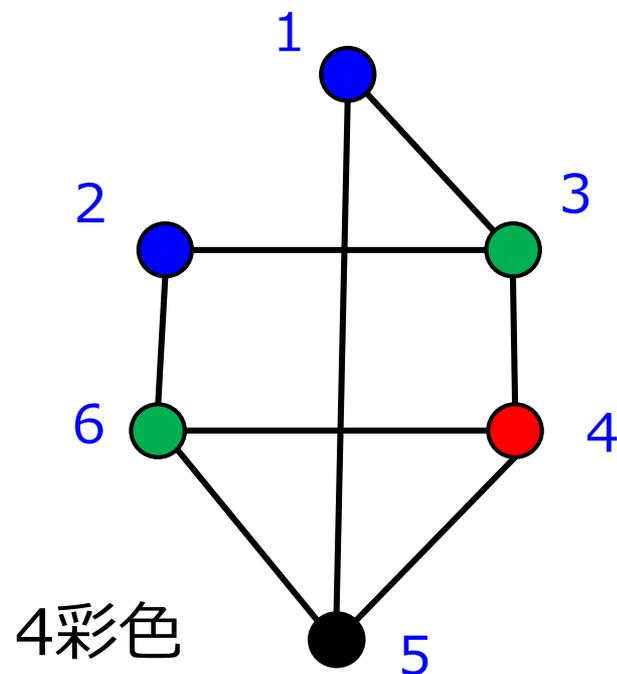
定義：グラフ  $G$  の  $k$  彩色：

- $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  s.t.  $c(u) \neq c(v), \forall (u, v) \in E$

彩色数：  $\chi(G) = k$  彩色可能である最小の  $k$

➤ 観察： 彩色数  $\leq$  最大次数 + 1

- 近傍と異なる色が必ず存在するので



## 例3：グラフの彩色

彩色数： $\chi(G)$ ： $k$ 彩色可能である最小の $k$

- ▶ 観察：彩色数  $\leq$  最大次数 + 1
- ▶ 隣接行列 $A$ の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ )

定理 [Wilf 67]

$$\chi(G) \leq \lfloor \lambda_1 \rfloor + 1$$

最大次数よりもよい上界  $\lfloor \lambda_1 \rfloor \leq d_{max}$

定理 [Hoffman 70]

$$1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_n} \leq \chi(G)$$

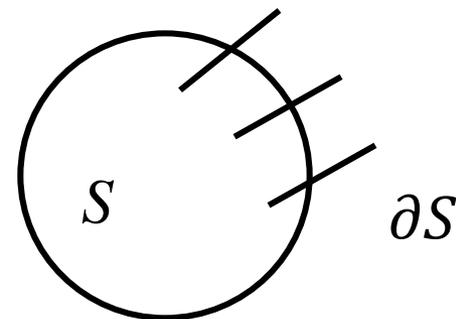
# 例4 : Expansion Ratio

定義 : (edge) Expansion ratio

$$h_E(G) = \min_{0 < |S| \leq n/2} \frac{|\partial S|}{|S|}$$

$$\partial S = \{(i, j) \in E \mid i \in S, j \notin S\}$$

$S \subseteq V$ から外に出る辺集合



➤ 応用 : グラフのコミュニティ検出 など

- $|\partial S|$  が小さく, かつ サイズ  $|S|$  が大きな部分集合

## 例4 : Cheeger の不等式 [Cheeger 70]

- 離散版 Dodziuk 84, Alon-Milman 85 Alon 86

### 定理

$G: d$  正則, 連結

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h_E(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

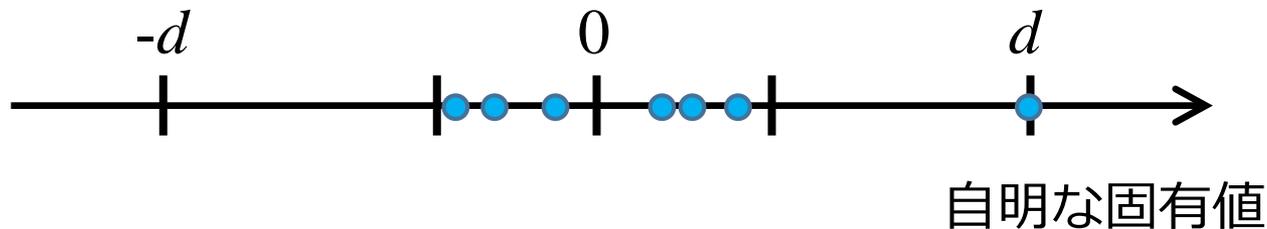
- $d - \lambda_2$  が大きい ( $\lambda_2$ が小)  $\rightarrow$  Expansion ratio 大
- $d - \lambda_2$  が小さい ( $\lambda_2$ が大)  $\rightarrow$  Expansion ratio 小
  
- $d$ 正則グラフ : 各頂点に接続する辺の数 =  $d$ 
  - 最大固有値  $\lambda_1 = d$

# エクスペンダーと ラマヌジャングラフ

固有値が小さなグラフ

# エクスペンダーグラフ

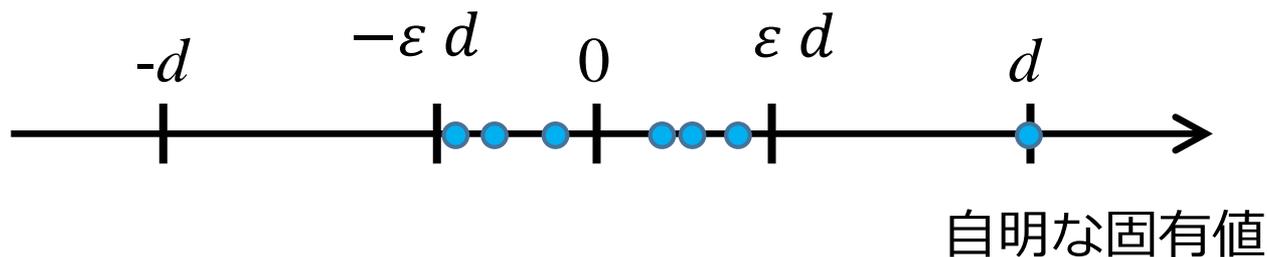
- ▶  $d$ 正則グラフ  $G$  の隣接行列  $A(G)$ 
  - その固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ )
  - 最大固有値  $\lambda_1 = d$  (自明な固有値), 固有ベクトル  $\mathbf{1}$ 
    - 二部グラフの場合は,  $\lambda_1 = d, \lambda_n = -d$  (自明な固有値)
  
- ▶ エクスペンダーグラフ : 非自明な固有値が小さい
  - 非自明固有値の最大  $\lambda(A) = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$  が小さい
    - 二部グラフの場合 :  $\lambda(A) = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_{n-1}|\}$



# $\varepsilon$ エクスパンダー ( $\varepsilon$ -expander)

定義：  $\varepsilon$ エクスパンダー

$$\lambda(A) = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} \leq \varepsilon d$$



▶ Cheeger の不等式より Expansion ratio  $\geq$  定数  $\times d$

$$\frac{(1 - \varepsilon)d}{2} \leq \frac{d - \lambda_2}{2} \leq h_E(G)$$

# エクспанダーの性質

---

## ▶ 色々なところで応用

- 誤り訂正符号
- Pseudo-random generators
- 計算量理論 (PCP定理など)

## ▶ 完全グラフの近似

- 連結性が高い, 直径が短い
- ランダムウォークがすぐにmixする

## ▶ ランダムグラフに近い [Expander Mixing Lemma]

- $X$ と $Y$ をまたぐ辺の数  $\approx$  ランダムグラフの場合

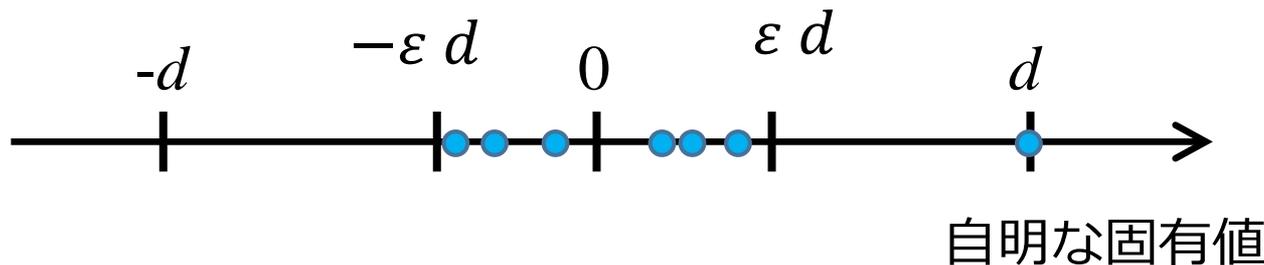
## ▶ Vertex expansion が大きい [Tanner1984]

- 小さな頂点集合は大きな近傍を持つ

# $\varepsilon$ はどこまで小さくできるか？

定義： $\varepsilon$  エクスパンダー

$$\lambda(A) = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} \leq \varepsilon d$$



命題

$$\varepsilon d \geq \lambda(A) \geq \sqrt{d} \sqrt{\frac{n-d}{n-1}}$$

● 簡単な観察から (演習)

$$\Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \quad (d: \text{固定 } n \rightarrow \infty)$$

よりよいバウンド？

# Alon-Boppana の定理 86 [Nilli 91, Friedman 93]

定理

$$\lambda_2 \geq 2\sqrt{d-1} - o\left(\frac{\sqrt{d}}{\text{diam}(G)}\right) \quad \lambda_n \leq -2\sqrt{d-1} + o\left(\frac{\sqrt{d}}{\text{diam}(G)}\right)$$

直径

$\Rightarrow \varepsilon \geq \frac{2\sqrt{d-1}}{d}$  ( $d$ :固定  $n \rightarrow \infty$ ) を満たす

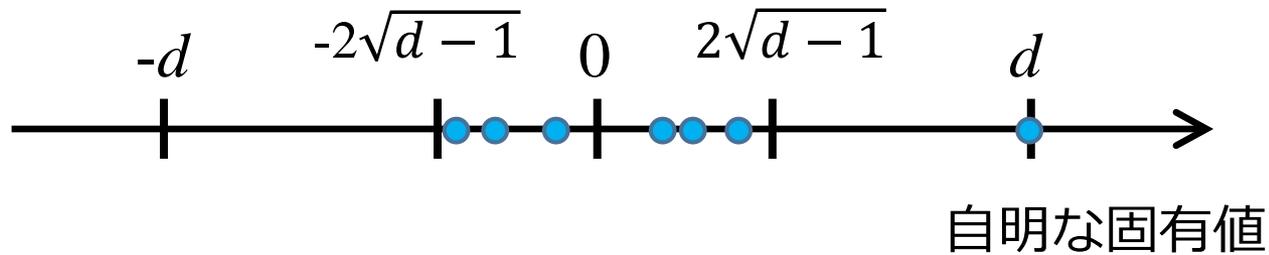
任意の  $\delta > 0$  に対して, ある  $N$  が存在して,  
 $N$  頂点以上の任意の  $d$  正則グラフでは  $\lambda(A) \geq 2\sqrt{d-1} - \delta$

(1ページ前 :  $\lambda(A) \geq \sqrt{d}(1 - \delta)$  )

$$\text{diam}(G) = \Omega(\log_{d-1} n)$$

# 定義：ラマヌジャングラフ

$d$ 正則グラフで非自明固有値が全て  $-2\sqrt{d-1}$  と  $2\sqrt{d-1}$  の間



$\left(\frac{2\sqrt{d-1}}{d}\right)$ -エクスペンダー

- ▶ ラマヌジャングラフ は存在するか？
- ▶ ラマヌジャングラフ は構成できるか？

# ラマヌジャングラフは存在するか？

- ▶ ある $d$  についてラマヌジャングラフが存在
  - $d-1 = (\text{素数})$  [Margulis 88, Lubotzky-Phillips-Sarnak 88]
    - Cayley graphs から構成
    - 代数的な手法を利用 (ラマヌジャン予想)
      - ラマヌジャングラフの名前の由来
  - $d-1 = (\text{素数})^p$  [Morgenstern 94]

Q. ラマヌジャングラフは特別なグラフ？

定理 [Friedman 08]

ランダムな $d$  正則グラフの非自明固有値は

高い確率で,  $[-2\sqrt{d-1} - \varepsilon, +2\sqrt{d-1} + \varepsilon]$  のあいだ

# 主結果 [Marcus-Spielman-Srivastava FOCS13, 15]

予想 [Lubotzky94]

- 任意の $d$  に対してラマヌジャングラフが無限個存在？

定理

任意の $d$  に対してラマヌジャングラフが無限個存在

- ラマヌジャン二部グラフ, 単純グラフ

今日の目的：この定理の証明の理解

グラフと線形代数  
その2  
ラマヌジャングラフの存在証明

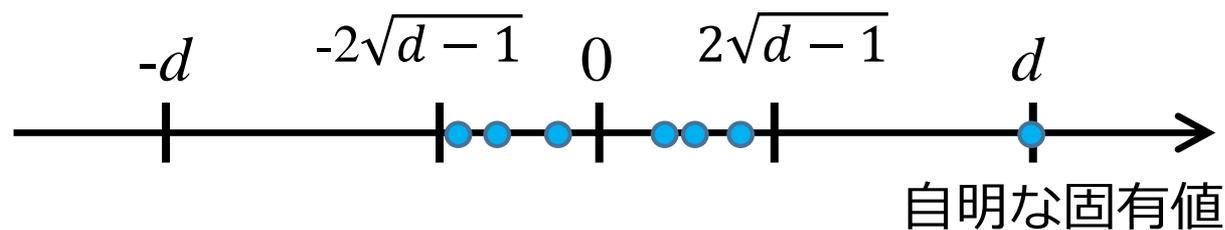
垣村尚徳  
慶應義塾大学

# 固有値が小さなグラフ：エクспанダーグラフ

- 連結度が高い疎なグラフ
- 関連：マルコフ連鎖, エラー訂正符号, 計算量理論

## ▶ ラマヌジャングラフ

- $d$ 正則グラフで非自明固有値が全て  $-2\sqrt{d-1}$  と  $2\sqrt{d-1}$  の間



定理 [MSS FOCS13, 15]

任意の  $d$  に対してラマヌジャングラフが無限個存在

- ラマヌジャン二部グラフ, 単純グラフ

# 証明の大雑把な流れ

---

- ▶ 小さな $d$ 正則グラフ から 大きな $d$ 正則グラフ を構成
  - 2リフト [Bilu-Linial 06]
  - 2リフトの固有値  $\leftrightarrow$  **符号を付けた隣接行列**の固有値
  
- ▶ 最大固有値が小さな符号付けが存在
  - 多項式の関係 : interlacing family of polynomials
  - 固有多項式の期待値 (mixed characteristic polynomial)の実根

# 証明手法が汎用的 . . . 詳しくは後ほど

---

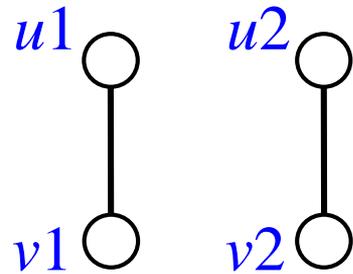
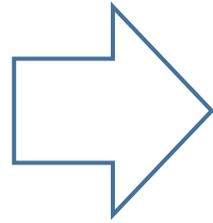
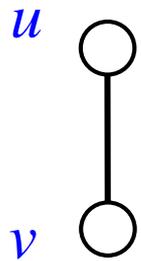
- ▶ いろいろな問題を同様の手法で解ける
  - Kadison-Singer problem (in operator theory)
    - [Marcus-Spielman-Srivastava 2015]
  - Restricted invertibility
    - [Marcus-Spielman-Srivastava 2015]
  - 任意の頂点数 $n$  (偶数)と次数 $d$  に対してラマヌジャン多重グラフが存在
    - [Marcus-Spielman-Srivastava FOCS15]
  - Asymmetric TSPの整数性ギャップが  $O(\text{polyloglog } n)$ 
    - [Anari-Gharan FOCS15]

# グラフの構成と符号付け

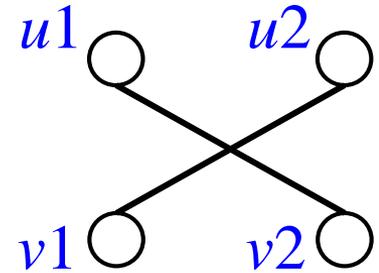
## 2リフトと符号付け

# 定義：2リフト

1. 各頂点を2つに分け,
2. 各辺  $(u, v) \in E$  を下記のいずれかに変更



正の辺リフト



負の辺リフト

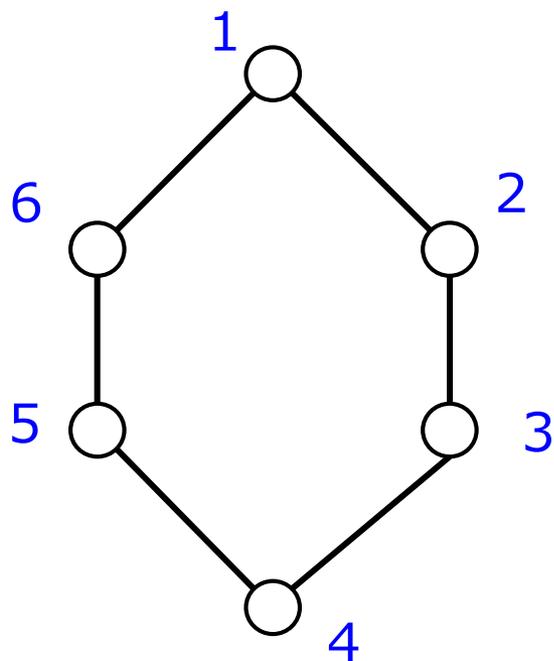
## ➤ 観察：

- $n$ 頂点  $d$ 正則グラフ  $\rightarrow$   $2n$ 頂点の  $d$ 正則グラフ
  - 二部グラフ  $\rightarrow$  二部グラフ
- リフトのやり方： $2^m$ 通り

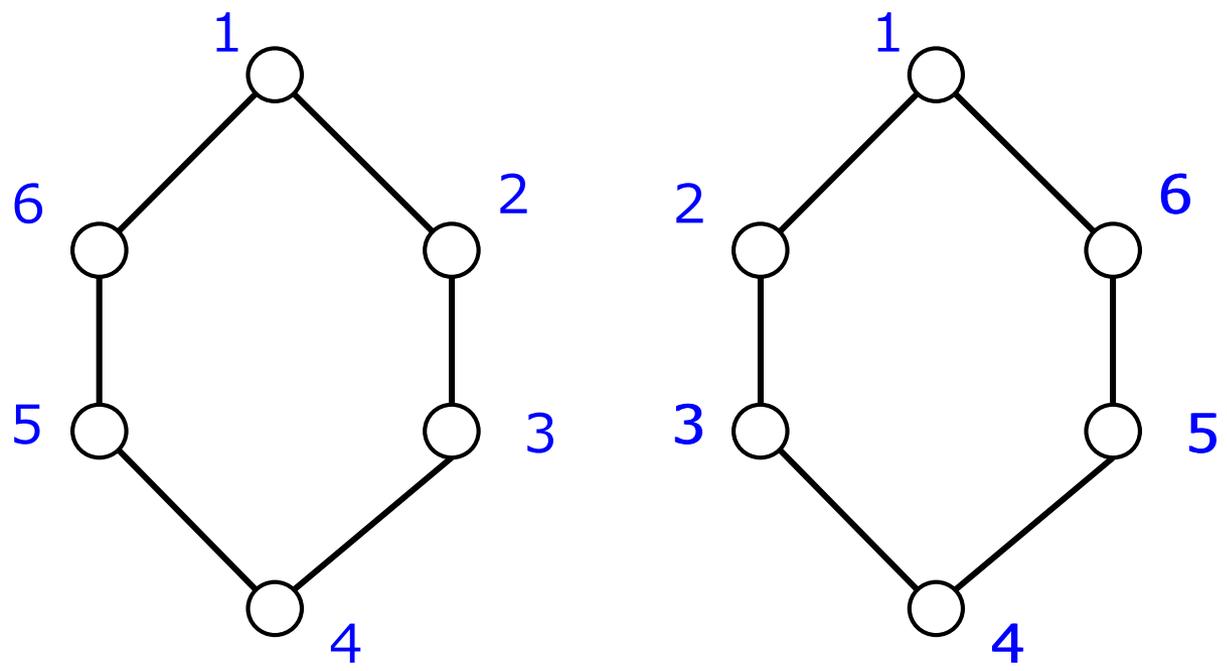
$$m = |E|$$

# 例：グラフ

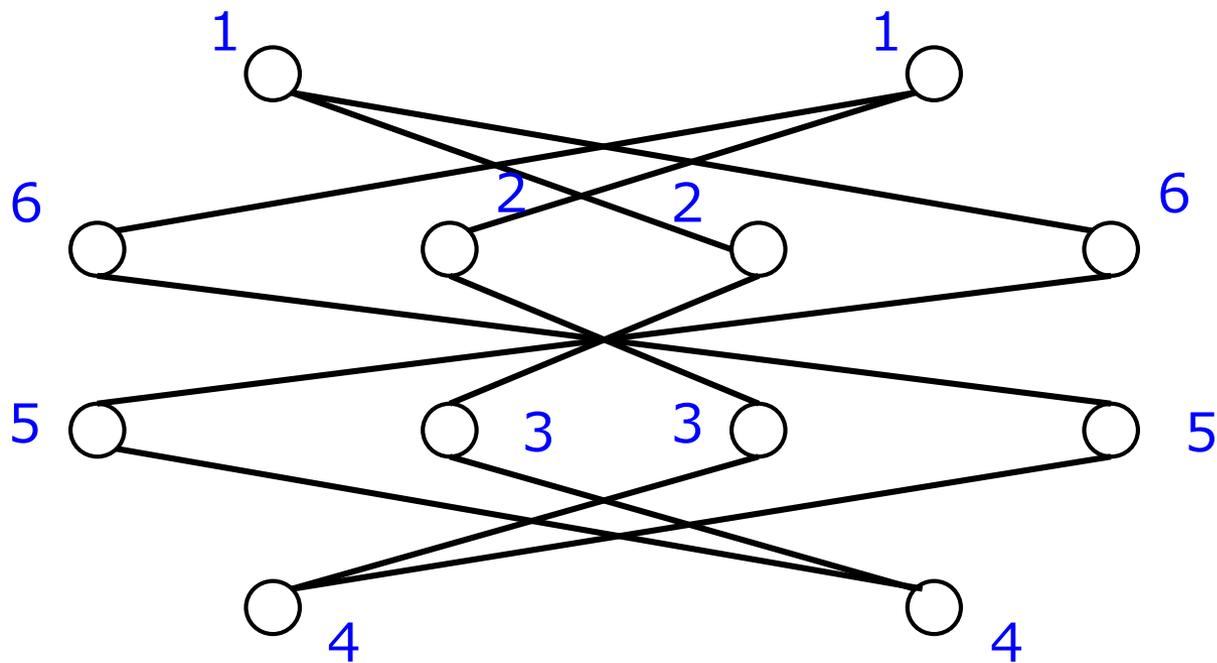
---



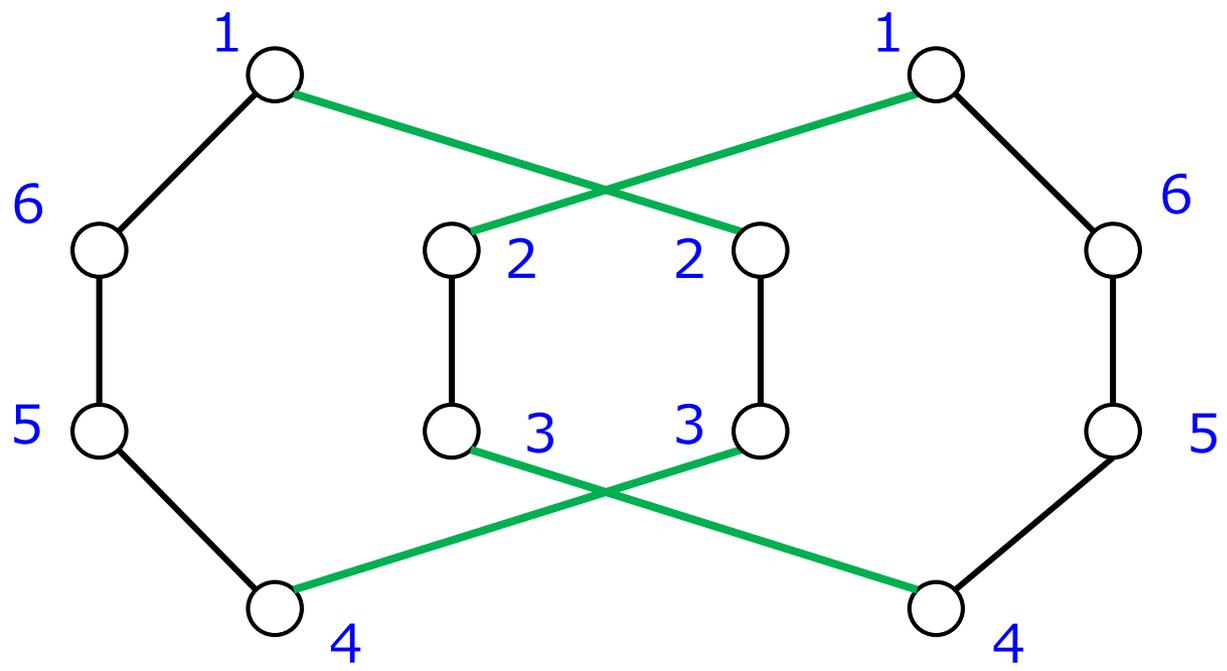
# 例: 全ての辺が正の2リフト



# 例: 全ての辺が負の2リフト



# 例: (1,2) (3,4) のみが負の2リフト



# 定義：隣接行列の符号付け (signing)

- 2リフトのやり方  非ゼロ要素の符号付け  $s \in \{\pm 1\}^m$

定義：隣接行列の符号付け  $A_s$

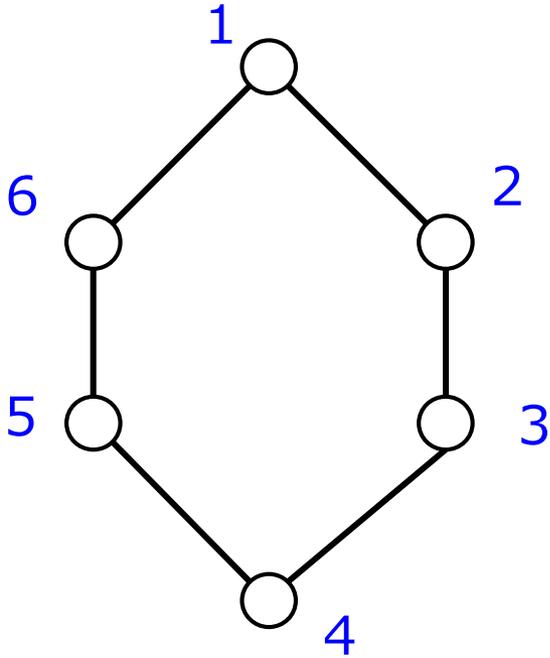
- 隣接行列  $A$  と符号  $s \in \{\pm 1\}^m$  に対して,  $(i, j)$  成分を  $s_{ij}$  倍

$$(A_s)_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{if } (i, j) \in E \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

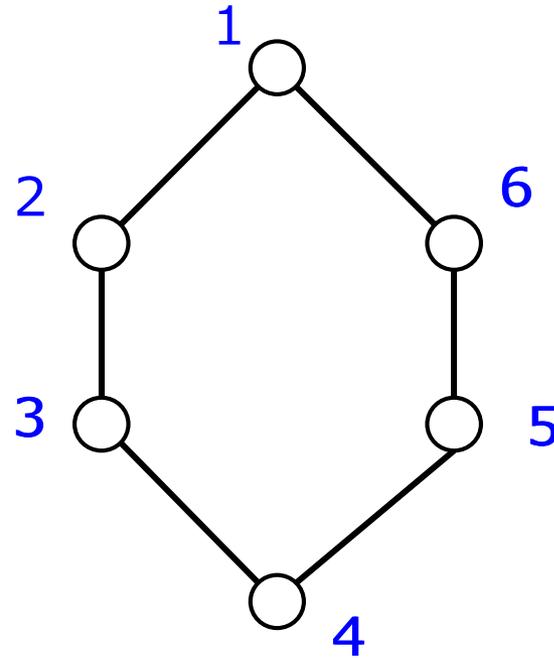
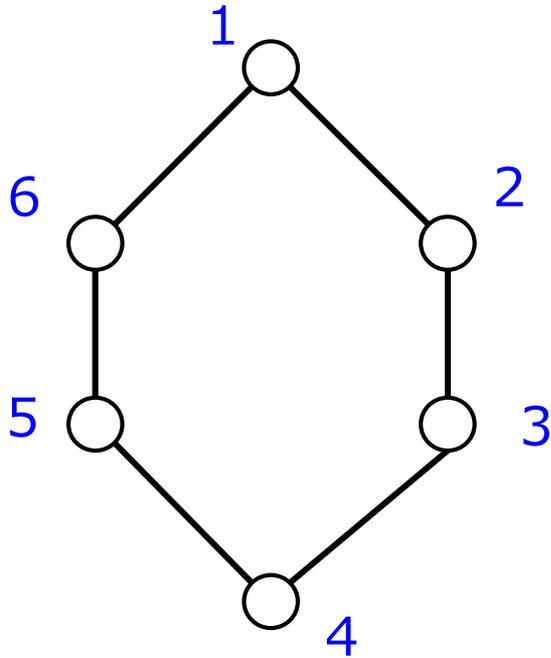
対称性を保つ

# 例：隣接行列



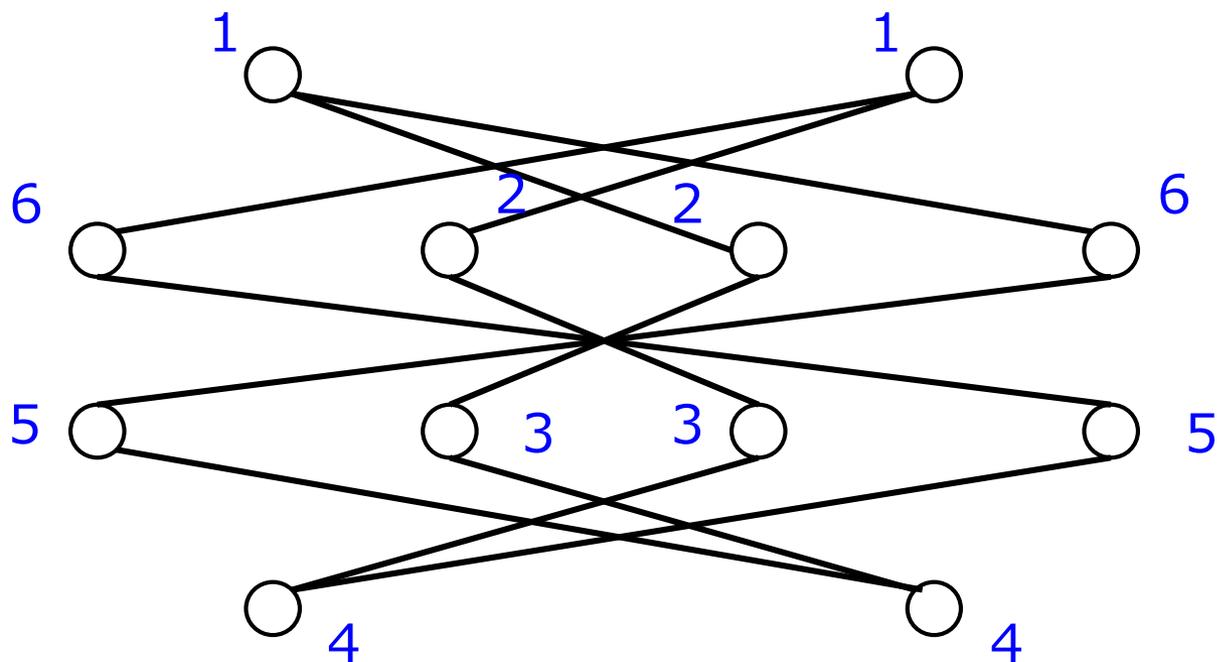
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 例: 全ての辺が正の2リフトの符号付け



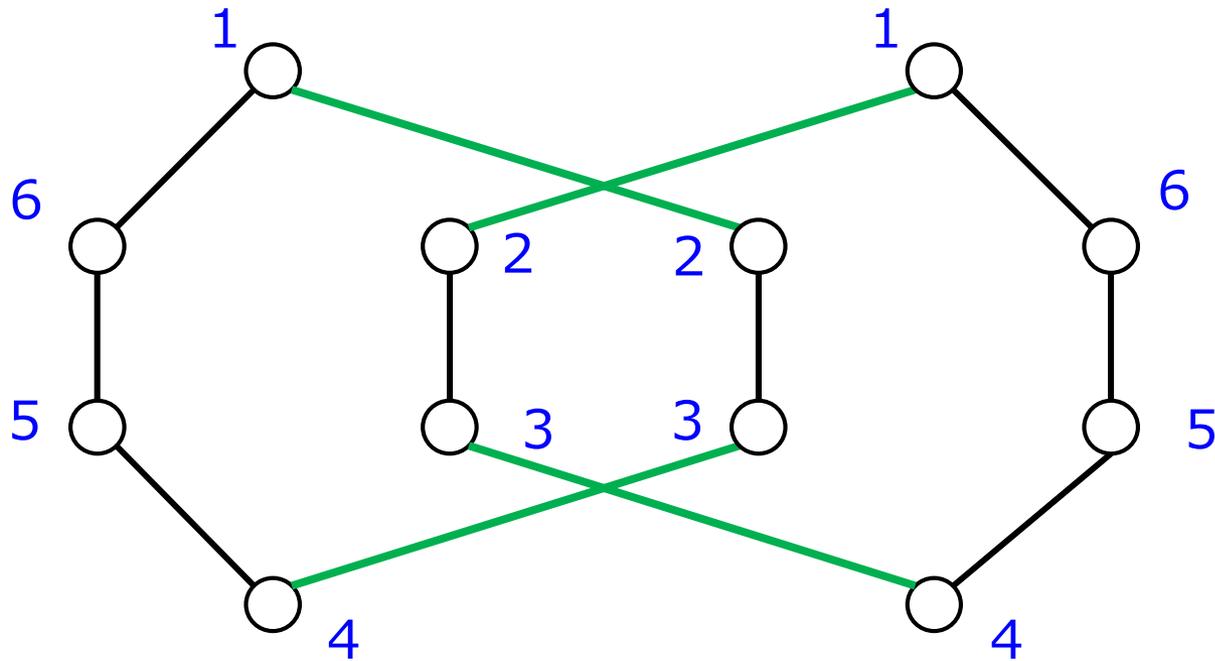
$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
 2 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\
 6 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0
 \end{pmatrix}$$

# 例: 全ての辺が負の2リフトの符号付け



$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
 \end{pmatrix}$$

# 例: (1,2) (3,4) のみが負の2リフトの符号付け



$$\begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
 2 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\
 5 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\
 6 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0
 \end{pmatrix}$$

# 符号付けとの関連 (証明は演習で)

定理 [Bilu-Linial 2006]

- $n$ 次隣接行列 $A(G)$  の固有値  $\lambda_1 \cdots \lambda_n$
- $A(G)$  の符号付け $A_s$  の固有値  $\pi_1 \cdots \pi_n$

このとき

2リフトの隣接行列は  $\lambda_1 \cdots \lambda_n$  と  $\pi_1 \cdots \pi_n$  を固有値にもつ

➤ つまり

- $A(G)$  の最大非自明固有値が小
- ある符号付け $s$  が存在して,  $A_s$  の最大固有値が小

⇒ 2リフトの隣接行列の最大非自明固有値が小

# 最大固有値が小さな符号付けの存在

定理 [Bilu-Linial 2006]

ある符号付け $s$ が存在して

$$|\lambda_i(A_s)| \leq 2\sqrt{(d-1)\log^3 d} \quad (i \geq 1)$$

➤ 2リフトを繰り返すと非自明固有値が $2\sqrt{(d-1)\log^3 d}$ 以下のグラフを構成可能

● 最初のグラフ：完全グラフ $K_{d+1}$ や完全二部グラフ $K_{d,d}$

□  $K_{d+1}$ の固有値  $[d, -1, \dots, -1]$

□  $K_{d,d}$ の固有値  $[d, 0, \dots, 0, -d]$

# Bilu-Linial の予想 と MSS2015が示したこと

予想 [Bilu-Linial 2006]

ある符号付け  $s$  が存在して  $|\lambda_i(A_s)| \leq 2\sqrt{d-1}$  ( $\forall i \geq 1$ )

□ 真なら 2リフトを用いてラマヌジャングラフを構成可能

## 部分的な解決

定理 [MSS FOCS13, 15]

ある符号付け  $s$  が存在して  $\lambda_{max}(A_s) \leq 2\sqrt{d-1}$

- 最小固有値を抑えていない
- 二部グラフならば  $\lambda_{min}(A_s) \geq -2\sqrt{d-1}$  も成立 (演習参照)

# 注意

---

## ▶ 符号付けの**存在のみ**

- **[未解決]** 効率的な符号付け方法

= ラマヌジャングラフの効率的な構成方法

- $2^{\tilde{O}(\sqrt[3]{m})}$ 時間アルゴリズム ( $m$ は辺数)

□ Anari-Gharan-Saberi-Srivastava SODA18

- $\leq 2\sqrt{(d-1)\log^3 d}$ を満たす符号付けは多項式時間

[Bilu-Linial06]

## ▶ ラマヌジャン**多重**・二部グラフは多項式時間で構成可能 [Cohen FOCS16]

- 完全マッチングの重ね合わせ [MSS FOCS15]

## ここまで：

---

- ▶ 小さな $d$ 正則グラフ から 大きな $d$ 正則グラフ を構成
  - 2リフト [Bilu-Linial2006]
  - できたグラフの固有値  $\iff$  符号付けた隣接行列の固有値

## これから：

- ▶ 最大固有値が小さな符号付けが存在
  - 多項式の関係：interlacing family of polynomials
  - 固有多項式の期待値 (mixed characteristic polynomials) の実根

最大固有値が小さな符号付けの存在

# 方針：特性方程式の根の解析

定理 [MSS FOCS13, 15]

ある符号付け  $s$  が存在して  $\lambda_{max}(A_s) \leq 2\sqrt{d-1}$

## ➤ 記法

- 対称行列  $A_s$  の特性多項式  $\chi[A_s](x) = \det(xI - A_s)$ 
  - 全ての根は実数 (**real-rooted**)
- その最大固有値 = 最大の根  $\lambda_{max}(\chi[A_s](x))$

## ➤ 観察 [Bilu-Linial 06]

- 確率  $1/2$  で正か負に符号付けしても一般にうまくいかない

→ 辺をひとつずつ符号付け

# 辺をひとつずつ符号付け

▶ 辺を適当に並べて,

- 最初の $k$  辺のみの符号付け  $t \in \{\pm\}^k$  ( $1 \leq k \leq m$ )
- 残りの辺を確率 $1/2$ で符号付け

したときの期待特性方程式

$$p_t(x) = \mathbb{E}_s[\chi[A_s](x) \mid s_1 = t_1, s_2 = t_2, \dots, s_k = t_k]$$

▶ 例

- $p_s(x) = \chi[A_s](x)$  : 符号付けした行列の特性多項式
- $p_\emptyset(x) = \mathbb{E}_s[\chi[A_s](x)]$  :

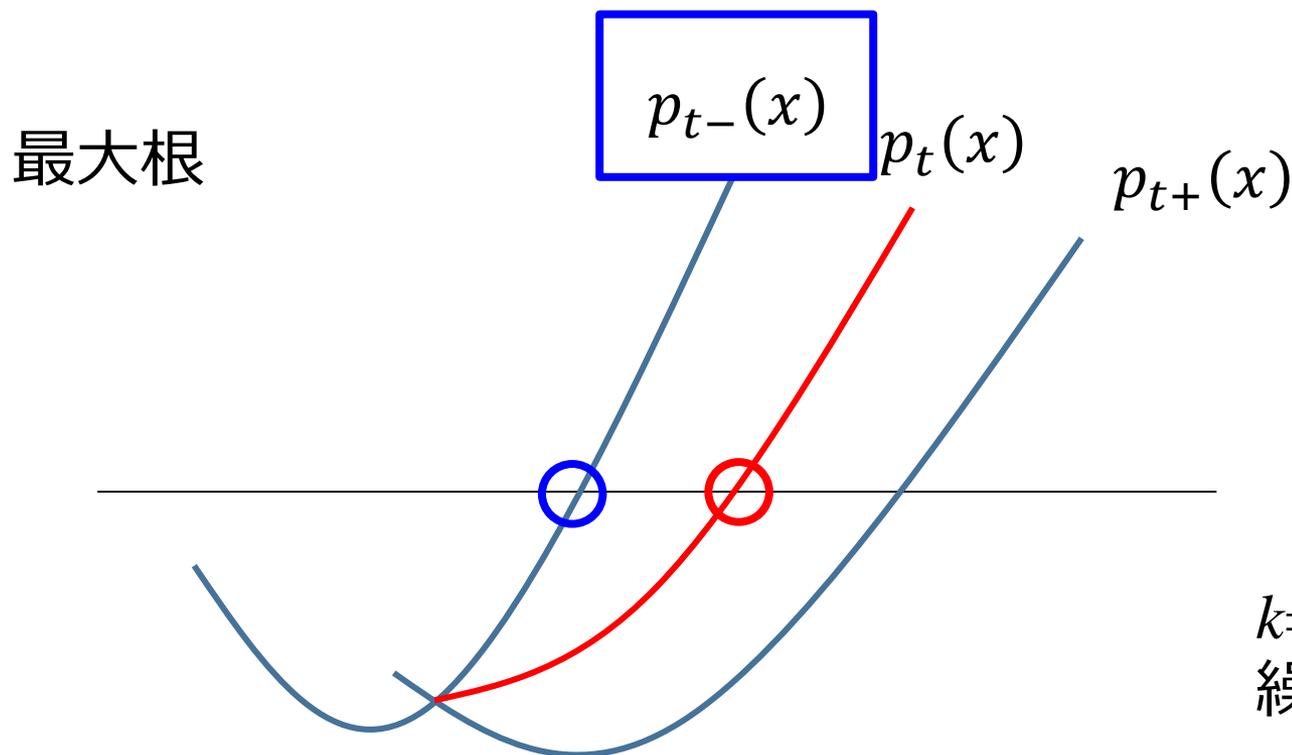
ランダムに符号付けした期待特性多項式

# やりたいこと：ただしいだろうか？

部分符号付け  $t \in \{\pm\}^k \Rightarrow k+1$ 番目の辺の符号

▶ 
$$p_t(x) = \frac{1}{2}p_{t+}(x) + \frac{1}{2}p_{t-}(x)$$

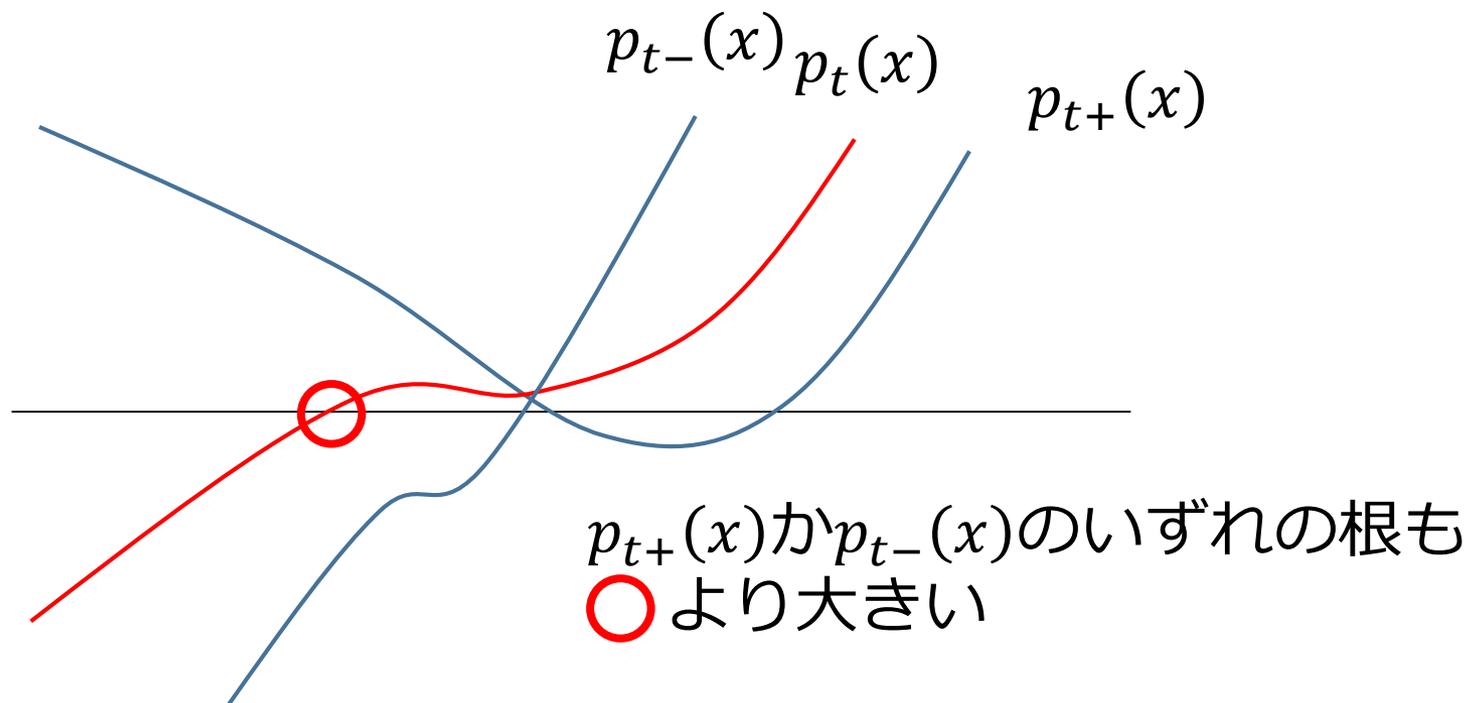
- $p_{t+}(x)$ か $p_{t-}(x)$ のいずれかの最大根は  $p_t(x)$ の最大根 以下  
→ 最大根が小さい符号を選べばよい



# (1) 成り立たない場合 (演習参照)

➤ 
$$p_t(x) = \frac{1}{2}p_{t+}(x) + \frac{1}{2}p_{t-}(x)$$

- $p_{t+}(x)$ か $p_{t-}(x)$ のいずれかの最大根は  $p_t(x)$ の最大根 以下



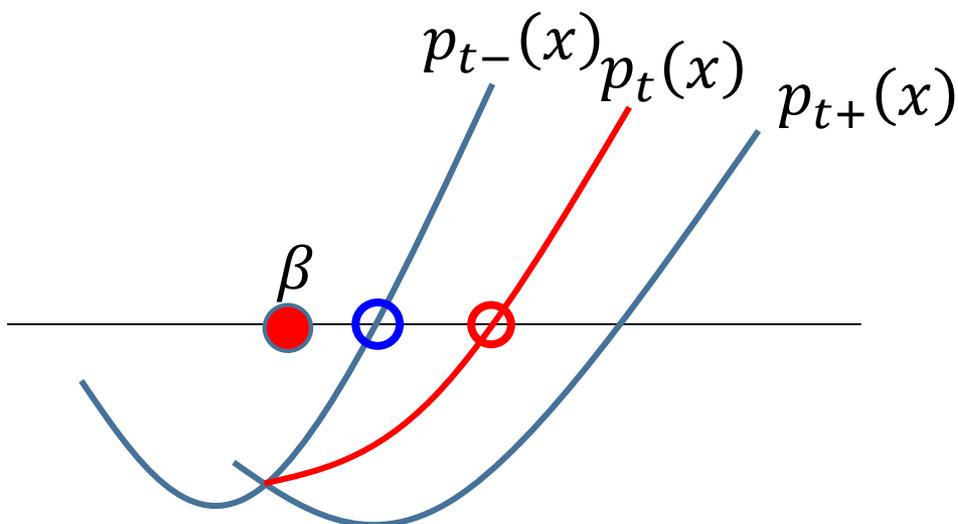
# (1) 成り立つ十分条件

証明手法：  
Interlacing family

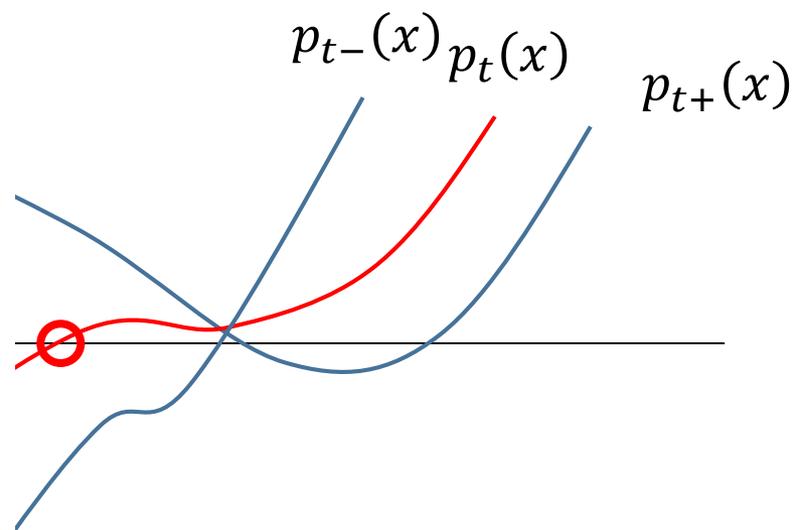
$$\triangleright p_t(x) = \frac{1}{2}p_{t+}(x) + \frac{1}{2}p_{t-}(x)$$

- $p_{t+}(x)$ と $p_{t-}(x)$ の根で, ある値 $\beta$ 以上のものが唯一 ならば
- $p_{t+}(x)$ か $p_{t-}(x)$ のいずれかの最大根 は  $p_t(x)$ の最大根 以下

**GOOD**



**BAD**



## (2) そもそも実数根をもつとは限らない

➤  $p_t(x)$  の根は複素数かもしれない

➡  $p_t(x), \forall t$  が real-rooted であることを示す必要

全ての根が実数

➤ 既知：極端なケース

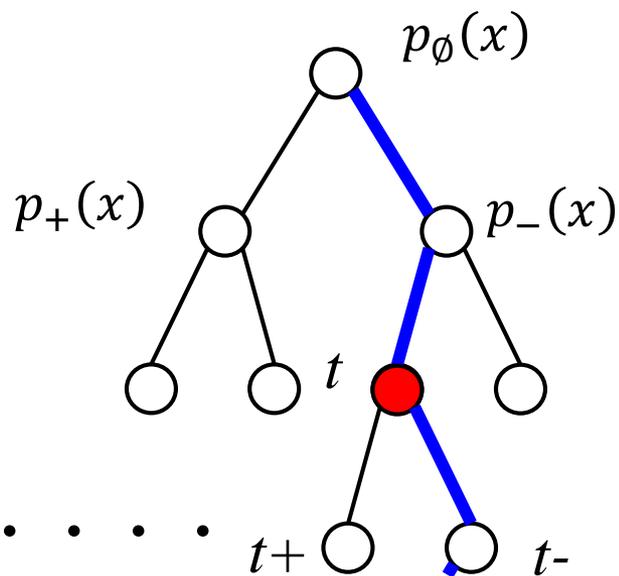
- $p_\emptyset(x)$  は real-rooted [Heilman-Lieb72, Godsil-Gutman 81]
- $p_S(x)$  は real-rooted (符号付けは対称行列)

Rem. 実数根をもつもの同士の和が実数根をもつとは限らない

- 和・差は real-rooted を保存しない
- $(x+1)(x+2) + (x-1)(x-2) = 2x^2 + 4$

実数根を持たない

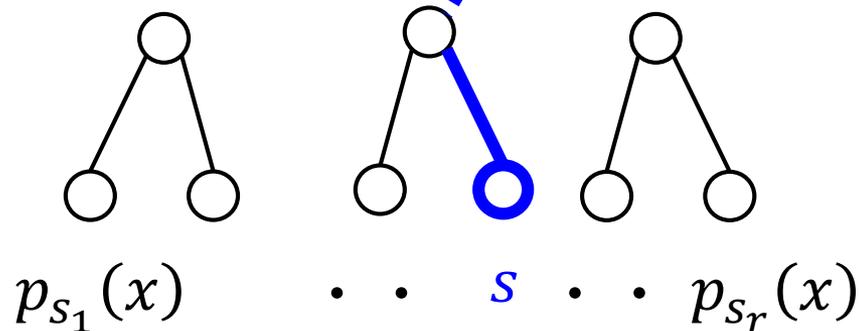
# (1) (2) を克服 $\Rightarrow$ くりかえせばよい



$$\forall t \in \{\pm\}^k$$

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{max}(p_{t+}(x)) \\ \lambda_{max}(p_{t-}(x)) \end{array} \right\} \leq \lambda_{max}(p_t(x))$$

$\rightarrow \dots \rightarrow$  最終的に  
すべての辺の符号を決定



符号付け

$$\exists s, \lambda_{max}(p_s(x)) \leq \lambda_{max}(p_\emptyset(x))$$

ルートの  
最大根を  
見積もればよい

# これから：具体的な解析方法

(1) 「ある値 $\beta$ 以上の根がちょうど一つ」を詳細に ②

- Interlacing family

(2)  $p_t(x), \forall t$  がreal-rootedであること ③

- ここからinterlaceすることとも言える

➤ 上の2つが言えれば  $\exists s, \lambda_{max}(p_s(x)) \leq \lambda_{max}(p_\emptyset(x))$  ①

- $p_\emptyset(x)$ について

- real-rootedであること

- 最大の根の大きさ $\leq 2\sqrt{d-1}$

①  $p_\emptyset(x) = \mathbb{E}_s[\chi[A_s](x)]$  について

= マッチング多項式

# マッチング多項式 [Heilman-Lieb 72]

定義：グラフ  $G$  のマッチング多項式

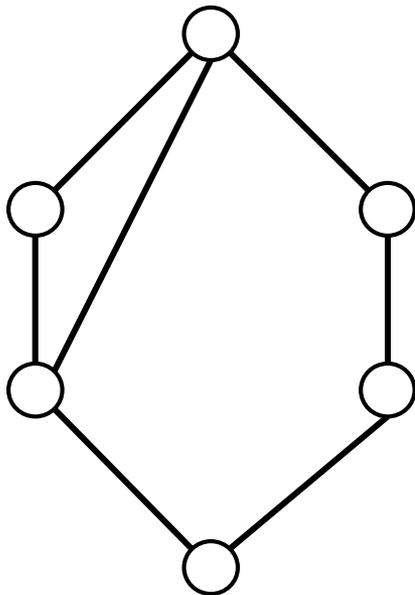
$$\mu[G](x) = \sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k} (-1)^k m_k(G)$$

- $m_k(G)$  : サイズ  $k$  のマッチングの個数
  - $m_{n/2}(G)$  : 完全マッチングの個数
  - $m_1(G)$  : 辺の数(サイズ1のマッチング)
  - $m_0(G)$  : 1と定義

# マッチング多項式 [Heilman-Lieb 72]

定義：グラフ  $G$  のマッチング多項式

$$\mu[G](x) = \sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k} (-1)^k m_k(G)$$



$$\mu[G](x) = x^6 - 7x^4 + 11x^2 - 2$$

$$m_0(G) = 1 \quad \text{定義}$$

$$m_1(G) = 7 \quad \text{\#辺}$$

$$m_2(G) = 11$$

$$m_3(G) = 2$$

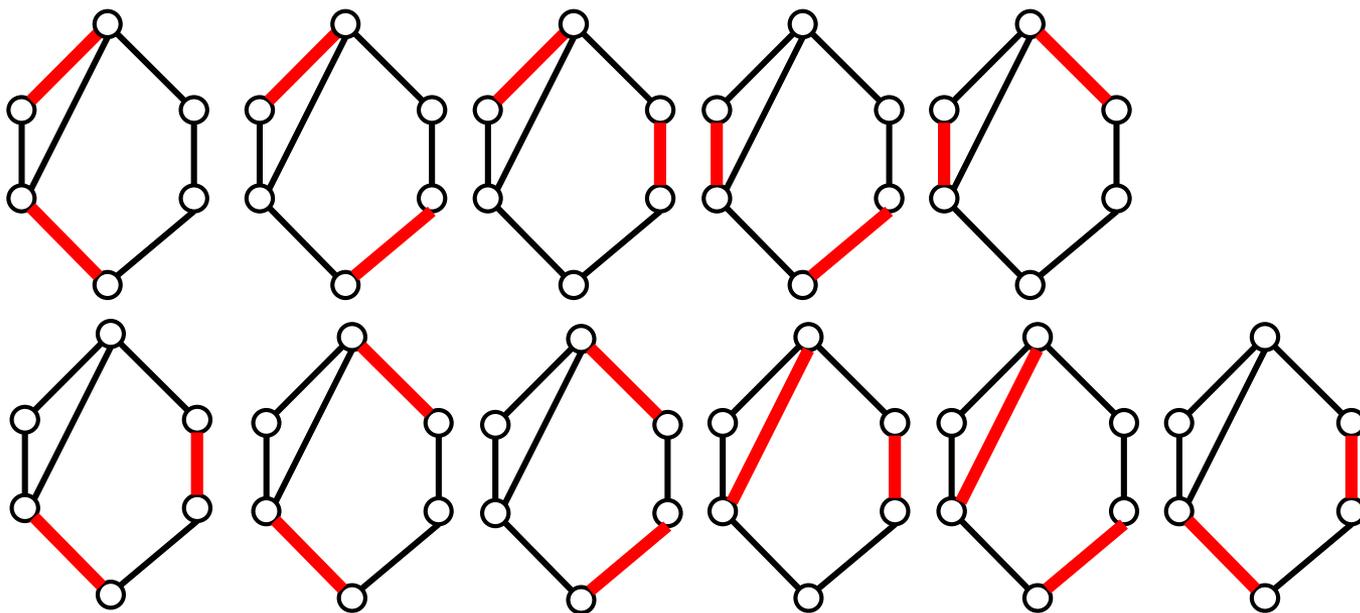
$$n = 6$$

# マッチング多項式 [Heilman-Lieb 72]

定義：グラフ  $G$  のマッチング多項式

$$\mu[G](x) = \sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k} (-1)^k m_k(G)$$

$$\mu[G](x) = x^6 - 7x^4 + 11x^2 - 2$$



$$m_0(G) = 1$$

$$m_1(G) = 7$$

$$m_2(G) = 11$$

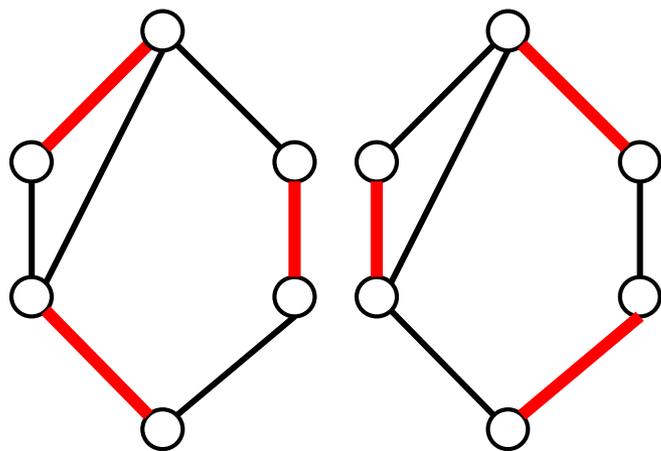
$$m_3(G) = 2$$

# マッチング多項式 [Heilman-Lieb 72]

定義：グラフ  $G$  のマッチング多項式

$$\mu[G](x) = \sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k} (-1)^k m_k(G)$$

$$\mu[G](x) = x^6 - 7x^4 + 11x^2 - 2$$



$$m_0(G) = 1$$

$$m_1(G) = 7$$

$$m_2(G) = 11$$

$$m_3(G) = 2$$

#完全マッチング

# マッチング多項式の根 [Heilman-Lieb 72]

定義：グラフ  $G$  のマッチング多項式

$$\mu[G](x) = \sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k} (-1)^k m_k(G)$$

定理 [Heilman-Lieb 72]

- マッチング多項式の根はすべて実数
- 最大の根の大きさ  $\leq 2\sqrt{d-1}$

最大次数

# 期待特性多項式 = マッチング多項式 (演習)

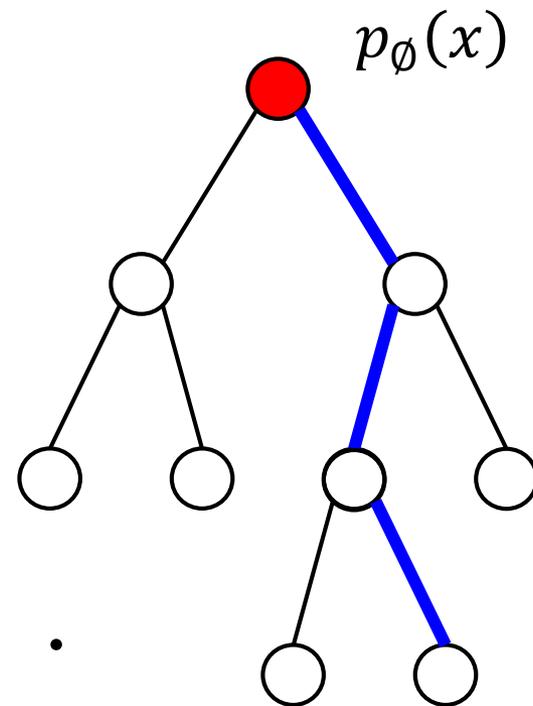
定理 [Godsil-Gutman 81]

$$\mathbb{E}_S[\chi[A_S](x)] = \text{マッチング多項式}$$

確率1/2で+ - に符号付け

▶ ルート  $p_\emptyset(x) = \mathbb{E}_S[\chi[A_S](x)]$  では

- 根はすべて実数
- 最大の根の大きさ  $\leq 2\sqrt{d-1}$



# これから：具体的な解析方法

- ▶ 「ある値 $\beta$ 以上の根がちょうど一つ」を詳細に ②
  - Interlacing family
  
- ▶  $p_t(x), \forall t$  が real-rooted であること ③
  - ここから interlace することも言える
  
- ▶ 上の2つが言えれば  $\exists s, \lambda_{max}(p_s(x)) \leq \lambda_{max}(p_\emptyset(x))$  ①
  - $p_\emptyset(x)$  について
    - real-rooted であること
    - 最大の根の大きさ  $\leq 2\sqrt{d-1}$

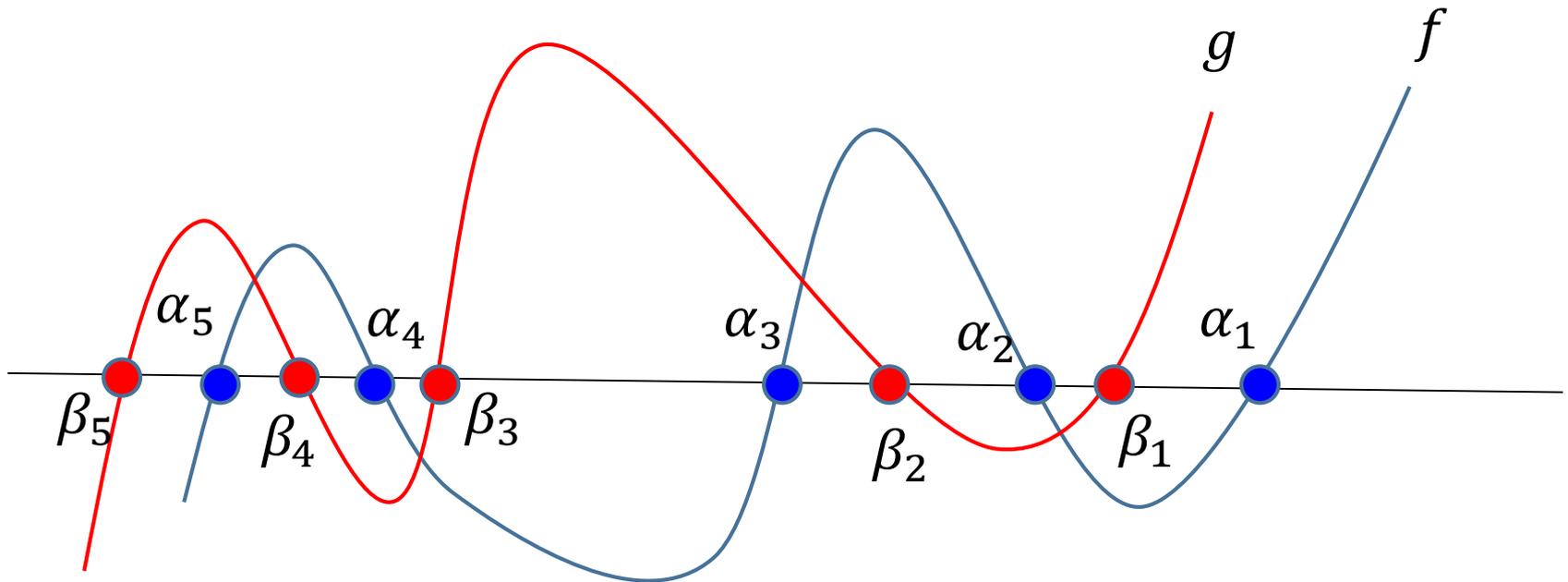
## ② Interlacing Family of Polynomials

複数の多項式の関係

# 定義 : $g$ interlaces $f$ (織り交ざる)

- $f$  : 次数  $n$  の多項式. 全ての根は実数  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$
- $g$  : 次数  $n$  (or  $n-1$ ) の多項式. 全ての根は実数  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$
- $n-1$  次の場合は  $\beta_n$  なし

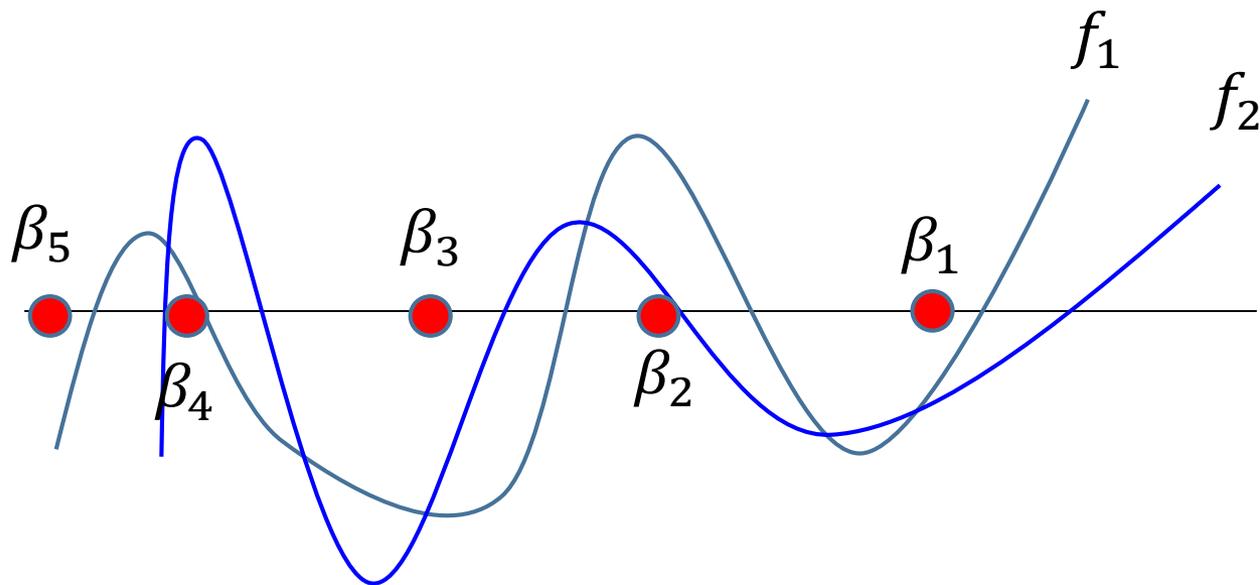
$$(\beta_n \leq) \alpha_n \leq \beta_{n-1} \leq \dots \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$$



# 定義：Common interlacing $g$ of $f_1, \dots, f_m$

- 任意の  $i$  に対して  $g$  interlaces  $f_i$

➤  $g$  : common interlacing



各区間に  $f_i$  の解ひとつずつ

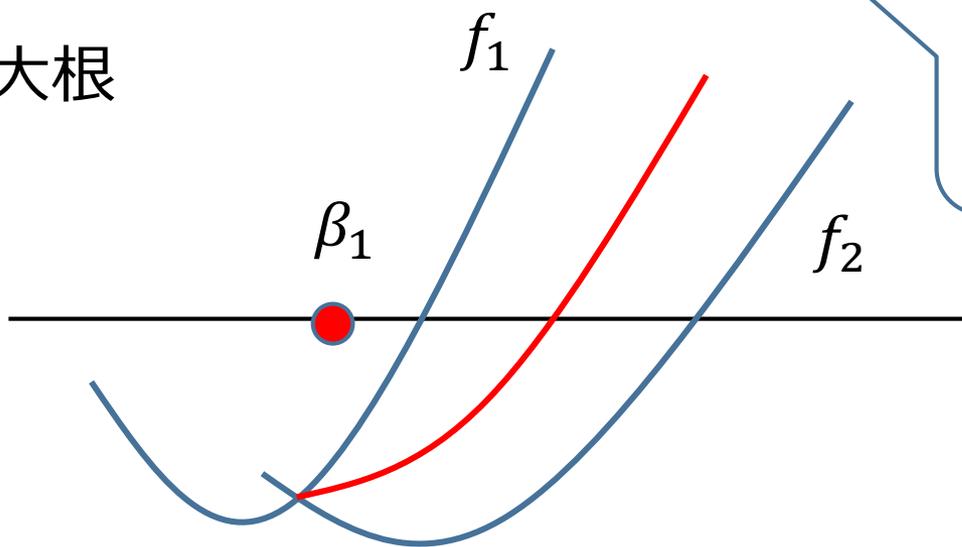
# Common interlacing の性質

- $f_1, \dots, f_m$ : 次数  $n$ , 首位係数が正の多項式
  - 全ての根は実数.  $\lambda_k(f_j)$ :  $f_j$  の  $k$  番目に大きな根

もし  $f_1, \dots, f_m$  が common interlacing をもつならば,

$$\min_j \lambda_k(f_j) \leq \lambda_k\left(\sum_{j=1}^m c_j f_j\right) \leq \max_j \lambda_k(f_j) \quad \forall k$$

最大根



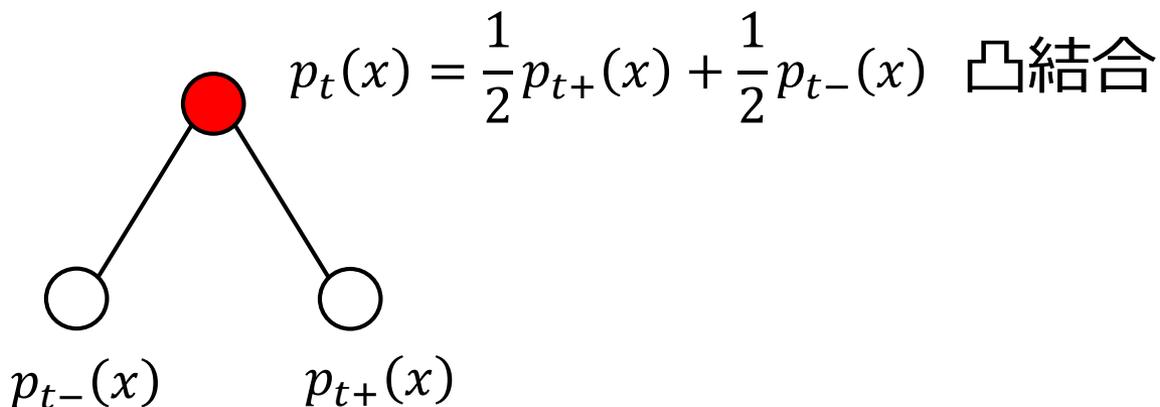
多項式  $f_1, \dots, f_m$   
の凸結合

# 部分符号付けへの適用

命題：任意の部分符号付け  $t \in \{\pm\}^k$  に対して

- $p_{t_+}(x)$  と  $p_{t_-}(x)$  が real-rooted
- $p_{t_+}(x)$  と  $p_{t_-}(x)$  が common interlacing をもつ

$$\min \left\{ \lambda_{\max}(p_{t_+}(x)), \lambda_{\max}(p_{t_-}(x)) \right\} \leq \lambda_{\max}(p_t(x)) \leq \max \left\{ \lambda_{\max}(p_{t_+}(x)), \lambda_{\max}(p_{t_-}(x)) \right\}$$



# Real-Rooted $\Rightarrow$ Common Interlacing

命題：任意の部分符号付け  $t \in \{\pm\}^k$  に対して

- $p_{t+}(x)$  と  $p_{t-}(x)$  が real-rooted
- ~~$p_{t+}(x)$  と  $p_{t-}(x)$  が common interlacing をもつ~~
- **$\theta p_{t+}(x) + (1 - \theta)p_{t-}(x)$  が real-rooted ( $\forall \theta \in [0, 1]$ )**

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\max}(p_{t+}(x)) \\ \lambda_{\max}(p_{t-}(x)) \end{array} \right\} \leq \lambda_{\max}(p_t(x)) \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\max}(p_{t+}(x)) \\ \lambda_{\max}(p_{t-}(x)) \end{array} \right\}$$

命題 [Dedieu92, Fell80, Chudonovsky-Seymour07]

- $f_1, \dots, f_m$ : 次数  $n$  の多項式.

もし任意の凸結合  $\sum_j c_j f_j$  が real-rooted ならば

$f_1, \dots, f_m$  が common interlacing をもつ

# これから示したいこと

定理：以下の多項式がreal-rooted:

- 任意の  $\theta \in [0,1]^m$  に対して,

$$q(x) = \sum_{s \in \{\pm\}^m} \prod_{s_i=+} \theta_i \prod_{s_i=-} (1 - \theta_i) p_s(x)$$

- 上より
  - $p_{t+}(x)$  と  $p_{t-}(x)$  が real-rooted
  - $\theta p_{t+}(x) + (1 - \theta)p_{t-}(x)$  が real-rooted ( $\forall \theta \in [0,1]$ )

⇒ ある符号付け  $s$  が存在して

$$\lambda_{\max}(p_s(x)) \leq \lambda_{\max}(p_\emptyset(x)) \leq 2\sqrt{d-1}$$

### ③ 実数根をもつこと

多変数多項式のreal-stability

# これから示したいこと

▶ 以下の多項式がreal-rooted:

- 任意の  $\theta \in [0,1]^m$  に対して,

$$q(x) = \sum_{s \in \{\pm\}^m} \prod_{s_i=+} \theta_i \prod_{s_i=-} (1 - \theta_i) p_s(x)$$

▶ 式変形すると

$$i = (u, v)$$

$$q(x) = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_{i=1}^m r_i r_i^T + dI \right) \right]$$

ランダムベクトル

$$r_i \in \mathbb{R}^V$$

$$r_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} < u \\ < v \end{matrix}$$

確率  $\theta_i$        $1 - \theta_i$

# 式変形) 隣接行列 $A$ と 符号付け行列 $A_s$ の変形 <sup>46</sup>

▶ 隣接行列 = 1辺の隣接行列の和

$$A = \sum_{(u,v) \in E} A_{(u,v)}$$

$$A_{(u,v)} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u \ v \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \\ \text{ほかは0} \end{array}$$

▶ 符号付けした隣接行列

$$A_s = \sum_{(u,v) \in E} s_{u,v} A_{(u,v)}$$

$$s_{u,v} A_{(u,v)} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u \ v \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} s_{u,v} \\ s_{u,v} \end{array} \\ \end{array}$$

# 式変形) 符号付け $A_S$ の一つの項

$$A_S = \sum_{(u,v) \in E} s_{u,v} A_{(u,v)}$$

$$r_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ s_{u,v} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} < u \\ < v \end{matrix}$$

▶ 一つの項 = ランク1の行列の和

$$s_{u,v} A_{(u,v)} = r_{(u,v)} r_{(u,v)}^T - e_u e_u^T - e_v e_v^T$$

$$\begin{array}{|c|} \hline s_{u,v} \\ \hline s_{u,v} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline 1 & s_{u,v} \\ \hline s_{u,v} & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$e_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < v$$

# 式変形) $A_S$ をランク1行列の和に変形

$$A_S = \sum_{(u,v) \in E} s_{u,v} A_{(u,v)}$$

$$r_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ s_{u,v} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} < u \\ < v \end{matrix}$$

$$= \sum_{(u,v) \in E} (r_{(u,v)} r_{(u,v)}^T - e_u e_u^T - e_v e_v^T)$$

$$= \sum_{(u,v) \in E} r_{(u,v)} r_{(u,v)}^T - dI$$

$$q(x) = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_{i=1}^m r_i r_i^T + dI \right) \right]$$

$$r_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} < u \\ < v \end{matrix}$$

確率  $\theta_i$   
正

$1 - \theta_i$   
負

# (再掲) これから示したいこと

▶ 以下の多項式がreal-rooted :

- 任意の  $\theta \in [0,1]^m$  に対して,

$$q(x) = \sum_{s \in \{\pm\}^m} \prod_{s_i=+} \theta_i \prod_{s_i=-} (1 - \theta_i) p_s(x)$$

▶ 以下がreal-rooted であることを示せばよい

$$q(x - d) = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_{i=1}^m r_i r_i^T \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \chi \left[ \sum_{i=1}^m r_i r_i^T \right] (x) \right]$$

$dI$  だけ並行移動

ランク1行列の和の  
特性多項式の期待値

# より一般的なことが言える

## 定理 [MSS15]

- $r_1, \dots, r_m$  **任意の**独立なランダム  $n$  次複素ベクトル  
このとき

$$\mathbb{E} \left[ \chi \left[ \sum_{i=1}^m r_i r_i^* \right] (x) \right] = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_i r_i r_i^* \right) \right]$$

(は real-rooted)

mixed characteristic polynomial

Rem: 多項式が Real-rooted を示すのは一般に難しい

- 和・差は Real-rooted を保存しない
- **多変数**多項式に対する Real-stability
  - Real-stability をたもつ操作 [Lieb-Sokal 81]

# 定義: real-stable

多変数多項式  $f \in \mathbb{R}[z_1, z_2, \dots, z_m]$  が **real-stable** :

$$\text{Im}(z_i) > 0, \forall i \Rightarrow f(z_1, \dots, z_m) \neq 0$$

虚部

strictly upper half plane に根がない

$$f(z_1, \dots, z_m) = 0 \Rightarrow \exists i, \text{Im}(z_i) \leq 0$$

## ➤ 観察

- 1変数多項式  $f$  が real-rooted  $\Leftrightarrow f$  は real-stable

# real-stableを保つ操作

補題 [Lieb-Sokal 1981]

$f(z_1, \dots, z_m)$  が real-stable ならば以下も real-stable

- $\left(1 - \frac{\partial}{\partial z_i}\right) f, \forall i$

- $f(\alpha, z_2, \dots, z_m)$

変数を固定した方程式

補題 [Borcea-Brändén 2008]

- $A_1, \dots, A_m$  半正定値対称

このとき  $\det(\sum_{i=1}^m z_i A_i)$  は real-stable

mixed discriminant

# (再掲) より一般的なことが言える

## 定理 [MSS15]

- $r_1, \dots, r_m$  **任意の**独立なランダム  $n$  次複素ベクトル  
このとき

$$\mathbb{E} \left[ \chi \left[ \sum_{i=1}^m r_i r_i^* \right] (x) \right] = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_i r_i r_i^* \right) \right]$$

(は real-rooted)

mixed characteristic polynomial

# Mixed Char. Poly. の式変形

## 補題 [MSS15]

- $r_1, \dots, r_m$  **任意の**独立なランダム  $n$  次複素ベクトル

このとき

$$\mathbb{E}[\chi[\sum_{i=1}^m r_i r_i^*](x)]$$

$r_i$  の共分散行列  $\mathbb{E}r_i r_i^*$

$$= \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right) \det \left( xI + \sum_{i=1}^m z_i A_i \right) \Big|_{z_1 = \dots = z_m = 0}$$

$x, z_1, \dots, z_m$  の多項式

# 補題 $\Rightarrow$ Real-rootedness

## 補題 [MSS15]

- $r_1, \dots, r_m$  **任意の**独立なランダム  $n$ 次複素ベクトル

このとき

$$\mathbb{E}[\chi[\sum_{i=1}^m r_i r_i^*](x)]$$

$$= \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 - \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right) \det \left( xI + \sum_{i=1}^m z_i A_i \right) \Big|_{z_1 = \dots = z_m = 0}$$

$r_i$ の共分散行列  $\mathbb{E}r_i r_i^*$

Real-stable (半正定値の和)  
[Borcea-Brändén 2008]

Real-stable (偏微分と数値の割り当て)  
[Lieb-Sokal 1981]

# 補題の証明：以下を帰納的にもちいる

## 補題

- $r$  : ランダムなベクトル

$$\mathbb{E}[\det(A - rr^*)] = \left(1 - \frac{\partial}{\partial t}\right) \det(A + t\mathbb{E}rr^*) \Big|_{t=0}$$

➤ 上は以下の線形代数から (演習)

$A$ : 正則

$$\det(A + uv^*) = \det A (1 + v^* A^{-1}u)$$

# まとめ：証明の概観

➤ Mixed characteristic polynomial は Real-rooted

$$\mathbb{E}[\chi[\sum_{i=1}^m r_i r_i^*](x)] = \mathbb{E}[\det(xI - \sum_i r_i r_i^*)]$$

⇒  $\forall$  部分符号付け  $t$  に対して  $p_t(x)$  は real-rooted

$$p_t(x) = \mathbb{E}_s[\chi[A_s](x) \mid s_1 = t_1, s_2 = t_2, \dots, s_k = t_k]$$

$p_{t_+}(x), p_{t_-}(x)$  は common interlacing をもつ

⇒  $\exists$  符号付け  $s, \lambda_{\max}(p_s(x)) \leq \lambda_{\max}(p_\emptyset(x)) \leq 2\sqrt{d-1}$   
マッキング多項式

⇒ 2リフトを繰返し用いてラマヌジャングラフを構成

- できたグラフの非自明固有値  $\leq 2\sqrt{d-1}$

# グラフと線形代数 その3: 総括

垣村尚徳  
慶應義塾大学

# MSS15の主定理

## 定理

- $r_1, \dots, r_m$  任意の独立なランダム  $n$  次複素ベクトル  
このとき

mixed characteristic polynomial は real-rooted

$$\mathbb{E} \left[ \chi \left[ \sum_{i=1}^m r_i r_i^* \right] (x) \right] = \mathbb{E} \left[ \det \left( xI - \sum_i r_i r_i^* \right) \right]$$

ランク1行列の和の  
特性方程式の期待値

# 主定理 + Interlacing Family [MSS15]

定理 (Comparison with Expected Polynomial)

- $r_1, \dots, r_m$  任意の独立なランダム  $n$  次複素ベクトル  
このとき, 任意の  $k$  に対して  
確率正で以下が成り立つ ( $\leq$  も同様)

$$\lambda_k \left( \sum_i r_i r_i^* \right) \geq \lambda_k \left( \mathbb{E} \left[ \sum_i r_i r_i^* \right] \right)$$

$k$  番目に大きな固有値

# 汎用的な証明手法

---

- ▶ いろいろな問題を同様の手法で解ける
  - Kadison-Singer problem (in operator theory)
    - [Marcus-Spielman-Srivastava II 2015]
  - Restricted invertibility
    - [Marcus-Spielman-Srivastava III 2015]
  - 任意の頂点数 $n$  (偶数) と次数 $d$  に対してラマヌジャン多重グラフが存在
    - [Marcus-Spielman-Srivastava IV FOCS15]
  - Asymmetric TSPの整数性ギャップが $O(\text{polylog } \log n)$ 
    - [Anari-Gharan FOCS15]

# Restricted Invertibility

定理

[Shrpen-Youseff12, Spielman-Srivastava11]

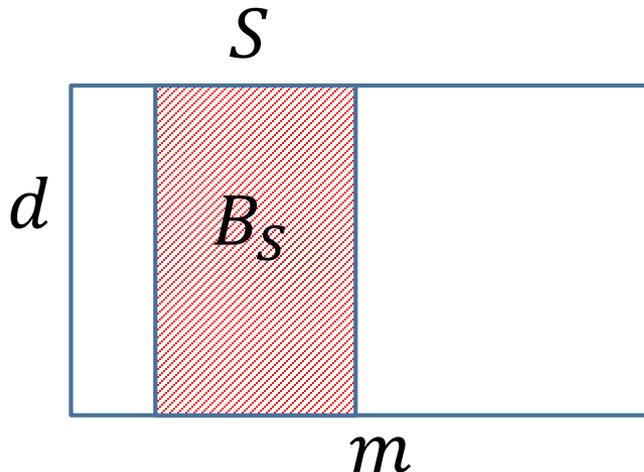
- $d \times m$  行列  $B$  s.t.  $BB^T = I$

任意の  $k \leq d$  に対して,

サイズ  $k$  の列部分集合  $S$  が存在して

$$\sigma_{\min}(B_S)^2 \geq \left(1 - \sqrt{\frac{k}{d}}\right)^2 \left(\frac{d}{m}\right)$$

最小特異値が大きい“ロバスト”な線形独立集合



# Restricted Invertibility の証明の流れ

- ▶  $B$ の列ベクトル  $v_1, \dots, v_m$  から  $k$ 個独立に選択する
  - 主定理より

$$\lambda_k \left( \sum_i r_i r_i^* \right) \geq \lambda_k \left( \mathbb{E} \left[ \sum_i r_i r_i^* \right] \right)$$

- ▶ 右辺  $\mathbb{E}[\sum_i r_i r_i^*]$  は Laguerre 多項式 と一致  
⇒ 実根の範囲が分かる [Krasikov06]

⇒ Interlacing family を用いて改善 [MSS15]

# Kadison-Singer Problem 1959

---

- Does every pure state on the abelian von Neumann algebra  $D(\ell_2)$  of diagonal operators on  $\ell_2$  have a unique extension to a pure state on  $B(\ell_2)$ , the von Neumann algebra of all bounded operators on  $\ell_2$  ?

MSS 2014より引用

- 1959年来未解決
- 数多くの応用
- 多くの等価な言明

# Weaver's Conjecture $\Rightarrow$ KS problem

予想 [Weaver04]

$\exists \alpha, \varepsilon > 0$  such that the following holds:

- $v_1, \dots, v_m$   $n$ 次複素ベクトル
- $\sum_i v_i v_i^* = I$  and  $\|v_i\|^2 \leq \alpha, \forall i$

このとき  $\{1, \dots, m\}$  の分割  $S_1, S_2$  が存在して

$$\left\| \sum_{i \in S_\ell} v_i v_i^* \right\| \leq 1 - \varepsilon, \quad \forall \ell = 1, 2$$

# Weaverの予想の解決

## 定理 [MSS15]

●  $v_1, \dots, v_m$   $n$ 次複素ベクトル

□  $\sum_i v_i v_i^* = I$  and  $\|v_i\|^2 \leq \alpha, \forall i$

このとき  $\{1, \dots, m\}$  の分割  $S_1, S_2$  が存在して

$$\left\| \sum_{i \in S_\ell} v_i v_i^* \right\| \leq \frac{(1 + \sqrt{2\alpha})^2}{2}$$

➤ 確率  $1/2$  で  $S_1$  に含める → 主定理の利用

➤ 右辺  $\mathbb{E} [\sum_i v_i v_i^*]$  の根の上界

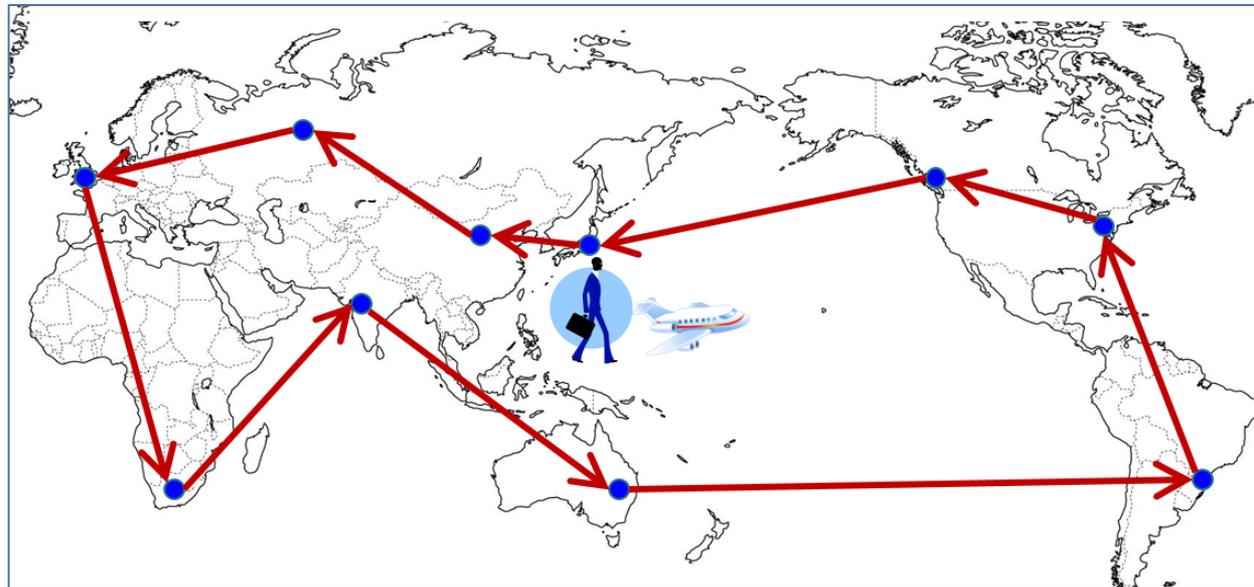
● Barrier Argument [Batson-Spielman-Srivastava2012]

# 対称/非対称 巡回セールスマン問題

- $n$  個の頂点をちょうど一度ずつ回る最短ツアーを求める
- 二頂点間の距離  $c$  : 三角不等式を満たす
  - $c(i, j) \leq c(i, k) + c(k, j), \forall i, j, k$

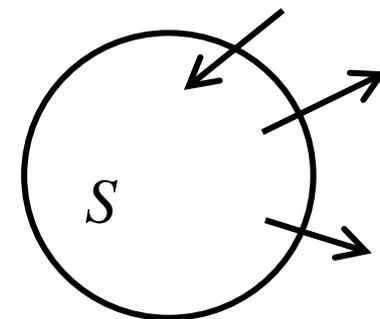
## ▶ 変種

- 対称 :  $c(i, j) = c(j, i), \forall i, j$
- 非対称 : 対称ではない



# Asymmetric TSPのLP緩和 [Held-Karp72]

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i,j} c(i,j)x_{i,j} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_j x_{i,j} = \sum_j x_{j,i} \quad \forall i \in V \\
 & \sum_{i \in S, j \notin S} x_{i,j} \geq 1 \quad \forall S \subset V \\
 & 0 \leq x_{i,j} \quad \forall i, j
 \end{aligned}$$



整数性ギャップ :  $\max_c \frac{\text{TSPの最適値}}{\text{LPの最適値}}$

(TSPの最適値  $\geq$  LPの最適値)

# Asymmetric TSPの整数性ギャップ

---

## ➤ Symmetric case

- 1.5 近似アルゴリズム [Christofides76]
- **[未解決]** 整数性ギャップ  $4/3$  ?

## ➤ Asymmetric case

- $\geq 2$  [Charikar-Goemans-Karloff 06]
- $O(\log n / \log \log n)$ 
  - [Asadpour-Goemans-Madry-Gharan-Saberi SODA09]
  - 近似アルゴリズム
- $O(\text{polylog } \log n)$  非構成的 [Anari-Gharan FOCS15]
- 定数 ( $\approx 5500$ ) [Svensson-Tarnawski-Végh STOC18]
  - 近似アルゴリズム
- **[未解決]** 改良できるか？

# まとめ

---

## ➤ 証明手法

- Mixed characteristic polynomials と Interlacing family

## ➤ 様々な問題を解決

- **$d$ 正則二部ラマヌジャングラフの存在 [MSS FOCS13, 15]**
  - **[未解決]** ラマヌジャングラフの効率的な構成方法
  - **[未解決]** 二部グラフではない場合
- Kadison-Singer problem [MSS II 15]
- Restricted invertibility [MSS III 15]
- 任意の頂点数 $n$  (偶数) と次数 $d$  に対してラマヌジャン多重グラフが存在 [MSS IV FOCS15]
- Asymmetric TSPの整数性ギャップが $O(\text{polylog log } n)$ 
  - [Anari-Gharan FOCS15]

# Appendix: Spectral Aspects of Symmetric Signing

# 最大固有値が小さな符号付けの存在

定理 [MSS FOCS13, 15]

ある符号付け $s$ が存在して  $\lambda_{max}(A_s) \leq 2\sqrt{d-1}$

符号+-を割り当て

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 対称行列に符号をつける問題

入力：対称行列  $A$

目的：  $A$  の符号付けで**固有値に関する性質**を満たす

- 対称性をたもったまま

## 計算複雑度と構成方法

- 最大固有値が小さい
- 正則
- 非正則
- 半正定値
- …

符号+ - を割り当て

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

非正則

正則

# 対称行列に符号をつける問題

入力：対称行列  $A$

目的：  $A$  の符号付けで**固有値に関する性質**を満たす

- 対称性をたもったまま

## 計算複雑度と構成方法

- 正則
- 非正則
- 半正定値
- 最大固有値が小さい
- **[未解決]** グラフの隣接行列の場合

( Carlson-Chandrasekaran-  
Chang-Kakimura-Kolla 18+ )

**多項式時間**

**NP困難**

**NP困難**

**NP困難**

# 主結果：正則な符号付けに対する組合せ的特徴付け<sup>18</sup>

[定理] 以下の二つが等価

- 対称行列  $A$  が**正則な**符号付けをもつ
- $A$  に関するグラフ  $G(A)$  が**サイクル被覆**をもつ

➤  $\Rightarrow$  は簡単

➤  $\Leftarrow$  の証明

- 非構成的: Combinatorial Nullstellensatz [Alon99] を利用
  - 多項式の根がある範囲に存在するか？
- **再帰的な構成アルゴリズム**

未解決: Combinatorial Nullstellensatz の構成的な方法

ありがとうございました