室田一雄，杉原正顯: 線形代数II，
東京大学工学教程，丸善出版，
2013.

符号制約のある新しい変数 $\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0}$,
…とき，

$$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b} \iff \begin{bmatrix} A & -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} \geqq \mathbf{0}$$

が成り立つが，上式の $\iff$ の右側は式 (3.9) の形である．この式の “$\iff$” の意味を正確に述べると，右側の条件を満たす $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{s})$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ が左側の条件を満たし，逆に，左側の条件を満たす $\boldsymbol{x}$ に対して右側の条件と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ の関係を満たす $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{s})$ が存在するということである．

3.2　Fourier–Motzkin の消去法

連立方程式を解くときに，二つの方程式を組み合わせることによって変数を消去するという考え方 (**消去法**) は，理論上も数値計算上もきわめて重要である．とくに線形方程式系に対する消去法は，Gauss の消去法として確立され，実用に供されている．不等式系に対しても，同様に，不等式を組み合わせることによって変数を消すという発想はきわめて自然であるが，これを系統的な手順として与えたものが **Fourier–Motzkin** (フーリエ–モツキン) **の消去法**である．なお，Fourier–Motzkin の消去法は不等式系に対する消去法の基本原理を与えるという意味で重要であるが，数値計算のアルゴリズムとしては効率が悪く，これを実際の数値計算に用いることはほとんどない．実際の数値計算には，線形計画法 (3.5 節) における単体法の系統のアルゴリズムが利用される．

与えられた不等式系が

$$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$$

の形であるとする．ここで，行列 A は $m \times n$ 型行列，ベクトル $\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトルとする．上の不等式系を成分ごとに書けば

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.10}$$

である．

第 1 変数 x_1 を消去するために，x_1 の係数 a_{i1} の符号によって不等式を分類する．記号が煩雑になるのを避けるため，最初の m_1 個が正 $(a_{11}, \ldots, a_{m_1 1} > 0)$,

次の m_2 個が負 $(a_{m_1+1,1},\ldots,a_{m_1+m_2,1}<0)$，残りの $m_0=m-m_1-m_2$ 個が 0 $(a_{m_1+m_2+1,1},\ldots,a_{m1}=0)$ とする．さらに，不等式は正の数で割って規格化できるので，正の係数は 1，負の係数は -1 であるとする．このとき，不等式系 (3.10) は

$$x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \leqq b_i \quad (i=1,\ldots,m_1), \tag{3.11}$$

$$-x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n \leqq b_k \quad (k=m_1+1,\ldots,m_1+m_2), \tag{3.12}$$

$$a_{l2}x_2+\cdots+a_{ln}x_n \leqq b_l \quad (l=m_1+m_2+1,\ldots,m) \tag{3.13}$$

となる．

式 (3.11) の m_1 本の不等式は

$$x_1 \ \leqq \ \min_{1\leqq i\leqq m_1}(b_i-(a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n))$$

と同値であり，式 (3.12) の m_2 本の不等式は

$$\max_{m_1+1\leqq k\leqq m_1+m_2}(a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n-b_k) \ \leqq \ x_1$$

と同値であるから，両方を合わせて

$$\max_{m_1+1\leqq k\leqq m_1+m_2}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{kj}x_j-b_k\right)\leqq x_1\leqq \min_{1\leqq i\leqq m_1}\left(b_i-\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_j\right) \tag{3.14}$$

が得られる．これより

$$\max_{m_1+1\leqq k\leqq m_1+m_2}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{kj}x_j-b_k\right) \ \leqq \ \min_{1\leqq i\leqq m_1}\left(b_i-\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

が導かれるが，この条件は，任意の $i=1,\ldots,m_1$ と任意の $k=m_1+1,\ldots,m_1+m_2$ に対して

$$\sum_{j=2}^{n}a_{kj}x_j-b_k \ \leqq \ b_i-\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_j \tag{3.15}$$

が成り立つことと等価である．移項して整理すると

$$\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}+a_{kj})x_j \ \leqq \ b_i+b_k \qquad (i=1,\ldots,m_1;\ k=m_1+1,\ldots,m_1+m_2) \tag{3.16}$$

となる．これは，式 (3.11) の i 番目の不等式と式 (3.12) の k 番目の不等式を加え合わせて新たな不等式を生成することを，すべての (i, k) に対して行った結果に一致している．

以上の変形により，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に関する不等式系 (3.11), (3.12), (3.13) は，$(x_2, \ldots, x_n)$ に関する不等式系 (3.16), (3.13) と x_1 に関する不等式 (3.14) に分解されたことになる．この分解は必要十分条件を与えており，不等式条件 (3.16), (3.13) を満たす $(x_2, \ldots, x_n)$ に対して条件 (3.14) を満たす x_1 を定めれば，与えられた不等式条件 (3.11), (3.12), (3.13) を満たす $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が得られる．

次に，$(x_2, \ldots, x_n)$ に関する不等式系 (3.16), (3.13) に対して，同様にして，変数 x_2 を消去して $(x_3, \ldots, x_n)$ に関する不等式系を得ることができる．このような変数消去を繰り返していくと，最後には一つだけの変数 x_n に関する不等式系が得られるが，これを満たす x_n を求める (あるいは，そのような x_n が存在しないことを判定する) ことは容易である．これが Fourier–Motzkin の消去法の考え方である．

注意 3.1 変数の消去に伴う不等式の本数の変化を見ておこう．式 (3.11) の m_1 本の不等式と式 (3.12) の m_2 本の不等式から，式 (3.16) の $m_1 m_2$ 本の不等式が生成されている．したがって，不等式の本数は $m = m_1 + m_2 + m_0$ 本から $m_1 m_2 + m_0$ 本になる．これは一つの変数を消去したときの変化であり，変数消去を繰り返すと，通常は不等式の本数が急速に増加する．Fourier–Motzkin の消去法では，不等式の本数が (大幅に) 増大する可能性があることには注意が必要である． $\triangleleft$

変数の消去は，幾何学的には射影に対応する．与えられた不等式条件 (3.11), (3.12), (3.13) を満たす $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の成す領域を S $(\subseteqq \mathbb{R}^n)$ とするとき，x_1 軸に沿った S の**射影**

$$\hat{S} = \{(x_2, \ldots, x_n) \mid \text{ある } x_1 \text{ に対して } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S\}$$

を記述する不等式系が，式 (3.16), (3.13) である．

例 3.1 変数 (x_1, x_2) に関する不等式系

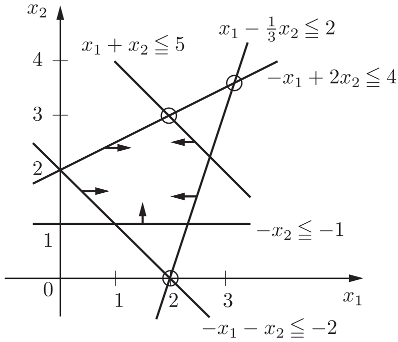

図 3.1　Fourier–Motzkin の消去法の例題

$$
\begin{aligned}
x_1 - \frac{1}{3}x_2 &\leqq 2, && (3.17)\\
x_1 + x_2 &\leqq 5, && (3.18)\\
-x_1 - x_2 &\leqq -2, && (3.19)\\
-x_1 + 2x_2 &\leqq 4, && (3.20)\\
-x_2 &\leqq -1 && (3.21)
\end{aligned}
$$

に Fourier–Motzkin の消去法を適用する．この不等式系で記述される領域 S は図 3.1 のような多角形領域であり，この図を見れば上の不等式系に解 (x_1, x_2) が存在することがわかるが，Fourier–Motzkin の消去法によってこのことを導こう．

不等式は全部で 5 本あり，そのうち x_1 の係数が正のものが 2 本，負のものが 2 本である ($m = 5$, $m_1 = m_2 = 2$)．式 (3.14) は

$$\max(2 - x_2, -4 + 2x_2) \leqq x_1 \leqq \min\left(2 + \frac{1}{3}x_2, 5 - x_2\right) \tag{3.22}$$

となり，x_1 を消去した不等式系 (3.16) は

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{3} - 1\right)x_2 \leqq (2 - 2), \qquad && \left(-\frac{1}{3} + 2\right)x_2 \leqq (2 + 4),\\
&(1 - 1)\,x_2 \leqq (5 - 2), && (1 + 2)\,x_2 \leqq (5 + 4),
\end{aligned}
$$

すなわち

$$x_2 \geqq 0, \qquad x_2 \leqq \frac{18}{5}, \qquad \text{無条件}, \qquad x_2 \leqq 3 \tag{3.23}$$

となる (図 3.1 の ○ 印の点の x_2 座標に対応している)．式 (3.23) と式 (3.21) より

$$1 = \max(1, 0) \leqq x_2 \leqq \min\left(\frac{18}{5}, 3\right) = 3 \tag{3.24}$$

が得られる．したがって，S の射影は $\hat{S} = \{x_2 \mid 1 \leqq x_2 \leqq 3\}$ となる．式 (3.24) を満たす x_2 が存在することから，与えられた不等式系の解 (x_1, x_2) が存在することがわかる．たとえば，$x_2 = 2$ とすると，式 (3.22) は

$$0 = \max(0, 0) \leqq x_1 \leqq \min\left(\frac{8}{3}, 3\right) = \frac{8}{3}$$

となり，たとえば $x_1 = 1$ とすることができる．これにより，$(x_1, x_2) = (1, 2)$ が不等式条件 (3.17)～(3.21) を満たすことが結論できる．$\lhd$

3.3　線形不等式系の解の存在

本節では，線形不等式系 $A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ が解 $\boldsymbol{x}$ をもつための条件を考える．行列 A は $m \times n$ 型行列，ベクトル $\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトルとする．

比較のために，方程式系 (線形等式系) の場合の定理を思い出しておく[15]．

定理 3.1　行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して，次の 2 条件 (a), (b) は同値である．

(a)　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する．
(b)　任意の実数ベクトル $\boldsymbol{y}$ について，$\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{0}^\top$ ならば $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = 0$ である．

当然のこととして，方程式系と不等式系では具体的な条件は異なるが，不等式系に関する諸定理においても定理 3.1 のパターンは踏襲される．なお，上の条件 (a) は，幾何学的には

(c)　$\boldsymbol{b}$ は A の列ベクトルの張る部分空間 $\mathrm{Im}(A)$ に属する

と言い換えることができる．

3.3.1　Farkas の 補 題

ここでは，線形不等式系が解をもつための条件を与える定理として，Farkas の補題とそれに関連する定理について述べる．Farkas の補題は，線形不等式論にお